Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 177-184

MARCELLO BRUNI (*)

Forme lineari generalizzate e forma di Kähler in una varietà a struttura quaternionale generalizzata. (**)

1. – Nelle varietà a struttura quaternionale generalizzata, introdotte da E. MARTINELLI, lo spazio tangente in ciascun punto possiede infinite strutture distinte di spazio vettoriale sul corpo Q degli ordinari quaternioni (1). Non è perciò possibile considerare su tale spazio una forma lineare in senso ordinario.

Nella presente Nota si introduce anzitutto la nozione di *forma lineare generalizzata*; si tratta, sostanzialmente, di una classe di equivalenza di forme lineari ordinarie, i cui valori su ciascun vettore differiscono per automorfismi interni di $Q - 0$. Ne riescono perciò individuati sia la parte reale, sia il modulo.

Si passa poi ad esaminare il significato geometrico del valore assunto su un bivettore tangente alla varietà dalla forma esterna (generalizzata) associata alla forma quadratica che dà localmente la metrica. Il risultato cui si perviene è che il modulo di tale numero uguaglia la *componente caratteristica* della misura del bivettore, cioè il prodotto di tale misura per il coseno della deviazione caratteristica del piano del bivettore.

Questa conclusione generalizza una proprietà stabilita da G. B. RIZZA nel caso delle varietà a struttura complessa (2).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Roma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1966-1967. — Ricevuto il 19-X-1966.

(1) E. MARTINELLI [14]. Per le nozioni generali cfr., ad esempio, B. ECKMANN [8], A. LICHNEROWICZ [9], E. MARTINELLI [10], [11], [12].

(2) G. B. RIZZA [16].

I. - Richiami.

2. – Sia $\mathcal{M}_{4n}$ una varietà a *struttura quaternionale generalizzata* (³), ossia una varietà differenziabile reale di dimensione $4n$ dotata di un atlante tale che in ogni carta si possano introdurre n coordinate quaternionali z^α e le formule di trasformazione dei differenziali appartengano al gruppo linerare generalizzato $\widetilde{G}L_n^Q$, cioè siano del tipo:

$$\mathrm{d}z'^\beta = a_\alpha^\beta \, \mathrm{d}z^\alpha \, q \,, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n) \,, \tag{2.1}$$

ove le $a_\alpha^\beta \in Q$ costituiscono una matrice invertibile e $q \in Q$, $|q| = 1$.

Nello spazio vettoriale reale V_{4n} tangente in un punto P_0 ad $\mathcal{M}_{4n}$ si hanno — come ha osservato MARTINELLI (⁴) — infinite strutture distinte di spazio vettoriale *destro* su Q, e vi sono alcune nozioni geometriche comuni a tutte queste strutture: e cioè anzitutto le *faccette caratteristiche* che sono i sottospazi V_4 di V_{4n} immagini reali dei sottospazi di V_{4n} a dimensione quaternionale unitaria, ed inoltre una *metrica conforme euclidea* entro ogni faccetta caratteristica.

Osserviamo esplicitamente che ad ogni vettore $L \in V_{4n}$ riesce associato in modo intrinseco il sottospazio V_3 dei vettori ad esso ortogonali entro la faccetta caratteristica individuata da L. Perdono invece significato le biiezioni

$$\mathcal{I}: \ L \to L\,i, \qquad \mathcal{J}: \ L \to Lj, \qquad \mathcal{K}: \ L \to L\,k,$$

che avevo introdotto in precedenti lavori (⁵), a proposito di uno spazio vettoriale quaternionale.

Dunque, ripetiamo, non ha più significato geometrico l'operazione di moltiplicare a destra il vettore $L \in V_{4n}$ per il quaternione q in quanto (⁶) la omotetia ω_p: $L \to L\,p$ rispetto alla struttura $\mathcal{V}_n^Q$ appare invece come l'omotetia $\omega_{\bar{q}pq}$ nella nuova struttura $\mathcal{V}_n'^Q$, ove q ($|q| = 1$) è un quaternione che dipende da $\mathcal{V}_n^Q$, $\mathcal{V}_n'^Q$.

