Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 145-150

GIOVANNI FERRERO (*)

Due generalizzazioni del concetto di anello e loro equivalenza nell'ambito degli «stems» finiti. (**)

Introduzione.

Si consideri un insieme G dotato di due leggi di composizione (somma e prodotto), che sia un gruppo abeliano rispetto alla somma.

Se, qualunque siano gli elementi a_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ e b_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ di G, vale la relazione

$$(1) \qquad (\sum_{1}^{m}{}_i a_i)(\sum_{1}^{n}{}_j b_j) = \sum_{1}^{m}{}_i \sum_{1}^{n}{}_j a_i b_j,$$

si dice (con R. A. BEAUMONT [1]) che G è (m, n)*-distributivo*.

Se G è $(1, 2)$-distributivo ed il prodotto in G è associativo, G è un *quasi-anello abeliano* (sinistro), o *stem abeliano* (in quanto il gruppo additivo G^+ di G è abeliano) (1).

Se G è (m, n)-distributivo con $m \neq 1$, $n \neq 1$, G è un *anello generalizzato* (2).

Un elemento c di G, tale che per ogni a, b di G sia $(a + b)c = ac + bc$, prende il nome di elemento distributivo a destra; l'insieme degli elementi distributivi a destra di G sarà denotato con D.

Sia poi $0G$ l'insieme degli elementi di G che sono prodotto dello zero di G (elemento neutro rispetto alla somma) e di un elemento di G. Sia definito analogamente l'insieme $G0$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. - Ricevuto il 24-I-1966.

(1) Per le relative nozioni generali cfr. per es. [2] e la bibliografia ivi citata.

(2) Gli anelli generalizzati sono stati introdotti e studiati da R. A. BEAUMONT in [1].

Se G è uno stem abeliano, D e $0G$ sono *sottogruppi* del gruppo additivo di G (³). Se inoltre G^+ è la somma dei gruppi D e $0G$, si dice che G è un *quasi-anello affine astratto* (brevemente $\mathfrak{A}$-*stem*) (⁴).

In questo lavoro si stabilisce che, per gli stems finiti, la nozione di anello generalizzato e quella di quasi-anello affine astratto sono equivalenti. Questo risultato è seguito da alcuni complementi.

1. – Si consideri un sistema a doppia composizione G, che sia un gruppo abeliano rispetto alla somma. Sussiste il

Lemma 1. *Se G è $(m, 1)$-distributivo ed insieme $(1, n)$-distributivo, G è anche $(h(m-1)+1, k(n-1)+1)$-distributivo, per tutti gli interi h, k maggiori od eguali a zero* (⁵).

Il lemma è conseguenza immediata delle seguenti osservazioni:

a) G è banalmente $(1,1)$-distributivo.

b) Se G è $(m, 1)$-distributivo, è, per tutti gli interi h, anche $(h(m-1), 1)$-distributivo, come si dimostra immediatamente per induzione, utilizzando la proprietà associativa della somma. Un risultato analogo si ottiene sfruttando l'ipotesi di $(1, n)$-distributività.

c) Se G è $(x, 1)$-distributivo ed $(1, y)$-distributivo, è anche (x, y)-distributivo, come si verifica in modo diretto.

Sussiste inoltre il

Lemma 2. *Se G è finito e per ogni a, b, c di G risulta.*

$$(a+b)c = ac + bc - 0c, \qquad a(b+c) = ab + ac - a0, \tag{2}$$

G è un anello generalizzato; e viceversa.

La parte inversa del lemma è sostanzialmente dimostrata nel lavoro **[1]** di R. A. Beaumont (⁶).

(³) Cfr. R. A. Beaumont [**1**], prop. 1 e 2.

(⁴) I quasi-anelli affini astratti (destri) sono stati introdotti e studiati da Gonshohr in [**4**].

(⁵) Questo lemma, che servirà soprattutto nel n. **3**, può essere confrontato con le considerazioni del n. **3** di Boccioni [**3**].

(⁶) Formula III del n. **2** di [**1**].

La parte diretta si stabilisce così:

se valgono le (2) si ha, per ogni numero naturale h:

$$(\sum_1^h{}_i a_i)c = \sum_1^h{}_i a_i c - (h-1)(0c) \,. \tag{3}$$

In particolare, indicato con $m-1$ il minimo comune multiplo delle caratteristiche [7] degli elementi di $0G$ risulta:

$$(\sum_1^m{}_i\, a_i)c = \sum_1^m{}_i\, a_i c \,,$$

onde, tenuta presente la (1), G è $(m, 1)$-distributivo.

