Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 151-156

FERRUCCIO FONTANELLA (*)

Su una formula di interpolazione di tipo misto di Lagrange - Hermite. (**)

1. - Introduzione.

Siano assegnati, nell'intervallo $[-1, 1]$, $2n$ punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ e, corrispondentemente, siano assegnati $2n$ valori $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$. È noto che il polinomio di interpolazione di LAGRANGE è l'unico polinomio di grado $\leqslant 2n-1$ che nei $2n$ punti $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ assume i valori $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, mentre il polinomio di interpolazione di HERMITE è l'unico polinomio di grado $\leqslant 4n-1$ che nei punti assegnati assume i valori $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ e che ha, negli stessi punti, derivate prime assegnate.

In una sua recente Nota L. MERLI (1), riprendendo un lavoro di P. SZASZ (2), ha considerato il polinomio di interpolazione, di grado $\leqslant 4n$,

$$(1) \qquad \overline{S}_{4n}(x) = \sum_{k=1}^{2n} y_k \frac{x}{x_k} V_k^{(n)}(x) \, [l_k^{(n)}(x)]^2,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1965-66. — Ricevuto: 14-V-1966.

(1) L. MERLI, *Le formule di interpolazione di tipo misto di Lagrange e Hermite per la classe delle funzioni del tipo $f(x) = c + x^2 \varphi(x)$*. Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 17-21.

(2) P. SZASZ, *The extended Hermite-Fejér interpolation formula whith application to the theory of generalized almost quasi-step parabolas*. Publ. Math. 11 (1964), 85-100.

dove:

$$V_k^{(n)}(x) = 1 - \left\{\frac{1}{x_k} + \frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}\right\}(x - x_k)\,, \tag{2}$$

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)(x - x_k)}\,, \tag{3}$$

con:

$$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{2n}),$$

che nei $2n$ punti $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ assume rispettivamente i valori $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$, con derivata prima nulla in tali punti e che, inoltre, si annulla per $x = 0$, senza alcuna condizione sulla derivata prima in tale punto ([3]) e, nell'ipotesi che i punti fondamentali dell'interpolazione $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$ siano gli zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie:

$$T_{2n}(x) = \cos(2n\theta), \qquad x = \cos\theta,$$

ha dimostrato il seguente:

Teorema: *Se* $\varphi(x)$ *è una funzione continua nell'intervallo* $[-1, 1]$, *posto* $f(x) = c + x^2\varphi(x)$ ([4]) *e assegnati, nei punti fondamentali* $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$, *i valori* $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{2n})$, *per il polinomio*:

$$\overline{S}_{4n}(x), \qquad con \qquad \overline{S}'_{4n}(x_i) = 0 \qquad per \qquad i = 1, 2, \dots, 2n,$$

si ha, uniformemente in $[-1, 1]$,

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_{4n}(x) = f(x)\,.$$

Scopo di questa Nota è una generalizzazione di tale risultato. Sarà, infatti, dimostrato il

---

([3]) Il punto in cui non si assegna la derivata potrebbe essere, anzichè l'origine, un qualunque altro punto distinto dagli x_k.

([4]) La costante c può essere assunta, per semplicità, uguale a zero senza perdere in generalità.

Teorema: *Data una funzione $\varphi(x)$ continua nell'intervallo $[-1, 1]$, posto* (5):

$$f(x) = c + |x|^\alpha \varphi(x),$$

con $0 < \alpha$ (6), *assegnati nei punti fondamentali* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$, *zeri del polinomio di Tchebycheff di prima specie, i valori* $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{2n})$, *si consideri ancora il polinomio* $\overline{S}_{4n}(x)$ *che nei punti* x_k *assume i valori* $f(x_k)$, *con* $\overline{S}'_{4n}(x_k) = 0$ *per* $k = 1, 2, \ldots, 2n$, *e tale che sia* $\overline{S}_{4n}(0) = 0$, *senza alcuna ipotesi sul valore* $\overline{S}'_{4n}(0)$, *allora si ha, uniformemente in* $[-1, 1]$,

$$\lim_{n \to \infty} \overline{S}_{4n}(x) = f(x).$$

2. - Dimostrazione del Teorema enunciato.

Nelle ipotesi fatte si ha:

$$\omega_n(x) = \cos(2n\theta), \qquad x = \cos\theta,$$

$$x_k = \cos\theta_k = \cos\left[\frac{2k-1}{4n}\pi\right] \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n),$$

e siano:

$$y_k = |x_k|^\alpha \varphi(x),$$

i valori che il polinomio $\overline{S}_{4n}(x)$ assume nei punti $x = x_k$, cioè i valori che assume, per $x = x_k$ la funzione $f(x)$:

$$y_k = f(x_k) \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n).$$

La (1) prende allora la forma:

$$(4)\quad \overline{S}_{4n}(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^{\alpha-2}\varphi(x_k)\frac{\cos\theta\cos^2(2n\theta)}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}[\cos\theta_k \operatorname{sen}^2\theta_k - (\cos\theta - \cos\theta_k)].$$

Si consideri ora il polinomio interpolante di HERMITE che nei punti $x_1, x_2, \ldots x_{2n}$, assume rispettivamente i valori $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_{2n})$ e la cui de-

(5) Si vedano le due annotazioni precedenti.

