Riv. Mat. Univ. Parma (2) 7 (1966), 35-46

FRANCESCO SUCCI (*)

Alcune osservazioni sui teoremi di de Rham. (**)

1. - Introduzione.

1.1. – Sono ben noti i teoremi di DE RHAM sulle forme differenziali (reali) sopra una varietà nella loro formulazione originaria:

Teorema I. Esiste una forma chiusa su una varietà differenziabile, che ammette assegnati periodi sui cicli fondamentali.

Teorema II. Una forma chiusa che abbia tutti i periodi nulli è esatta.

È pure ben noto che, introdotta la coomologia delle forme o coomologia di DE RHAM (intendendosi per p-esimo $\boldsymbol{R}$-modulo di coomologia di DE RHAM quello costituito dalle classi delle p-forme chiuse modulo le p-forme esatte), i precedenti teoremi equivalgono al seguente, che nella letteratura più recente viene chiamato

Teorema di DE RHAM. La coomologia delle forme di una varietà differenziabile è isomorfa alla coomologia della varietà (l'isomorfismo riuscendo realizzabile mediante integrazione delle forme chiuse sui cicli).

È universalmente riconosciuta la fondamentale importanza nella matematica moderna di questo risultato che collega la struttura differenziabile di una varietà a quella topologica dello spazio sottogiacente. Basti pensare alle molteplici dimostrazioni che esso ha avuto e ai notevolissimi contributi che queste hanno originato in vari rami della matematica.

Riguardo alle dimostrazioni del teorema di DE RHAM ci limiteremo a ricordare che la primitiva dimostrazione di DE RHAM, valida per le varietà compatte, è stata successivamente estesa dallo stesso DE RHAM alle varietà non compatte (orientabili e non orientabili) (cfr. [2]). Un'altra dimostrazione, non meno generale, è basata sulla teoria dei fasci di J. LERAY ed H. CARTAN, ed

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Roma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 1 del C.N.R. — Ricevuto il giorno 7-VII-1966.

è stata originata da una dimostrazione che A. WEIL comunicò al CARTAN nel 1947 e che si trova riprodotta in [11]. Una esposizione della dimostrazione basata sui fasci può trovarsi in F. HIRZEBRUCH ([4]).

1.2. – Consideriamo ora in particolare l'estensione del teorema di DE RHAM al caso relativo, intendendo in generale per « teorema di DE RHAM relativo » un teorema di isomorfismo tra la coomologia relativa di una varietà *modulo* un suo sottospazio e la coomologia di DE RHAM delle forme differenziali *nulle* sul sottospazio.

Una estensione di questo tipo, che richiede la precisazione di talune proprietà del sottospazio che vi interviene, sembra sia stata considerata per la prima volta da A. W. TUCKER, che nel 1941 enunciò come congettura un teorema di DE RHAM relativo per varietà dotate di bordo. Questa congettura fu dimostrata più tardi da G. F. D. DUFF ([3]) per una varietà orientabile dotata di bordo regolare, estendendo la tecnica classica di DE RHAM e facendo uso dell'omologia relativa di LEFSCHETZ.

Le ipotesi di TUCKER-DUFF sono però troppo particolari e restrittive per alcune notevoli applicazioni del teorema di DE RHAM relativo. Invero J. LERAY, nello studio della teoria dei residui su una varietà complessa ha dovuto considerare il caso più generale in cui il sottospazio sia unione di un numero finito di sottovarietà in posizione generale ([5]).

In un recente lavoro ([8]) ho stabilito il teorema di DE RHAM relativo nel caso, ancor più generale, in cui il sottospazio sia chiuso e unione di un numero finito di varietà differenziabilmente immerse, anche non regolarmente, con ipotesi di contraibilità locale. La dimostrazione di questo risultato è ottenuta nella linea della dimostrazione del teorema di DE RHAM assoluto basata sulla teoria dei fasci.

1.3. – Nei §§ **I**, **II** ricostruiremo rapidamente la dimostrazione di J. LERAY con l'uso degli strumenti dell'algebra omologica e mostreremo che tale dimostrazione non sembra potersi estendere alle ipotesi più generali da me considerate in [8]. Un breve cenno della dimostrazione in queste ipotesi è dato nel n. **9**.

