

LUIGI CAPRIOLI (*)

Su alcuni sistemi non lineari retti da equazioni del terzo e quinto ordine. (**)

1. - Fra i generatori elettronici autoeccitati di comune impiego nella Tecnica, hanno un posto di notevole importanza i cosiddetti oscillatori *a resistenza-capacità*, caratterizzati dal fatto che il periodo delle oscillazioni autoeccitate di cui essi sono sede non dipende, come in altri oscillatori, dal periodo proprio d'un circuito oscillante; ma, invece, dalle costanti di tempo di sistemi resistenza-capacità (od anche, talvolta, resistenza induttanza ⁽¹⁾). I primi studi in proposito risalgono, a quanto è dato qui di conoscere, a J. VAN DER MARK e B. VAN DER POL ⁽²⁾; e si trova in essi un primo accenno ad una particolare classe di tali oscillatori (detti anche « a sfasamento »: phase-shift oscillators ⁽³⁾), che risultano di assai proficuo impiego per certi loro requisiti (attitudine a buona stabilizzazione della frequenza, bassa percentuale di armoniche).

Ora, su questi oscillatori, esiste oggi una copiosa bibliografia tecnica ⁽⁴⁾, nella

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 10-XI-1966.

⁽¹⁾ In altre parole, delle due grandezze « reattive », induttanza e capacità, soltanto una è determinante, in questi circuiti, per il valore della frequenza dell'oscillazione.

⁽²⁾ J. VAN DER MARK e B. VAN DER POL, « The Production of sinusoidal oscillations with a time-period determined by a relaxation-time », *Physica Acta*, 1934, I, p. 437. Gli AA. di questo lavoro citano, fra l'altro, per un circuito a tre stadi oggetto del loro studio, un brevetto di BRILLOUIN e BEAUVAIS (1928); cfr. anche, a tale proposito, A. TANK e H. GRAF, *Helv. Phys. Acta*, 1, 1928, p. 508. Numerose altre ricerche sono seguite poi: citiamo, fra queste, G. FRANCINI, « Oscillatori resistenza e capacità », *Alta Frequenza*, XIII, 1, 1944, p. 5. Per notizie di carattere più generale si veda, ad es., il volume di T. S. GRAY, « *Princ. of Electr. eng. series, Appl. Electronics* », J. Whil., N. Y., 1955, p. 682.

⁽³⁾ J. VAN DER MARK e B. VAN DER POL, op. cit.; p. 445.

⁽⁴⁾ Cfr., ad es., E. L. GINZTON e L. M. HOLLINGSWORTH, « Phase-Shift oscillators », *P. I. R. E.*, 1941, p. 43. G. R. GAMERTSFELDER e J. V. HOLDAM « Sinusoidal Wave-form generators », p. 110 del volume: « *Waveforms* », n. 19 *Rad. Lab. Series*, Mc. Graw Hill, 1949.

A. W. GILLIES, (I), « The Application of power series to the solution of non linear circuit problems », *P. I. R. E.*, 96, III, 1949, p. 453. (II), « The periodic solutions of the differential equation of a resistance-capacitance oscillator », *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, X, I, 1957, p. 101.

Ora, con evidente significato dei simboli (cfr. la Figura 1), è:

$$(2) \quad i_c = i + i_a,$$

dove la corrente anodica del triodo:

$$(3) \quad i_a = f(V_a + \mu V_g)$$

è funzione non lineare della tensione globale $V_a + \mu V_g$ del tubo. Ed è facile verificare che fra le tensioni d'entrata e_a e d'uscita e_g del quadripolo (r, c) d'accoppiamento fra i circuiti d'anodo e di griglia, sussiste la relazione differenziale:

$$(4) \quad \ddot{e}_a = \ddot{e}_g + \frac{6}{rc} \dot{e}_g + \frac{5}{(rc)^2} e_g + \frac{1}{(rc)^3} e_g \quad (7),$$

che caratterizza il circuito (r, c) ; mentre le stesse grandezze e_a , e_g risultano legate alla corrente:

$$(5) \quad i = i_1 + i_2 + i_3$$

(7) Sussistono, infatti per la rete (r, c) le equazioni:

$$(a) \quad e_a - \frac{1}{c} \int (i_1 + i_2 + i_3) dt - ri_1 = 0,$$

$$(b) \quad i_3 = \frac{1}{r} e_g, \quad ri_2 - \frac{1}{c} \int i_3 dt - ri_3 = 0, \quad ri_1 - \frac{1}{c} \int (i_2 + i_3) dt - ri_2 = 0.$$