II. - Forme lineari generalizzate.

3. – Parallelamente si deve modificare la nozione di 1-forma (forma lineare) su V_{4n} a valori in Q; infatti si riconosce subito che un'applicazione di V_{4n} in Q

(³) E. MARTINELLI [11].
(⁴) E. MARTINELLI [14].
(⁵) M. BRUNI [2], [3].
(⁶) E. MARTINELLI [11], p. 401.

che sia lineare rispetto alla struttura $\mathscr{V}_n^Q$ non è più lineare rispetto a $\mathscr{V}_n'^Q$.

Ora, supposta data una forma θ relativa a $\mathscr{V}$, poichè l'omotetia ω_p in $\mathscr{V}$ si interpreta come l'omotetia $\omega_{\bar{q}pq}$ in $\mathscr{V}'$, alla forma lineare θ in $\mathscr{V}$ corrisponde, in $\mathscr{V}'$, l'applicazione θ' di V_{4n} in Q definita dalla

$$\theta'(L) = \bar{q}\,\theta(L)\,q, \tag{3.1}$$

essendo L un vettore qualunque. Si accerta subito che la θ' è una forma rispetto a $\mathscr{V}'$.

Al variare di q in Q si ottiene perciò una totalità di forme (ciascuna relativamente ad una struttura) che chiameremo *forma generalizzata* ed indicheremo con il simbolo $\tilde{\theta}$: θ e θ' sono due rappresentanti di $\tilde{\theta}$. È, poi, immediato che la (3.1) dà luogo ad una relazione di equivalenza tra i rappresentanti.

Si ha il

Teorema 1. *Una forma generalizzata assume valore univoco su tutti e soli i vettori ove tale valore è reale. Ciò avviene per i vettori di un* V_{4n-3r} *ove* r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ *è il numero massimo di vettori indipendenti in* Q *su cui la forma non si annulla.*

La prima affermazione si prova subito, osservando che $\bar{q}\,l\,q$ è uguale ad l per ogni $q \in Q$ solo se l appartiene al centro del gruppo moltiplicativo di $Q - 0$, ossia se è reale.

Passiamo ora a considerare una forma generalizzata $\tilde{\theta}$ ed un suo rappresentante θ relativo ad una certa struttura ammissibile $\mathscr{V}_n^Q$, e sia $\theta(L_1) = l_1 \in Q$ il valore di θ sul vettore $L_1 \neq 0$. Sia inoltre $V_4^{(L_1)}$ la faccetta caratteristica passante per L_1.

Supposto $l_1 \neq 0$, fissiamo l'attenzione sul vettore M_1 tale che, rispetto a $\mathscr{V}_n^Q$ sia $M_1 = L_1 \dfrac{1}{l_1}$. Ovviamente, tra tutti i vettori di $V_4^{(L_1)}$ i soli sui quali θ e quindi $\tilde{\theta}$ sia reale sono i multipli reali di M_1.

Consideriamo adesso uno spazio V_{4n-4} supplementare di V_4 entro V_{4n} ed iteriamo il procedimento. Si ottengono così r $(0 \leqslant r \leqslant n)$ vettori M_i non nulli ed indipendenti tali che sia $\theta(M_i)$ $(i = 1, \ldots, r)$ reale e diverso da zero.

La forma considerata ha, in definitiva, valori reali non nulli sui vettori del V_r di $M_1, \ldots, M_r$, ed inoltre valore zero sui vettori di un $V_{4(n-r)}$ supplementare della somma diretta $V_4^{(M_1)} \oplus \ldots \oplus V_4^{(M_r)}$. In definitiva, θ e quindi $\tilde{\theta}$ assume valori reali sul V_{4n-3r} somma diretta del V_r e del $V_{4(n-r)}$ poc'anzi considerati.

Il Teorema 1 è così dimostrato.

Osserviamo che su ogni altro vettore di V_{4n} la forma $\tilde{\theta}$ assume invece infiniti valori, costituenti una classe completa di elementi coniugati di Q. Tuttavia:

(3.2) Sono *individuati*, per ogni vettore L di V_{4n}, il *modulo*, la *parte reale* e, di conseguenza, il *modulo della parte immaginaria* di $\tilde{\theta}(L)$, in quanto $|\bar{q}\, p\, q| = |p|$ e $\mathrm{Re}\,(\bar{q}\, p\, q) = \mathrm{Re}\,(p\, q\, \bar{q}) = \mathrm{Re}\,(p)$ (7).