(6) Per $\alpha = 2$ si ritrova il teorema dimostrato da L. MERLI.

rivata è nulla negli stessi punti. Tale polinomio è di grado $\leqslant 4n-1$ e, nel caso considerato, ha la forma:

$$H_{4n-1}(x) = \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^\alpha \varphi(x_k) \frac{\cos^2(2n\theta)}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}[1-\cos\theta_k\cos\theta]. \tag{5}$$

Ed è ben noto (7) che, essendo $f(x) = |x|^\alpha \varphi(x)$ continua in $[-1, 1]$, vale

$$\lim_{n\to\infty} H_{4n-1}(x) = |x|^\alpha \varphi(x). \tag{5'}$$

Dalla (4) e dalla (5) si ha

$$\overline{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x) =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^\alpha \varphi(x_k) \frac{\cos^2(2n\theta)}{(\cos\theta-\cos\theta_k)^2}\cdot$$

$$\left[\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta_k}{\cos\theta_k} - \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta_k} + \frac{\cos\theta}{\cos\theta_k} - 1 + \cos\theta_k\cos\theta\right] =$$

$$= \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^{\alpha-2} \varphi(x_k)\cos^2(2n\theta).$$

Quindi:

$$|\overline{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| \leqslant \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^{\alpha-2} |\varphi(x_k)|,$$

ed essendo $\varphi(x)$ continua in $[-1, 1]$ si ottiene:

$$|\overline{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| \leqslant \frac{c}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n} |\cos\theta_k|^{\alpha-2}, \tag{6}$$

con c costante assoluta.

---

(7) Si veda, ad esempio: G. Vitali e G. Sansone, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, Parte II, N. Zanichelli, Bologna 1952 (cfr. pag. 491).

Con $\alpha \geqslant 2$, dalla (6) si ha evidentemente:

(7) $$|\bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| < c\frac{n}{n^2} = \frac{c}{n}.$$

Se $1 < \alpha < 2$, posto $2 - \alpha = \beta$, è $\beta < 1$ e dalla (6) segue:

$$|\bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| < \frac{c}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}|\cos\theta_k|^{-\beta} =$$

$$= \frac{c}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\left[4n\left|\frac{2n-2k+1}{4n}\pi\right|\right]^{\beta}\left[|(2n-2k+1)\pi|\left|\operatorname{sen}\left[\frac{2n-2k+1}{4n}\pi\right]\right|\right]^{-\beta} <$$

$$< \frac{c'}{n^{2-\beta}}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n-2k+1)^{\beta}} + \sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{(2k-2n-1)^{\beta}}\right] =$$

$$= \frac{2c'}{n^{2-\beta}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n-2k+1)^{\beta}} = \frac{2c'}{n^{2-\beta}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)^{\beta}} < \frac{2c'}{n^{2-\beta}}\int_1^n\frac{dx}{x^{\beta}} =$$

$$= \frac{2c'}{n^{2-\beta}}\,\frac{n^{1-\beta}-1}{1-\beta} < \frac{\bar{c}}{n} + \frac{c''}{n^{2-\beta}},$$

con c, c', c'', $\bar{c}$ costanti assolute; quindi per $1 < \alpha < 2$ risulta:

(8) $$|\bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| < \frac{\bar{c}}{n} + \frac{c''}{n^{\alpha}}.$$

Per $\alpha = 1$ dalla (6) si ha:

$$|\bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x)| < \frac{c}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}\left|\cos\left[\frac{2k-1}{4n}\pi\right]\right|^{-1} =$$

$$= \frac{c}{4n^2}\sum_{k=1}^{2n}4n\left|\frac{2n-2k+1}{4n}\pi\right|\left[\pi|2n-2k+1|\left|\operatorname{sen}\left[\frac{2n-2k+1}{4n}\pi\right]\right|\right]^{-1} <$$

$$< \frac{c'}{n}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{|2n-2k+1|} = \frac{2c'}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(2j-1)} < \frac{\bar{c}}{n}\log(2n),$$

con c, c', $\bar{c}$ costanti assolute. Quindi per $\alpha = 1$ segue:

$$(9) \qquad | \bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x) | < \frac{\bar{c}}{n} \log (2n) .$$

Per $0 < \alpha < 1$, posto $2 - \alpha = \gamma$, è $\gamma > 1$; dalla (6) si ha:

$$| \bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x) | < \frac{c}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} | \cos \theta_k |^{-\beta} =$$

$$= \frac{c}{4n^2} \sum_{k=1}^{2n} \left[4n \left| \frac{2n - 2k + 1}{4n} \pi \right| \right]^{\gamma} \left[\pi \,| 2n - 2k + 1 | \left| \operatorname{sen} \left[\frac{2n - 2k + 1}{4n} \pi \right] \right| \right]^{-\gamma} <$$

$$< \frac{c'}{n^{2-\gamma}} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{| 2n - 2k + 1 |^{\gamma}} = \frac{2c'}{n^{2-\gamma}} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(2j - 1)^{\gamma}} < \frac{\bar{c}}{n^{2-\gamma}} = \frac{\bar{c}}{n^{\alpha}} ,$$

con c, c', $\bar{c}$ costanti assolute. Quindi per $0 < \alpha < 1$ risulta:

$$(10) \qquad | \bar{S}_{4n}(x) - H_{4n-1}(x) | < \frac{\bar{c}}{n^{\alpha}} .$$

Dalle (7), (8), (9) e (10), tenendo conto della (5'), si ha quindi:

$$\lim_{n \to \infty} \bar{S}_{4n}(x) = \lim_{n \to \infty} H_{4n-1}(x) = | x |^{\alpha} \varphi(x) ,$$

con $\alpha > 0$, come volevasi dimostrare.

Summary.

A theorem on the convergence of the Lagrange-Hermite *polynomials, relative to a function of the form* $f(x) = |x|^{\alpha} \varphi(x)$, $\alpha > 0$, *with continuous* $\varphi(x)$, *is proved if the points of interpolation are the zeros of the* Tchebycheff *polynomials of the first kind.*

* * *