Ora, da queste ultime si ha:

$$(c) \quad i_2 = \frac{1}{rc} \int i_3 dt + i_3 = \frac{1}{r^2c} \int e_g dt + \frac{1}{r} e_g,$$

$$(d) \quad i_1 = \frac{1}{rc} \int (i_2 + i_3) dt + i_2.$$

Derivando tre volte (a) e sostituendo al posto delle derivate $\ddot{i}_1, \ddot{i}_2, \ddot{i}_3, \ddot{i}_1$ le espressioni ottenute derivando quanto occorre le (b), (c), (d), si ottiene la (4) del testo.

dall'altra relazione:

$$(6) \quad \ddot{e}_g = \ddot{e}_a + \frac{3}{rc} \dot{e}_a + \frac{1}{(rc)^2} e_a - \left[\frac{3}{c} \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{4}{rc^2} \frac{di}{dt} + \frac{1}{r^2 c^3} i \right] \quad (8).$$

Osserviamo, inoltre, che dall'ovvia relazione:

$$(7) \quad E_{a0} - Ri_c - V_a = 0$$

e dalla (1) segue subito che è:

$$(8) \quad V_a = e_a - E_{g0}, \quad i_c = \frac{1}{R} (E_{a0} + E_{g0} - e_a),$$

sicchè risulta (cfr. anche la (2)):

$$(9) \quad i = i_c - i_a = \frac{1}{R} (E_{a0} + E_{g0} - e_a) - i_a, \quad \frac{di}{dt} = -\frac{1}{R} \dot{e}_a - \frac{di_a}{dt},$$

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{1}{R} \ddot{e}_a - \frac{d^2 i_a}{dt^2}.$$

Confrontando le (6), (4) e tenendo conto delle (9), si ha così l'equazione:

$$(10) \quad \frac{6}{rc} \ddot{e}_g + \frac{5}{(rc)^2} \dot{e}_g + \frac{1}{(rc)^3} e_g + \frac{3}{c} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{R} \right) \ddot{e}_a + \frac{1}{rc^2} \left(\frac{1}{r} + \frac{4}{R} \right) \dot{e}_a + \frac{1}{Rr^2 c^3} e_a +$$

$$+ \frac{3}{c} \frac{d^2 i_a}{dt^2} + \frac{4}{rc^2} \frac{di_a}{dt} + \frac{1}{r^2 c^3} i_a - \frac{E_{a0} + E_{g0}}{Rr^2 c^3} = 0,$$

(8) Cui si può pervenire, ad es., eliminando le correnti i_1 , i_2 dalle relazioni (della rete (r, c) alimentata dalla corrente i):

$$(e) \quad e_a - \frac{1}{c} \left[\int i dt + \int (i - i_1) dt + \int (i - i_1 - i_2) dt \right] - e_g = 0,$$

$$(f) \quad i_1 = \frac{1}{r} \left[e_a - \frac{1}{c} \int i dt \right], \quad i_2 = i_1 - \frac{1}{rc} \int (i - i_1) dt,$$

e dalle loro conseguenze differenziali: infatti, derivando tre volte la (e) e sostituendovi al posto delle derivate di i_1 , i_2 le espressioni ottenute derivando du volte la (f), si ha subito la (6) del testo.