4. – Supponiamo ora che la varietà $\mathscr{M}_{4n}$ sia dotata di metrica hermitiana che, nello spazio vettoriale V_{4n} tangente in P_0 ad $\mathscr{M}$, sia espressa dalla

$$ds^2 = \bar{\tilde{\theta}}_\alpha\, \tilde{\theta}^\alpha\,, \tag{4.1}$$

ove le $\tilde{\theta}^\alpha$ sono forme pfaffiane generalizzate legate ai differenziali di un sistema di coordinate quaternionali da trasformazioni del gruppo $\tilde{L}_n^Q$ (n. 2) e $\bar{\tilde{\theta}}^\alpha$ è la forma coniugata di $\tilde{\theta}^\alpha$. La (4.1) è senz'altro corretta perchè indipendente dalla struttura ammissibile considerata (8).

Inoltre essa individua la *forma sesquilineare* che dà il *prodotto hermitiano* di due vettori:

$$L \cdot M = \bar{\tilde{\theta}}_\alpha(L)\, \tilde{\theta}^\alpha(M)\,, \tag{4.2}$$

il quale, però, risulta qui definito solo a meno di automorfismi interni di Q (9).

Tuttavia, in base alle osservazioni finali del n. 3:

(4.3) *le quantità reali* $|L \cdot M|$, $\mathrm{Re}\,(L \cdot M)$, $\mathrm{Im}\,(L \cdot M)$ *sono indipendenti dalla struttura considerata.*

III. - Valutazione della forma di Kähler su un bivettore tangente ad $\mathscr{M}_{4n}$.

5. – Consideriamo ora, seguendo il MARTINELLI (10), la 2-forma esterna

$$\omega = \bar{\tilde{\theta}}_\alpha \wedge \tilde{\theta}^\alpha\,, \tag{5.1}$$

collegata alla metrica (4.1) ed analoga alla *forma di Kähler* delle varietà complesse.

---

(7) Cfr. E. MARTINELLI [15], p. 131. Indichiamo con $\mathrm{Re}\,(q)$, $\mathrm{Im}\,(q)$ la parte reale e la parte immaginaria del quaternione q.

(8) E. MARTINELLI [14], p. 405, a).

(9) E. MARTINELLI [14], p. 405, b).

(10) E. MARTINELLI [11], [12].

Nel caso delle varietà complesse il valore di tale forma, calcolata su di un bivettore $L \wedge M$ uguaglia, come ha mostrato RIZZA [11], la *componente caratteristica* della misura di $L \wedge M$, ossia è uguale al prodotto della misura di $L \wedge M$ per il coseno della deviazione caratteristica del piano di L, M.

Ci proponiamo di stabilire, nel caso quaternionale generalizzato, quale è il significato del valore che la forma ω assume su un generico bivettore $L \wedge M$.

Per prima cosa ricordiamo che, date due forme esterne φ_r, ψ_s, a valori in Q, l'operazione di prodotto esterno dà luogo ad una $r+s$-forma che si definisce, in modo del tutto spontaneo, mediante la [12]:

$$\begin{aligned}\varphi_r \wedge \psi_s &= (\overset{0}{\varphi}_r \wedge \overset{0}{\psi}_s - \overset{1}{\varphi}_r \wedge \overset{1}{\psi}_s - \overset{2}{\varphi}_r \wedge \overset{2}{\psi}_s - \overset{3}{\varphi}_r \wedge \overset{3}{\psi}_s) + \\ &\quad + i(\overset{0}{\varphi}_r \wedge \overset{1}{\psi}_s + \overset{1}{\varphi}_r \wedge \overset{0}{\psi}_s + \overset{2}{\varphi}_r \wedge \overset{3}{\psi}_s - \overset{3}{\varphi}_r \wedge \overset{2}{\psi}_s) + \ldots,\end{aligned} \tag{5.2}$$

ove si è posto:

$$\varphi_r = \overset{0}{\varphi}_r + i\,\overset{1}{\varphi}_r + j\,\overset{2}{\varphi}_r + k\,\overset{3}{\varphi}_r, \tag{5.3}$$

e analoghe per ψ_s, essendo $\overset{h}{\varphi}_r$, $\overset{h}{\psi}_s$ $(h = 0, \ldots, 3)$ forme differenziali *reali*.