Analogamente, sfruttando la seconda delle (2), si ha che G è $(1, n)$-distributivo, quando $n-1$ è il minimo comune multiplo delle caratteristiche degli elementi di $G0$.

In virtù del Lemma 1, G è dunque (m, n)-distributivo. Poichè in un gruppo additivo finito la caratteristica di un elemento è sempre maggiore od eguale ad uno, m, n sono certo non inferiori a 2, ed il lemma 2 è dimostrato.

Concludiamo questo numero segnalando un'osservazione utile nel seguito. *In un anello generalizzato finito G, l'annullatore destro $A(0)$* [8] *e l'insieme D degli elementi distributivi destri di G coincidono.* Questo è una conseguenza immediata della prima delle (2).

2. – *Sia G uno stem abeliano finito.* Sussiste il

Teorema 1. *G è un $\mathfrak{A}$-stem se e solo se è un anello generalizzato.*

Sia G un anello generalizzato. Per ogni stem G, il gruppo additivo G^+ è la somma di $0G$ e di $A(0)$. In vero per ogni g di G può scriversi $g = (g-0) + 0g$ [9]. Dall'osservazione al termine del n. 1. segue subito che G^+ è la somma di D e $0G$, onde G è un $\mathfrak{A}$-stem per definizione.

Viceversa sia G un $\mathfrak{A}$-stem. La seconda delle (2) diviene banale, onde, per stabilire l'assunto, è sufficiente, ai sensi del lemma 2, considerare la prima delle (2). Ora si è già notato che un elemento qualunque g di G può essere scritto nella forma $g = g' + g''$, ove $g' = g - 0g$, $g'' = 0g$. Poichè g' sta in $A(0)$ esso è un elemento distributivo destro in virtù dell'osservazione finale del n. 1.

---

(7) Relativamente alla struttura di gruppo additivo di G.

(8) Cioè l'insieme degli elementi g di G tali che $0g = 0$.

(9) Cfr. [2], n. 5.

Si ha poi, per ogni j di G,

$$jg'' = j(0g) = (j0)g = 0g = g''$$

e quindi

$$jg = j(g' + g'') = jg' + jg'' = jg' + g''. \tag{4}$$

Siano ora a, b due elementi arbitrari di G. Sostituendo successivamente nella (4) j con a, b, $a + b$, in quest'ultimo caso tenendo conto della proprietà distributiva destra di g' e confrontando le formule ottenute, si perviene subito alla relazione:

$$(a + b)g = ag + bg - g'',$$

e, poichè $g'' = 0g$, resta dimostrata la prima delle (2).

Corollario 1. *Un sottostem S di uno $\mathfrak{A}$-stem finito G è ancora un $\mathfrak{A}$-stem.*

Infatti G è abeliano ed (m, n)-distributivo (Teorema 1), onde anche S ha queste proprietà, e dal Teorema 1 segue subito l'asserto.

Corollario. 2. *Uno stem finito che sia $(m, 1)$-distributivo (m maggiore di 1) è un $\mathfrak{A}$-stem.*

Infatti per il Lemma 1 è $(m, 2)$-distributivo, e dunque un anello generalizzato. Per il teorema 1 è dunque un $\mathfrak{A}$-stem.

3. – Può essore interessante notare, a proposito degli anelli generalizzati G in cui $00 = 0$ [10], che le coppie di interi x, y per le quali G è (x, y)-distributivo si riconducono sostanzialmente alla coppia (m, n), dove m, n sono individuati dalle caratteristiche degli elementi di $0G$ e $G0$. Più precisamente si ha il

Teorema 2. *Se G è un anello generalizzato in cui $00 = 0$, le caratteristiche degli elementi di $0G$, $G0$ ammettono minimo comune multiplo, denotato con $m - 1$, $n - 1$ rispettivamente, e G risulta (x, y)-distributivo se e solo se*

$$x = h(m - 1) + 1\,, \qquad y = k(n - 1) + 1\,, \tag{5}$$

con h, k interi positivi o nulli.

---

[10] O, che per il Lemma 2 è lo stesso, in cui 0 è un elemento distributivo.