Infine nel § **IV** indicheremo come il raffronto dei risultati e dei procedimenti dimostrativi illustrati conduca ad una diversa generalizzazione, di tipo assoluto, del teorema di DE RHAM.

2. - Notazioni e definizioni.

2.1. – Indicheremo con M, X varietà differenziabili reali, di classe C^∞ e di dimensioni m, n rispettivamente ($m < n$).

Una applicazione differenziabile di classe C^∞

$$(2.1.1) \qquad f\colon \quad M \to X$$

si dice *regolare* se ha ovunque rango massimo.

Una applicazione regolare ed iniettiva si dirà una *immersione* (di M in X), mentre si dirà una *immersione locale* un'applicazione regolare non necessariamente iniettiva. Una immersione che sia un omeomorfismo sull'immagine si dirà una *immersione regolare*.

2.2. – Nel caso di una immersione locale, ogni punto $p \in M$ ha un intorno U in cui f è biunivoca; trasportando su $f(M)$ la topologia $\mathfrak{T}_M$ di M mediante f, $f(M)$ diviene una varietà C^∞-omeomorfa ad M, che indicheremo con $(f(M), \mathfrak{T}_M)$ e che chiameremo *varietà locale*, C^∞, in X (cfr. H. WHITNEY [**10**]). In generale la struttura topologica $\mathfrak{T}'_X$ indotta nel sottoinsieme $f(M)$ dalla struttura topologica $\mathfrak{T}_X$ di X non coincide con $\mathfrak{T}_M$ ed $(f(M), \mathfrak{T}'_X)$ non è una varietà.

Nel caso di una immersione diremo che $(f(M), \mathfrak{T}_M)$ è una *varietà immersa* in X.

Nel caso di una immersione regolare la struttura indotta $\mathfrak{T}'_X$ coincide con $\mathfrak{T}_M$ e $(f(M), \mathfrak{T}'_X)$ si dirà *varietà regolarmente immersa*, o semplicemente *sottovarietà* di X.

In tal caso ogni punto $y \in f(M)$ ha un intorno V in X tale che $f(M) \cap V$ è rappresentabile annullando una parte delle coordinate (locali) di X, di un opportuno sistema di origine y.

2.3. – Considereremo su una varietà le forme differenziali reali di classe C^∞. Le p-forme definite in un aperto U costituiscono un $\boldsymbol{R}$-modulo che indicheremo con $\Omega^p(U)$. Indicheremo poi con $\Omega^*(U)$ o $\{\Omega^p(U)\}$ il complesso delle forme di U, con l'operatore di differenziazione esterna d_U.

L'applicazione differenziabile (2.1.1) ossia $f\colon M \to X$ induce un omomorfismo trasposto:

$$(2.3.1) \qquad f^*\colon \quad \Omega^p(X) \to \Omega^p(M)$$

che è permutabile con l'operatore di differenziazione:

$$(2.3.2) \qquad f^*\,\mathrm{d}_X = \mathrm{d}_M\, f^*$$

e con i proiettori di $\Omega^*(X)$ e $\Omega^*(M)$, onde esso determina un omomorfismo di complessi:

$$(2.3.3) \qquad f^*: \quad \Omega^*(X) \to \Omega^*(M).$$

Se $\alpha^p(X) \in \Omega^p(X)$, la forma trasposta $f^* \alpha^p(X) \in \Omega^p(M)$ si dirà la *restrizione* di $\alpha^p(X)$ ad $f(M)$.

Se $f^* \alpha^p(X) = 0$ si dirà che $\alpha^p(X)$ è una forma di X *nulla su* $f(M)$.

2.4. – Nel caso di una immersione locale, ogni punto $p \in M$ possiede un intorno U in cui $f\,|_U$ è iniettiva (cfr. **2.2**) e quindi

$$(2.4.1) \qquad (f\,|_U)^*: \quad \Omega^*(X) \to \Omega^*(U) \quad \text{è surgettiva,}$$

ma non è altrettanto per f^*, anche nel caso in cui f è una immersione.