nella quale la corrente anodica i_a , funzione della tensione globale $V_a + \mu V_g$ del tubo, può esprimersi in funzione delle grandezze e_a, e_g : infatti, per la prima delle (8) e per la analoga $V_g = e_g - E_{g0}$ (cfr. la Figura 1), risulta $V_a + \mu V_g = e_a + \mu e_g - (1 + \mu)E_{g0}$; sicchè, detti $V_0 = V_{a0} + \mu V_{g0}$ il valore costante che le tensione globale assume in assenza di oscillazioni, $i_{a0} = f(V_0)$ il valore, anch'esso costante, della corrente anodica nelle stesse condizioni, i_{c0} il valore della corrente nel carico e, infine, $e_{a0} = \text{cost.}$, $e_{g0} = 0$ quelli di e_a, e_g , rispettivamente, risulta allora $i = 0$, cioè $i_{c0} = i_{a0}$; ed anche:

$$e_{a0} = E_{a0} - Ri_{a0} + E_{g0}, \quad V_{a0} = E_{a0} - Ri_{a0}, \quad V_{g0} = -E_{g0};$$

la caratteristica (3) del tubo può scriversi pertanto nella forma:

$$(3') \quad i_a = f(V_a + \mu V_g) \equiv f(V) = f(V_0) + \Phi(V - V_0) = i_{a0} + \Phi(x),$$

dove $\Phi(x)$ è una funzione non lineare dell'argomento:

$$x = V - V_0 = V_a + \mu V_g - (V_{a0} + \mu V_{g0}) = e_a + \mu e_g - e_{a0},$$

che assumeremo qui come funzione incognita in luogo della e_a . Le equazioni (4), (10) si scrivono allora, rispettivamente,

$$(11) \quad m\theta^2 \ddot{e} + n\theta \dot{e} + pe = \theta^3 \psi(x, \dot{x}, \dots, \overset{\vee}{x}),$$

$$(12) \quad (\mu + 1)\theta^3 \dddot{e} + 6\theta^2 \ddot{e} + 5\theta \dot{e} + e = \theta^3 \ddot{x},$$

dove s'è posto, per brevità, e in luogo di e_g ; ed anche:

$$(13) \quad \theta = rc, \quad \varrho = \frac{r}{R},$$

$$(14) \quad m = 6 - 3\mu(1 + \varrho), \quad n = 5 - \mu(1 + 4\varrho), \quad p = 1 - \mu\varrho,$$

$$(15) \quad -\psi(x, \dot{x}, \dots, \overset{\vee}{x}) = 3\theta^{-1}(1 + \varrho)\ddot{x} + \theta^{-2}(1 + 4\varrho)\dot{x} + \theta^{-3}\varrho x + \\ + 3r\theta^{-1}\ddot{\Phi}(x) + 4r\theta^{-2}\dot{\Phi}(x) + r\theta^{-3}\Phi(x).$$

Dal sistema (11), (12), evidentemente del quinto ordine nelle funzioni incognite $e(t), x(t)$, può dedursi un'equazione del quint'ordine nella sola incognita $x(t)$: basta, a tale scopo, eliminare le sei funzioni $e, \dot{e}, \ddot{e}, \dot{x}, \ddot{x}, \overset{\vee}{x}$ fra le sette

equazioni, lineari nelle funzioni stesse,

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} m\theta^2\ddot{e} + n\theta\dot{e} + pe = \theta^3\psi \\ m\theta^2\ddot{e} + n\theta\dot{e} + pe = \theta^3\dot{\psi} \\ m\theta^2\overset{\text{IV}}{e} + n\theta\ddot{e} + p\ddot{e} = \theta^3\ddot{\psi} \\ m\theta^2\overset{\text{V}}{e} + n\theta\overset{\text{IV}}{e} + p\overset{\text{III}}{e} = \theta^3\overset{\text{III}}{\psi} \\ (\mu + 1)\theta^3\overset{\text{III}}{e} + 6\theta^2\ddot{e} + 5\theta\dot{e} + e = \theta^3\overset{\text{III}}{x} \\ (\mu + 1)\theta^3\overset{\text{IV}}{e} + 6\theta^2\overset{\text{III}}{e} + 5\theta\ddot{e} + \dot{e} = \theta^3\overset{\text{IV}}{x} \\ (\mu + 1)\theta^3\overset{\text{V}}{e} + 6\theta^2\overset{\text{IV}}{e} + 5\theta\overset{\text{III}}{e} + \ddot{e} = \theta^3\overset{\text{V}}{x} \end{array} \right.$$