A noi interessa però qui il *valore* che una certa 2-forma $\varphi \wedge \psi$ assume su un certo bivettore semplice $L \wedge M$; si riconosce facilmente, sulla base della (5.2), che esso è fornito da:

$$(\varphi \wedge \psi)(L \wedge M) = \begin{vmatrix} \varphi(L) & \psi(L) \\ \varphi(M) & \psi(M) \end{vmatrix} = \varphi(L)\,\psi(M) - \varphi(M)\,\psi(L)\,, \tag{5.4}$$

ove si assuma l'ultima uguaglianza come *definizione* del determinante scritto.

Dobbiamo ora considerare in particolare il caso della forma $\omega = \bar{\bar{\theta}}_\alpha \wedge \tilde{\theta}^\alpha$. Qui $\bar{\bar{\theta}}_\alpha$ e $\tilde{\theta}^\alpha$ sono generalizzate; tuttavia può scriversi l'espressione stessa suggerita dalla (5.4), e cioè:

$$\omega(L \wedge M) = \bar{\bar{\theta}}_\alpha(L)\,\tilde{\theta}^\alpha(M) - \bar{\bar{\theta}}_\alpha(M)\,\tilde{\theta}^\alpha(L)\,. \tag{5.5}$$

---

[11] G. B. RIZZA [16].

[12] E. MARTINELLI [12], p. 77.

Si vede subito che il secondo membro è individuato a meno di automorfismi interni in Q; ed infatti, se θ^α, θ'^α sono due rappresentanti di $\tilde{\theta}^\alpha$ risp. nelle strutture $\mathscr{V}_n^Q$ e $\mathscr{V}_n'^Q$, essi assumono i valori $\bar{\theta}_\alpha(L)\,\theta^\alpha(M) - \bar{\theta}_\alpha(M)\,\theta^\alpha(L)$ e

$$(\bar{q}\,\bar{\theta}_\alpha(L)\,q)\,(\bar{q}\,\theta^\alpha(M)\,q) - (\bar{q}\,\bar{\theta}_\alpha(M)\,q)\,(\bar{q}\,\theta^\alpha(L)\,q) = \bar{q}[\bar{\theta}_\alpha(L)\,\theta^\alpha(M) - \bar{\theta}_\alpha(M)\,\theta^\alpha(L)]\,q.$$

D'altra parte, nel caso attuale, al secondo membro della (5.5) appare una differenza tra quantità coniugate; perciò i valori di $\omega(L \wedge M)$ sono quaternioni privi di parte reale. Inoltre, confrontando le (5.5), (4.2) si deduce subito che:

(5.6) *Considerati due vettori L, M indipendenti (su R), il valore che la 2-forma esterna $\omega = \bar{\bar{\theta}}_\alpha \wedge \tilde{\theta}^\alpha$ associata alla metrica assume sul bivettore $L \wedge M$ è collegato al prodotto hermitiano $L \cdot M$ dalla*

$$\omega(L \wedge M) = 2\,\mathrm{Im}\,(L \cdot M)\,, \tag{5.7}$$

nel senso che tale uguaglianza è valida rispetto ad ogni struttura ammissibile di V_{4n}.

6. – Lo spazio vettoriale affine V_{4n} dotato di metrica hermitiana acquista anche una struttura di spazio euclideo E_{4n} quando si considera in esso la metrica indotta dal prodotto scalare

$$L \times M = \mathrm{Re}\,(L \cdot M)\,. \tag{6.1}$$

In precedenti lavori ([13]) ho introdotto il concetto di *deviazione caratteristica assoluta* di un piano E_2 appartenente all'E_{4n}, concetto che fornisce una misura di quanto l'E_2 è lontano dall'essere pseudocaratteristico, ossia contenuto in un E_4 caratteristico.