Se invece f è una immersione regolare, f^* è surgettiva, come può mostrarsi mediante una opportuna partizione C^∞ dell'unità.

Una sottovarietà $Y = (f(M), \mathfrak{T}'_Y)$ di X può quindi identificarsi con la varietà M.

2.5. – Siano $V_1, \ldots, V_k$ ($\dim V_i = n_i$, $1 \leqslant n_i \leqslant n-1$) sottovarietà di X; esse le diremo in *posizione generale* se per ogni punto $y \in V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_r}$ $(2 \leqslant r \leqslant k)$ si può trovare una carta di X con origine y nella quale $V_{i_1}, \ldots, V_{i_r}$ siano varietà coordinate (per esempio se $n_i = n-1$, $\forall i$, ciò equivale al fatto che le V_{i_s} abbiano in y iperpiani tangenti indipendenti entro lo spazio tangente ad X; J LERAY [5]).

§ I. - Il teorema di de Rham relativo per una sottovarietà.

Cominciamo ad esaminare il caso in cui il sottospazio Y della varietà X sia una sottovarietà (cfr. n. **2.2.**).

3. - Le successioni esatte di complessi.

3.1. – Nell'ipotesi attuale, l'iniezione i: $Y \to X$ induce un omomorfismo surgettivo i^*: $\Omega^*(X) \to \Omega^*(Y)$ (cfr. n. **2.4**). Indicato con $\Omega^*(X, Y) = \operatorname{Ker} i^*$ il sottocomplesso di $\Omega^*(X)$ costituito dagli $\boldsymbol{R}$-moduli $\Omega^p(X, Y)$ delle forme di X nulle su Y (con il differenziale indotto da d_X), si ha quindi la successione esatta di complessi di forme:

$$(3.1.1) \qquad 0 \to \Omega^*(X, Y) \to \Omega^*(X) \xrightarrow{i^*} \Omega^*(Y) \to 0\,.$$

3.2. – I simplessi singolari differenziabili C^∞ di X a supporto in Y si identificano ai simplessi singolari differenziabili C^∞ di Y. Indicato con $C_*(-) =$

$=\{C_p(—)\}$ il complesso delle catene singolari differenziabili di —, con l'operatore di passaggio al contorno ∂, l'iniezione $i\colon Y \to X$ induce una iniezione

(3.2.1) $$i_*\colon \quad C_p(Y) \to C_p(X)$$

la quale determina un omomorfismo di complessi:

(3.2.2) $$i_*\colon \quad C_*(Y) \to C_*(X).$$

Posto, al solito, $C_p(X)/C_p(Y) = C_p(X \bmod Y)$, si ha la nota successione esatta di complessi di catene (con gli operatori indotti):

(3.2.3) $$0 \to C_*(Y) \to C_*(X) \to C_*\,(X \bmod Y) \to 0\,.$$

3.3. – Poichè la successione esatta (3.2.3) si scinde come successione esatta di $\boldsymbol{R}$-moduli, cioè per ogni p si scinde la successione:

$$0 \to C_p(Y) \to C_p(X) \to C_p(X \bmod Y) \to 0\,,$$

applicando il funtore contravariante $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{R}}(—, \boldsymbol{R})$ si ottengono gli $\boldsymbol{R}$-moduli delle cocatene singolari (differenziabili) a valori reali $C^p(—) = \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{R}}(C_p(—), \boldsymbol{R})$; con l'operatore δ di cocontorno, tali $\boldsymbol{R}$-moduli costituiscono un complesso (di cocatene) $C^*(—) = \{C^p(—)\}$, e sussiste l'usuale successione esatta di complessi:

(3.3.1) $$0 \to C^*(X \bmod Y) \to C^*(X) \to C^*(Y) \to 0\,.$$

4. - Gli omomorfismi di complessi determinati dall'integrazione delle forme.