Tenendo conto anche del Teorema 1 si ha di qui il

Corollario 3. *Un $\mathfrak{A}$-stem G è (m, n)-distributivo se e solo se $m-1$ è multiplo delle caratteristiche di tutti gli elementi di $0G$.*

Se G è un anello generalizzato (x, y)-distributivo, in cui $00 = 0$, per la formula II di [1] è, per ogni g di G,

$$(x-1)(0g) = (y-1)(g0) = 0\,, \tag{6}$$

e dunque le caratteristiche degli elementi di $0G$ e $G0$ ammettono minimo comune multiplo: chiamiamo $m-1$ (rispettivamente $n-1$) il minimo comune multiplo delle caratteristiche degli elementi di $0G$ (rispett. $G0$). Si ha inoltre da (6) che per una proprietà elementare dei gruppi, $x-1$ è multiplo di $m-1$, ed $y-1$ è multiplo di $n-1$, e che dunque x, y hanno la forma (5).

Ponendo nella (3) $h = m$ si ha:

$$(\sum_{1}^{m}{}_i\, a_i)b = \sum_{1}^{m}{}_i\, a_i b - (m-1)(0b)$$

e, tenendo conto del significato di m e del fatto che (11)

$$(m-1)(0b) = (m-1) = (00) = 0,$$

se ne ricava che G è $(m, 1)$-distributivo. Analogamente si dimostra che G è $(1, n)$-distributivo.

A questo punto la dimostrazione del Teorema 2 è completa tosto che si ricordi il Lemma 1 del n. 1.

Nota. Dalla dimostrazione precedente risulta che la (x, y)-distributività di G quando x, y hanno la forma (5) non dipende dal fatto che $00 = 0$, ma solo dal fatto che si possa parlare dei minimi comuni multipli $m-1$ ed $n-1$. Da questo punto di vista l'ipotesi $00 = 0$ può pertanto essere sostituita per esempio da un'ipotesi di finitezza.

Tuttavia è meno naturale sostituire tale ipotesi conservando la validità della parte inversa del Teorema 2. Si consideri (12) l'anello generalizzato G il cui gruppo additivo è ciclico di ordine tre generato da un elemento u, in cui il prodotto di due elementi qualunque è u. Per esso è $m = n = 4$, ma G è (x, y)-distributivo, come subito si verifica, per tutte le coppie x, y tali che $xy = 3k + 1$ (k intero), ed *in particolare è* $(2, 2)$*-distributivo, anche se la coppia* $(2,2)$ *non può essere ottenuta mediante le* (6).

Possiamo tuttavia enunciare il:

Corollario 4. *Condizione necessaria e sufficiente perchè in un anello generalizzato finito G valga la tesi del teorema 2 è che ogniqualvolta G è (x, y)-distributivo, G sia anche $(x, 1)$ ed $(1, y)$-distributivo.*

Infatti dalla (3) e dalle II di [1] seguono le (6). Il resto è ovvio.

---

(11) Cfr. [1]; e si ricordi che 00 appartiene a $0G$.

(12) Esempio 1 di [1].

Osservazione. *La condizione del Corollario 4 non implica che sia* $00 = 0$. Tale condizione è infatti soddisfatta dall'anello generalizzato G il cui gruppo additivo G^+ è trirettangolo ed il cui semigruppo moltiplicativo G è un gruppo ciclico generato dall'elemento neutro di G^+. Allora $G \cdot 0 = 0 \cdot G = G$, si vede facilmente che G è $(3,1)$ - distributivo ed $(1,3)$ - distributivo, e dunque, per il Lemma 1, (x, y) - distributivo per tutti gli x, y dispari. Pertanto G soddisfa la condizione del Corollario 4 anche se $0 \cdot 0 \neq 0$.

Bibliografia.

[1] R. A. BEAUMONT, *Generalized rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 876-881.

[2] G. BERMAN and R. J. SILVERMAN, *Near-rings*, Amer. Math. Monthly 66 (1959), 23-34.

[3] D. BOCCIONI, *Caratterizzazione di una classe di anelli generalizzati*, Rend. Sem. Mat. Padova **35** (1965), 116-127.

[4] H. GONSHOR, *On abstract near-rings*, Pacific J. Math. **14** (1965), 1237-1240.

Summary.

In the theory of finite near-rings, everyabstract affine near-ring is a generalized ring of R. A. Beaumont, and conversely.

* * *