La deviazione caratteristica è espressa dall'angolo così definito:

$$\cos \delta_{E_2(L,M)} = \frac{|\,\mathrm{Im}\,(L \cdot M)\,|}{\mathrm{mis}\,(L \wedge M)}\,, \qquad 0 \leqslant \delta \leqslant \pi/2\,, \tag{6.2}$$

con L, M vettori indipendenti dell'E_2.

Osserviamo anzitutto che la (6.2) conserva significato nel caso quaternionale generalizzato.

Difatti, per la (4.3) è intanto individuato il numeratore della (6.2); per quanto

([13]) M. Bruni [2], [3].

riguarda il denominatore, basta osservare che

$$\text{mis}^2 (L \wedge M) = \text{mis}^2 L \, \text{mis}^2 M - (L \times M)^2 = (L \cdot L)(M \cdot M) - [\text{Re}\,(L \cdot M)]^2 ,$$

ed utilizzare nuovamente la (4.3).

Inoltre la (6.2), tenuto conto della (5.7), permette di enunciare il

Teorema 2. *Il modulo del valore che la forma esterna ω acquista sul bivettore $L \wedge M$ è il doppio della componente caratteristica della misura di $L \wedge M$.*

Risulta così chiarito il significato geometrico della forma esterna associata alla metrica hermitiana.

Bibliografia.

[1] M. Bruni, *Su alcuni sistemi di sottospazi di uno spazio hermitiano*, Rend. Mat. e Appl. **20** (1961).

[2] M. Bruni, *Relazioni tra metriche euclidee ed hermitiane in uno spazio vettoriale quaternionale*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **38** (1965).

[3] M. Bruni, *Su alcune proprietà di geometria euclidea ed hermitiana in uno spazio vettoriale quaternionale*, Ann. Mat. Pura Appl. **72** (1965).

[4] M. Bruni, *Sulla nozione di deviazione caratteristica nello spazio vettoriale quaternionale*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **39** (1965).

[5] M. Bruni, *Misure angolari in uno spazio vettoriale quaternionale*, Rend. Mat. e Appl. **25** (1966).

[6] E. Cartan, *Leçons sur la Géométrie des espaces de Riemann*, 2me ed.; Gauthier-Villars, Paris 1951.

[7] P. Du Val, *Homographies, quaternions and rotations*, Clarendon Press, Oxford 1964.

[8] B. Eckmann, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.), Roma 1956.

[9] A. Lichnerowicz, *Algèbre et analyse linéaires*, Masson, Paris 1947.

[10] E. Martinelli, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957).

[11] E. Martinelli, *Varietà a struttura quaternionale generalizzata*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **26** (1959).

[12] E. Martinelli, *Modello metrico reale dello spazio proiettivo quaternionale*, Ann. Mat. Pura Appl. **49** (1960).

[13] E. MARTINELLI, *Generalizzazione dei teoremi di minimo volume di Wirtinger a tutte le varietà kähleriane e quasi-kähleriane*, Ann. Mat. Pura Appl. **50** (1960).

[14] E. MARTINELLI, *Metriche hermitiane sulle varietà a struttura quasi quaternionale generalizzata*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **39** (1965).

[15] E. MARTINELLI, *Lezioni di geometria superiore*, Edizione ciclostilata, Roma 1965.

[16] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica delle faccette piane di una varietà a struttura complessa*. Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **24** (1958).

[17] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2 q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, Rend. Accad. Naz. dei XL **10** (1959).

[18] G. B. RIZZA, *Teoremi di curvatura in una V_{2n} quasi hermitiana*, Riv. Mat. Univ. Parma **2** (1961).

[19] F. SEVERI, *La geometria delle funzioni analitiche di più variabili ed i teoremi di esistenza e di unicità ad esse relativi*, Ann. Mat. Pura Appl. **16** (1937).

Summary.

On a generalized quaternion manifold we introduce the notion of generalized differential 1-form.

This notion enables us to connect the value of the Kähler form of the manifold on a tangent bivector with the caracteristic deviation and the measure of the bivector.