L'integrazione delle forme appartenenti ad $\Omega^p(—)$ sulle catene appartenenti a $C_p(—)$ definisce un'applicazione bilineare di $\Omega^p(—) \times C_p(—)$ in $\boldsymbol{R}$, e quindi un omomorfismo di $\boldsymbol{R}$-moduli di $\Omega^p(—)$ in $C^p(—)$. Si ottengono così gli omomorfismi:

$$J_1\colon\ \Omega^p(X) \to C^p(X), \qquad J_2\colon\ \Omega^p(Y) \to C^p(Y), \qquad J_3\colon\ \Omega^p(X,\ Y) \to C^p(X \bmod Y)\,.$$

Poichè questi omomorfismi commutano con gli operatori d e δ, essi inducono altrettanti omomorfismi di complessi:

$$J_h\colon \quad \Omega^*(—) \to C^*(—);$$

da (3.1.1), (3.3.1) si trae quindi il seguente diagramma a righe esatte:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^*(X, Y) \arrow[r] \arrow[d, "J_3"] & \Omega^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "J_1"] & \Omega^*(Y) \arrow[r] \arrow[d, "J_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & C^*(X \bmod Y) \arrow[r] & C^*(X) \arrow[r] & C^*(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.1}$$

il quale, come si prova facilmente, è *commutativo.*

Ciò si può anche esprimere dicendo che $J = (J_1, J_2, J_3)$ è un morfismo della categoria delle successioni esatte corte di complessi.

5. - Le successioni esatte di coomologia e il teorema di isomorfismo.

Le righe del diagramma (4.1) dànno luogo alle consuete successioni esatte di coomologia rispettivamente di DE RHAM e singolare, mentre gli omomorfismi J_h dànno luogo ad una successione di omomorfismi $\overline{J_h}$. Indicati come di consueto con $R^p(—)$ il p-esimo $\boldsymbol{R}$-modulo di coomologia di DE RHAM e con $H^p(—; \boldsymbol{R})$ il p-esimo $\boldsymbol{R}$-modulo di coomologia singolare (reale), si ha quindi il diagramma:

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & R^{p-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{J_1}"] & R^{p-1}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{J_2}"] & R^p(X, Y) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{J_3}"] & R^p(X) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{J_1}"] & R^p(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{J_2}"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & H^{p-1}(X) \arrow[r] & H^{p-1}(Y) \arrow[r] & H^p(X \bmod Y) \arrow[r] & H^p(X) \arrow[r] & H^p(Y) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

il quale è *commutativo*, come può provarsi facilmente con verifica diretta o come notoriamente discende dalle proposizioni sui funtori coomologici definiti sulla categoria delle successioni esatte corte di complessi.

Stabilito il diagramma (5.1) il teorema di DE RHAM per il caso relativo attuale consegue subito dal « lemma dei cinque » tenuto conto che $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ sono isomorfismi in virtù del teorema di DE RHAM assoluto applicato alle varietà X, Y.

Il teorema di dualità con l'omologia singolare segue immediatamente.

§ II. - Il teorema di de Rham relativo per una unione di sottovarietà.

Mostriamo ora come può provarsi il teorema di DE RHAM relativo nel caso che il sottospazio della varietà X sia unione di un numero finito di sottovarietà, in posizione generale (cfr. n. **2.5**).

6. - Un lemma fondamentale.

La dimostrazione del § **I** poggia essenzialmente sulla surgettività della restrizione alla sottovarietà Y delle forme di X. Per estendere il teorema al caso attuale occorre generalizzare opportunamente tale proprietà, mediante il seguente lemma:

Lemma 1. Se Y, Y_1, ..., Y_r *sono sottovarietà in posizione generale della varietà* X, *posto* $Y' = Y_1 \cup \ldots \cup Y_r$, *la restrizione ad* $\Omega^*(X, Y')$ *dell'omomorfismo* i^*: $\Omega^*(X) \to \Omega^*(Y)$, *è un omomorfismo surgettivo* j^*: $\Omega^*(X, Y') \to \Omega^*(Y, Y \cap Y')$.