Amnesso ora che la funzione $\varphi(x)$ sia della forma:

$$(17) \quad \varphi(x) = gx + hx^3 = x(g + hx^2),$$

(il che equivale a supporre, con VAN DER POL, che il punto di riposo i_{a0} , $V_{a0} + V_{s0}$, sia preso in corrispondenza del flesso della caratteristica globale del tubo), l'espressione della funzione $\psi(x, \overset{\text{V}}{x}, \dots, \overset{\text{V}}{x})$ si scrive:

$$(18) \quad -\psi(x, \overset{\text{V}}{x}, \dots, \overset{\text{V}}{x}) = F\theta^{-1}\overset{\text{III}}{x} + G\theta^{-2}\overset{\text{IV}}{x} + H\theta^{-3}x + hX,$$

ove s'intenda posto:

$$(19) \quad F = 3(1 + H), \quad G = 1 + 4H, \quad H = \rho + rg,$$

$$(20) \quad X = r\theta^{-1} \left[9 \frac{d}{dt} (x^2\dot{x}) + 12\theta^{-1}x^2\dot{x} + \theta^{-2}x^3 \right],$$

la ψ appare così somma di una parte lineare e di una non lineare, la hX , nella funzione incognita $x(t)$ e nelle sue derivate prima e seconda.

Sussistono ancora, per il circuito di Fig. 2 (il cui comportamento qualitativo l'esperienza rivela molto simile a quello del circuito precedente), le relazioni (1), (2), (4), (5), (7), (8), (9); mentre, in luogo della (3), ammetteremo valida,

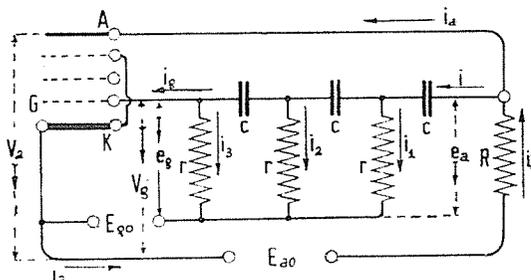


Fig. 2.

come s'è or ora accennato, la relazione:

$$(22) \quad i_a = f(V_a),$$

od anche (cfr. la (3')) l'altra:

$$(23) \quad i_a = i_{a0} + \varphi(V_a - V_{a0}) = i_{a0} + \Phi(e_g),$$

nella quale si sono indicati con i_{a0} , $V_{a0} = -E_{g0}$ i valori « a riposo » della corrente anodica e della tensione di griglia; e si è tenuto conto, inoltre, dell'ovvia relazione $V_a - V_{a0} = V_a + E_{g0} = e_g$. Dal confronto delle (1), (23) segue subito che è $i_c - i = i_{a0} + \Phi(e_g)$; ed anche, ricordando le (8),

$$(24) \quad \frac{1}{R} (E_{a0} + E_{g0}) - \frac{1}{R} e_a - i = i_{a0} + \Phi(e_g).$$

Se assumiamo ora come funzione incognita la e_g , l'eliminazione delle funzioni e_a , i si presenta qui assai più semplice che nel caso precedente: si osservi, infatti, che la (4) esprime e_a come funzione della sola e_g e derivate; e che, per il circuito in esame, sussistono le relazioni:

$$(25) \quad i_3 = \frac{1}{r} e_g, \quad \frac{di_2}{dt} = \frac{1}{r} e_g + \frac{1}{r^2 c} e_g, \quad \frac{d^2 i_1}{dt^2} = \frac{1}{r} e_g + \frac{3}{r^2 c} e_g + \frac{1}{r^3 c^2} e_g \quad (11).$$

(11) È infatti:

$$i_2 = \frac{1}{r} e_g + \frac{1}{rc} \int i_3 dt, \quad i_1 = i_2 + \frac{1}{rc} (i_2 + i_3) dt,$$

da cui, con semplici calcoli, la relazione del testo.