Dimostrazione. Poichè le sottovarietà considerate sono in posizione generale, in ogni punto di $Y \cap Y'$ esse possono assumersi come varietà coordinate di un sistema di coordinate locali di X. Ne segue che ogni punto di X possiede un intorno V nel quale ogni forma di $\Omega^*(Y, Y \cap Y')$ è estendibile ad una forma di $\Omega^*(V, V \cap Y')$. Mediante una partizione C^∞ dell'unità, subordinata al ricoprimento $\{V\}$ di X, si perviene quindi al risultato.

Nel seguito $\Omega^*(Y, Y \cap Y')$ sarà indicato con $\Omega^*(Y, Y')$.

7. - Le successioni esatte.

Siano ora Y_1, ..., Y_k, dim $Y_j = n_j < n$, sottovarietà di X, in posizione generale. Posto $Y_1 \cup \ldots \cup Y_{k-1} = Y'$ e $Y_k = Y$, per il lemma precedente l'omomorfismo

$$j^*: \quad \Omega^*(X, Y') \to \Omega^*(Y, Y') \tag{7.1}$$

è surgettivo. Essendo $\operatorname{Ker} j^* = \Omega^*(X, Y \cup Y')$, ne segue la successione esatta di complessi:

$$0 \to \Omega^*(X, Y \cup Y') \to \Omega^*(X, Y') \to \Omega^*(Y, Y') \to 0 .$$

Considerazioni perfettamente analoghe a quelle svolte nel § I conducono allora al diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots \to & R^{p-1}(X, Y') & \to & R^{p-1}(Y, Y') & \to & R^p(X, Y \cup Y') & \to & R^p(X, Y') & \to & R^p(Y, Y') & \to \ldots \\
(7.2) & \downarrow \bar{J}_1 & & \downarrow \bar{J}_2 & & \downarrow \bar{J}_3 & & \downarrow \bar{J}_1 & & \downarrow \bar{J}_2 & \\
\ldots \to & H^{p-1}(X \bmod Y') & \to & H^{p-1}(Y \bmod Y') & \to & H^p(X \bmod Y \cup Y') & \to & H^p(X \bmod Y') & \to & H^p(Y \bmod Y') & \to \ldots .
\end{array}$$

Poichè, ovviamente, $Y \cap Y'$ è una unione di $k-1$ sottovarietà di Y, in posizione generale, dal diagramma (7.2), ammesso il teorema di DE RHAM relativo per l'unione di $k-1$ sottovarietà, consegue, in virtù del lemma dei cinque, il teorema per l'unione di k sottovarietà. Ciò porta al risultato voluto, poichè il primo passo dell'induzione ($k = 1$, $Y' = \varnothing$) è stato provato nel § **I**.

§ III. - Il teorema di de Rham relativo per situazioni più generali.

8. – Nella dimostrazione precedente giuocano in modo essenziale la validità del lemma del n. **6** e la possibilità di applicare il teorema assoluto di DE RHAM per due dei tre complessi di forme che si considerano. Se si indeboliscono le ipotesi sul sottospazio il lemma cade, come può provarsi con esempi (¹). Con una spontanea modificazione del significato di $\Omega^*(Y)$ si può però ripristinare la situazione assicurata dal lemma del n. **6** e quindi, scritta una successione esatta di complessi analoga alla (3.1.1), arrivare, con ovvie estensioni delle considerazioni già svolte, ad un diagramma commutativo a righe esatte del tipo (5.1). Viene però ora a cadere la possibilità di applicare il teorema di DE RHAM assoluto alla coomologia del complesso $\Omega^*(Y)$, poichè questo non è più il complesso delle forme differenziali di una varietà.

Da queste considerazioni appare come la linea della dimostrazione sviluppata nel § **II** non sembra si possa estendere a casi più generali di quello trattato.

9. – La dimostrazione del teorema di DE RHAM relativo, da me data in [**8**], vale nel caso che nella varietà X si consideri un sottospazio D verificante le seguenti ipotesi:

a) D è chiuso in X ed unione delle immagini $f_j(M_j)$ di k varietà differenziabili C^r, M_j, di dimensione $n_j < n$, mediante altrettante applicazioni differenziabili C^r, f_j: $M_j \to X$, non necessariamente ovunque regolari;

b) ogni punto $y \in D$ possiede, in X, un sistema fondamentale di intorni aperti $\{ V_i(y) \}$ tale che in ogni $V_i(y)$ esiste una contrazione differenziabile Φ_i, di classe C^r, di $V_i(y)$ al punto y, la quale contragga $D \cap V_i(y)$ ad y su se stesso, $\Phi_i(x, t)$, $\dfrac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ essendo di classe C^∞ rispetto ad $x \in V_i(y)$.

Un sottospazio D soddisfacente alle dette ipotesi lo diremo *sottospazio differenziabile* della varietà X.

Non ci soffermiamo qui a provare che le ipotesi di LERAY sono di fatto più restrittive (cfr. per questo [**8**]). Accenniamo soltanto che la dimostrazione del teorema si basa essenzialmente sulla prova del lemma di POINCARÉ per le forme nulle su D: ogni forma chiusa, nulla su D, è localmente il differenziale di una forma nulla su D. Tale risultato permette invero di asserire che i fasci di germi

---

(¹) Nel caso: X = piano euclideo $O(x, y)$, $Y = (x = t^2, y = t^3)$, la funzione t su Y non è restrizione di alcuna funzione $f(x, y)$ di X, poichè dovrebbe essere identicamente su Y: $f_x \cdot 2t + f_y \cdot 3t^2 = 1$ (cfr. [**1**]).

delle forme differenziali di X nulle su D costituiscono una risoluzione del fascio su X che si ottiene annullando su D il fascio costante dei reali. Poichè la risoluzione è fina (banalità globale), il risultato si consegue con una nota tecnica della teoria dei fasci.

§ IV. - Altro tipo di generalizzazione del teorema di de Rham.

Vogliamo mostrare ora che, una volta stabilito un teorema di DE RHAM relativo, nelle ipotesi del § **II** o nelle ipotesi più generali del n. **9**, si possono ottenere, mediante applicazione delle successioni esatte di complessi, dei teoremi di DE RHAM di tipo assoluto per certi complessi di forme, che, almeno in alcuni casi, si possono interpretare come i complessi delle forme su enti più generali delle varietà.

10. – Mantenendo le notazioni del n. **9**, supponiamo che le applicazioni f_i e le contrazioni Φ_i siano di classe C^∞. Diremo allora che D è un sottospazio differenziabile di classe C^∞. Posto:

$$M = \bigcup_i M_i, \qquad f = (f_1, \ldots, f_k)\,,$$

f è un'applicazione differenziabile C^∞ della varietà M in X, e induce un omomorfismo di complessi:

$$f^*: \quad \Omega^*(X) \to \Omega^*(M)\,.$$

Una forma di X si dirà « nulla su D » se essa appartiene a $\operatorname{Ker} f^*$, onde porremo $\operatorname{Ker} f^* = \Omega^*(X, D)$. Chiameremo poi *forma di X ristretta a D* o *forma di D* un elemento del quoziente $\Omega^p(X)/\Omega^p(X, D)$. Posto $\Omega^p(D) = \Omega^p(X)/\Omega^p(X, D)$, $\Omega^*(D) = \{\Omega^p(D)\}$ con il differenziale indotto da quello di $\Omega^*(X)$ è un complesso, isomorfo al sottocomplesso $\operatorname{Im} f^*$ di $\Omega^*(M)$. Si ha quindi la successione esatta di complessi:

$$0 \to \Omega^*(X, D) \to \Omega^*(X) \to \Omega^*(D) \to 0\,.$$

Le p-forme di D sono classi di forme del tipo $\alpha^p(X) + \Omega^p(X, D)$, con $\alpha^p(X) \in \Omega^p(X)$. Una p-forma di D è *chiusa* se $d\alpha^p(X) \in \Omega^p(X, D)$, è *esatta* se è restrizione di una forma esatta. La coomologia del complesso $\Omega^*(D)$ si dirà la « coomologia di DE RHAM di D ».