Basta ora derivare tre volte la (24) e la prima delle (25); due ed una volta, rispettivamente, la seconda e l'ultima delle (25), per ottenere l'equazione, nella sola e_g :

$$(26) \quad \left(\frac{1}{R} + \frac{3}{r}\right) \overset{\dots}{e}_g + \frac{1}{rc} \left(\frac{1}{R} + \frac{4}{r}\right) \overset{\cdot\cdot}{e}_g + \frac{1}{(rc)^2} \left(\frac{5}{R} + \frac{1}{r}\right) \overset{\cdot}{e}_g + \frac{1}{R(rc)^3} e_g + \Phi(e_g) = 0.$$

Se, infine, in analogia con quanto abbiamo già ammesso nel n. prec., supponiamo che sia:

$$(27) \quad \varphi(e_g) = ge_g + he_g^3 \text{ (12)},$$

e poniamo, inoltre,

$$(28) \quad e_g(t) = z(t),$$

$$(29) \quad M = \frac{1}{R} + \frac{3}{r} + g, \quad N = \frac{1}{rc} \left(\frac{1}{R} + \frac{4}{r}\right), \quad P = \frac{1}{(rc)^2} \left(\frac{5}{R} + \frac{1}{r}\right), \quad Q = \frac{1}{R(rc)^3},$$

l'equazione del circuito di Fig. 2 si scrive nella forma:

$$(30) \quad Mz \overset{\dots}{} + Nz \overset{\cdot\cdot}{} + Pz \overset{\cdot}{} + Qz + h \frac{d^3}{dt^3} z^3 = 0,$$

che si presta ad un esame abbastanza semplice e proficuo dello oscillatore di Fig. 2 (13). Vale però la pena osservare, anzitutto, che, nella (30), il coefficiente

(12) Le grandezze g , h che figurano nella (27) non vanno ovviamente confuse con le analoghe della (17).

(13) Va osservato, qui, che nel caso più generale in cui il quadripolo (r, c) del circuito

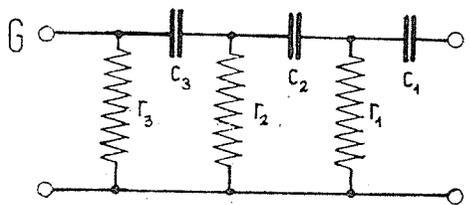


Fig. 3.

di Fig. 2 sia sostituito con quello qui sopra indicato (Fig. 3), in cui sono diverse le resistenze r_1 , r_2 , r_3 e le capacità c_1 , c_2 , c_3 , sussistono ancora, ovviamente, i risultati

M del termine d'ordine massimo Mz , non dipende (come, invece, spesso si verifica per equazioni del terz'ordine relative ad altri tipi di oscillatori autoeccitati ⁽¹⁴⁾) dal coefficiente h che condiziona la non linearità dell'equazione ⁽¹⁵⁾.

4. - In vista dello studio che ci proponiamo di farne, conviene scrivere la (30) in una forma adimensionale. A tale scopo, assumiamo, intanto, in luogo della t , la variabile indipendente adimensionale:

$$(31) \quad \tau = \omega_0 t, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{Q}{N}},$$

con che la (30) assume la forma:

$$(32) \quad \ddot{z} + z + \frac{P}{N\omega_0} \left\{ \dot{z} + \frac{\omega_0^2}{P} \frac{d^3}{d\tau^3} \left[Mz \left(1 + \frac{h}{M} z^2 \right) \right] \right\} = 0,$$

del testo; e in particolare, un'equazione come la (30), nella quale è però da porre:

$$M = \frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + g,$$

$$N = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{r_1 c_1} + \frac{1}{r_2 c_1} + \frac{1}{r_3 c_1} + \frac{1}{c_2 r_2} + \frac{1}{c_2 r_3} + \frac{1}{c_3 r_3} \right] + \frac{1}{r_1 r_3} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} \right) + \frac{1}{r_1 r_2 c_2} + \frac{1}{r_2 r_3 c_3},$$

$$P = \frac{1}{R} \left[\frac{1}{r_1 c_1} \left(\frac{1}{r_3 c_3} + \frac{1}{r_2 c_2} + \frac{1}{r_3 c_2} \right) + \frac{1}{r_1 r_3 c_1 c_3} + \frac{1}{r_1 r_2 r_3 c_2 c_3} \right] \frac{1}{r_1 r_2 r_3 c_2 c_3},$$