11. - I simplessi singolari (e differenziabili C^∞) di X a supporto in D li diremo ai simplessi singolari differenziabili di D (considerato come sottospazio di X). Si hanno quindi le consuete successioni esatte: dei complessi di catene (finite)

$$0 \to C_*(D) \to C_*(X) \to C_*(X \operatorname{mod} D) \to 0 ,$$

e dei complessi di cocatene (reali)

$$0 \to C^*(X \operatorname{mod} D) \to C^*(X) \to C^*(D) \to 0 .$$

12. - L'integrazione delle «forme di D» sulle catene di D definisce, come si vede subito, un omomorfismo di $\boldsymbol{R}$-moduli:

$$J_2: \quad \Omega^p(D) \to C^p(D),$$

il quale induce un omomorfismo di complessi J_2: $\Omega^*(D) \to C^*(D)$, risultando $\delta J_2 = J_2\, \mathrm{d}$. Si ha quindi il diagramma commutativo a righe esatte:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \Omega^*(X, D) & \to & \Omega^*(X) & \to & \Omega^*(D) & \to & 0 \\ & & \downarrow J_3 & & \downarrow J_1 & & \downarrow J_2 & & \\ 0 & \to & C^*(X \operatorname{mod} D) & \to & C^*(X) & \to & C^*(D) & \to & 0 , \end{array}$$

dal quale si trae, il diagramma:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots \to & R^{p-1}(X, D) & \to & R^{p-1}(X) & \to & R^{p-1}(D) & \to & R^p(X, D) & \to & R^p(X) & \to \ldots \\ & \downarrow \overline{J}_3 & & \downarrow \overline{J}_1 & & \downarrow \overline{J}_2 & & \downarrow \overline{J}_3 & & \downarrow \overline{J}_1 & \\ \ldots \to & H^{p-1}(X \operatorname{mod} D) & \to & H^{p-1}(X) & \to & H^{p-1}(D) & \to & H^p(X \operatorname{mod} D) & \to & H^p(X) & \to \ldots \end{array}$$

anch'esso commutativo e a righe esatte. Essendoci posti nelle ipotesi del n. **9**, $\overline{J}_3$ è un isomorfismo, onde per il lemma dei cinque lo è pure $\overline{J}_2$. Cioè: *la coomologia di de Rham di D è isomorfa alla coomologia singolare di D; l'isomorfismo realizzandosi mediante integrazione delle forme chiuse di D sui cicli singolari di D.*

13. - Nel caso in cui il sottospazio della varietà X è l'unione $\tilde{Y}$ di k sottovarietà $Y_1, \ldots, Y_k$ in posizione generale, possiamo definire direttamente una forma $\alpha^p(\tilde{Y})$ su $\tilde{Y}$ come una k-upla $(\alpha^p(Y_1), \ldots, \alpha^p(Y_k))$ di forme tali che le restrizioni alle intersezioni $Y_r \cap Y_s$ coincidano: $\alpha^p(Y_r)\,\big|_{Y_r \cap Y_s} = \alpha^p(Y_s)\,\big|_{Y_r \cap Y_s}$. Se $\Omega^*(\tilde{Y})$ è il complesso delle forme su $\tilde{Y}$ così definite, posto $i = (i_1, \ldots, i_k)$ dove i_r: $Y_r \to X$ $(r = 1, \ldots, k)$, si ha il

Lemma 2. *L'omomorfismo* i^*: $\Omega^*(X) \to \Omega^*(\tilde{Y})$ *è surgettivo.*

Dimostrazione. Sia invero $\alpha^p(\tilde{Y}) = (\alpha^p(Y_1), \ldots, \alpha^p(Y_k))$. Poichè Y_1 è una sottovarietà di X, $\alpha^p(Y_1)$ si può estendere ad una forma $\alpha_1^p(X)$. Tutte le possibili estensioni costituiscono $\alpha_1^p(X) + \Omega^p(X, Y_1)$. Posto $\alpha^p(Y_2) - \alpha_1^p(X)|_{Y_2} = \beta_1^p(Y_2)$, è $\beta_1^p(Y_2) \in \Omega^p(Y_2, Y_1)$; per il Lemma 1 (n. **6**) essa si estende ad una forma $\beta_1^p(X, Y_1)$ e tutte le possibili estensioni costituiscono $\beta_1^p(X, Y_1) + \Omega^p(X, Y_1 \cup Y_2)$. Ne segue che $\alpha_1^p(X) + \beta_1^p(X, Y_1) + \Omega^p(X, Y_1 \cup Y_2)$ induce $\alpha^p(Y_1)$, $\alpha^p(Y_2)$ rispettivamente su Y_1, Y_2.

Posto $\alpha^p(Y_3) - \alpha_1^p(X)|_{Y_3} - \beta_1^p(X, Y_1)|_{Y_3} = \beta_2^p(Y_3, Y_1)$, è $\beta_2^p(Y_3, Y_1) \in \Omega^p(Y_3, Y_1 \cup Y_2)$ e può estendersi ad una forma $\beta_2^p(X, Y_1 \cup Y_2)$. Tutte le estensioni possibili costituiscono $\beta_2^p(X, Y_1 \cup Y_2) + \Omega^p(X, Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3)$. Pertanto $\alpha_1^p(X) + \beta_1^p(X, Y_1) + \beta_2^p(X, Y_1 \cup Y_2) + \Omega^p(X, Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3)$ induce $\alpha^p(Y_1)$, $\alpha^p(Y_2)$, $\alpha^p(Y_3)$ ordinatamente su Y_1, Y_2, Y_3. È chiaro ormai come proseguire per giungere al risultato.

Ciò posto, se $Y_r = f_r(M_r)$ (cfr. n. **2**), $\tilde{Y}$ si può identificare alla « pseudovarietà » $\tilde{M}$ che si ottiene da $\bigcup_{j=1}^{k} M_j$ identificando i punti di $f_r^{-1}(Y_r \cap Y_s)$ (= sottovarietà di $\tilde{M}_r$) con i corrispondenti punti di $f_s^{-1}(Y_r \cap Y_s)$ (= sottovarietà di M_s). Il risultato del n. **12** stabilisce allora, in particolare, un teorema di DE RHAM (assoluto) per $\tilde{M}$.

Bibliografia.

[1] A. ANDREOTTI, *Calcolo delle variazioni. Teoria di Morse*, Pisa 1961, *Seminario E. E. Levi*, Pisa 1962.

[2] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris 1955.

[3] G. F. D. DUFF, *Differential forms in manifolds with boundary*. Ann. of Math. (2) **56** (1952), 115-127.

[4] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*, Ergebnisse der Mathematik, Springer, Berlin 1956.

[5] J. LERAY, *Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe. Problème de Cauchy* (III), Bull. Soc. Math. France **87** (1959), 81-180.

[6] S. MAC LANE, *Homology*, Springer, Berlin 1963.

[7] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali* (I, II), Ediz. Univ. « Docet », Roma 1956-1957.

[8] F. SUCCI, *Il teorema di de Rham e la dualità per le varietà relative*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **35** (1963), 496-503.

[9] F. SUCCI, *Realizzazione dell'isomorfismo di de Rham per le varietà relative*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 38 (1965), 639-644.

[10] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. (2) 37 (1936), 645-680.

[11] A. WEIL, *Sur les théorèmes de de Rham*, Comment. Math. Helv. 26 (1952), 119-145.

Riassunto.

Una prima parte di questo lavoro riproduce una conferenza tenuta il 31-III-1965 *all'Istituto Matematico dell'Università di Parma, presentando un raffronto fra varii metodi con i quali si può giungere a dimostrazioni dei teoremi di de Rham «nel caso relativo» in ipotesi più o meno generali. Una seconda parte del lavoro contiene un altro tipo di generalizzazione del teorema di de Rham «assoluto» con riguardo a certi «sottospazi differenziabili», generalizzazione che è suggerita dalla considerazione del caso «relativo» e che forse non è di per sè priva di interesse.*

Summary.

In a first part of this paper is contained a lecture held the 31st march 1965 at the Institute of Mathematics of the University of Parma. In this part a comparison is given between several methods with which it is possible give proofs of the de Rham's theorem in the relative case, under hypothesis moie or less general. A second part of the paper contains a generalization of the de Rham's theorem «absolute»: it is extended to some «differentiable spaces» more general than manifolds.

* * *