$$Q = \frac{1}{R r_1 r_2 r_3 c_1 c_2 c_3}.$$

⁽¹⁴⁾ Ad equazioni del terz'ordine debolmente non lineari e con termine di ordine massimo di valore finito (cioè non affetto dal piccolo coefficiente che caratterizza la debole non linearità) si perviene anche nello studio di oscillatori a induttanza-capacità, nei quali sia sufficientemente piccolo il coefficiente d'accoppiamento fra i circuiti di anodo e di griglia (cfr. a tale proposito: L. L. RAUCH, « Oscillation of a third order nonlinear auton. Systems », *Contrib. to theor. of non-lin. Oscill.*; S. LEFSCHETZ, *Ann. of Math. Stud.*, no 20, Princ. Univ. Press., 1950. G. COLOMBO, « Sull'equaz. diff. non lineare del terz'ordine di un oscill. triodico », *Rend. Sem. Mat. Padova*, 1960, p. 114. CHIN YUAN-SHUN, « Oscillations of a third order non linear system », *Science Record*, N. S., III, 6, 1959. L. CAPRIOLI, « Su alcuni sistemi non lineari retti da equazioni del terz'ordine » *Acc. Scienze, Modena*, VI, III, 1961, A. U. GARIBALDI, « Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari in due gradi di libertà », *Riv. Mat. Univ. Parma* (2) 4 (1963), 167-189.

⁽¹⁵⁾ Per un pentodo della Tecnica (Philips EF86) risulta, ad es., $g \cong 3 \cdot 10^{-3} (ohm)^{-1}$, $h = -3 \cdot 10^{-5} (ohm)^{-1} \cdot (volt)^{-2}$; e, in casi sperimentali (cfr. E. L. GINZTON, op. cit.), si ha $M \cong 3 \cdot 10^{-3} (ohm)^{-1}$.

dove con z è ancora denotata la derivata rispetto alla variabile τ . Assunta inoltre come funzione incognita, in luogo della $z(\tau)$, la quantità (pure adimensionale):

$$(33) \quad y = \sqrt{\frac{|h|}{M}} z,$$

e posto:

$$(34) \quad \alpha = \frac{P}{\omega_0^2 N}, \quad \beta = \frac{MQ}{NP} \quad (16)$$

all'equazione qui in esame può darsi la forma:

$$(35) \quad \ddot{y} + y + \alpha \left\{ \dot{y} + \frac{d^3}{d\tau^3} [y(1 + y^2 \operatorname{sign} h)] \right\} = 0,$$

ove, con notazione consueta, si è scritto $|h| \operatorname{sign} h$ in luogo di h .

Ora, nei casi concreti di maggiore interesse, la costante h è negativa (17); sicchè, per questi, la (35) assume la forma:

$$(36) \quad \ddot{y} + y + \alpha \dot{y} + \alpha \beta \frac{d^3}{d\tau^3} (y - y^3) = 0,$$

palesamente più idonea della (30) allo studio, anche soltanto qualitativo, delle proprietà del sistema qui in esame; e, in particolare, della ricerca di limitazioni superiori per la pulsazione e per le armoniche d'ordine superiore d'una soluzione periodica, della quale ammetteremo, qui, per ipotesi, l'esistenza.

A proposito del problema esistenziale, ci limitiamo qui ad osservare che un sistema del tipo:

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = \frac{u}{\beta(1-3y^2)} \\ \dot{u} = w \\ -\alpha w = \frac{\beta(1-3y^2)^2 w + 6yu^2}{\beta^2(1-3y^2)^3} + y + \frac{\alpha u}{\beta(1-3y^2)}, \end{array} \right.$$

(16) Le quantità α , β , manifestamente adimensionali, possono raggiungere, nei casi concreti, ordini di grandezza delle unità ed anche di qualche decina. Nel caso del circuito di Fig. 2, con rete (r , c) del tipo di Fig. 3, e con parametri: $R = 0,33 \cdot 10^5$, $r_1 = 0,47 \cdot 10^{-5}$, $r_2 = r_3 = 10^5 \text{ ohm}$; $c_1 = 2 \cdot 10^2$, $c_2 = 1,5 \cdot 10^2$, $c_3 = 10^2 \mu\mu F$; $g = 5 \cdot 10^{-3} \text{ ohm}^{-1}$, $h = -8 \cdot 10^5$, $\text{ohm}^{-1} \text{ volt}^2$ (pentodo 6SH7) risulta $\alpha \cong 2$, $\beta \cong 4$.

(17) Cfr. la prec. annotazione (15).

equivalente alla (36), può farsi rientrare, salvo alcune riserve, in una classe di sistemi dotati di una soluzione periodica stabile (o semistabile) ⁽¹⁸⁾. Senza entrare qui nel merito di tali riserve (non ultime fra le quali, la non regolarità delle espressioni a secondo membro nelle (37); ed il fatto che la costante α può

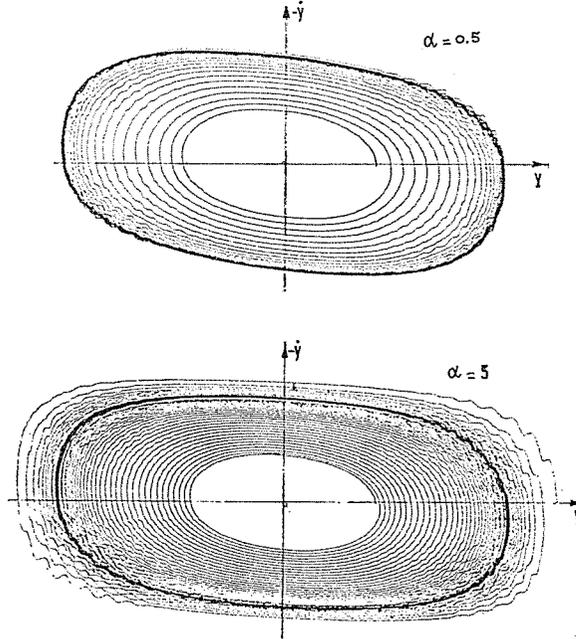


Fig. 4 a), b).

avere in pratica valori anche relativamente grandi rispetto all'unità), che costituiranno, insieme allo studio delle caratteristiche del sistema (37), oggetto di altra ricerca, noi ammettiamo qui l'esistenza di una soluzione periodica $y(\tau)$ della (36), di pulsazione fondamentale k (cioè di periodo $T = \frac{2\pi}{k}$); e ciò in buon accordo, oltre che con l'esperienza abituale, anche con i risultati di uno studio analogico della (36) (alcuni dei quali sono riportati nelle Figg. 4 a), b)) ⁽¹⁹⁾. Appare evidente, da questi, oltre che la instabilità dell'origine (s'intende per i

⁽¹⁸⁾ Cfr. A. HALANAY, « Perturbations singulières des systèmes autonomes » Rend. Acc. Lincei, XXII, 1962, p. 167. V. V. NIEMITZCHI, « Metodo della funzione rotatoria di LIAPOUNOFF per la ricerca di regimi oscillatori », Dokl. Akad. Nauk, XCVII, 1, 1954, p. 33.

⁽¹⁹⁾ Per tale studio, eseguito presso il Centro Calcoli e Servomeccanismi della Facoltà d'Ingegneria di Bologna, l'A. ringrazia qui, sentitamente, il Prof. ing. E. BELARDINELLI e l'ing. C. BONIVENTO.

valori dei parametri che qui interessano), anche la presenza d'un ciclo limite stabile. E ciò, anche per valori relativamente grandi dei parametri che condizionano la non linearità dell'equazione (36). Appare evidente, inoltre, l'aspetto sensibilmente ellittico del ciclo limite, cioè la buona approssimazione alla sinusoidalità della soluzione periodica.

5. - Le limitazioni per la pulsazione k e per le ampiezze della fondamentale e della terza armonica, cui si è accennato più sopra, possono determinarsi con un noto procedimento ⁽²⁰⁾ e valendosi di un artificio segnalato da D. GRAFFI; e si può provare che tali limitazioni sussistono anche per le soluzioni periodiche della equazione:

$$(38) \quad \ddot{y} + y + \alpha y + \frac{d^3}{d\tau^3} [f(y)] = 0,$$

evidentemente più generale della (36), in quanto atta a descrivere un circuito del tipo di Fig. 2, nel quale però la caratteristica $\mathcal{D}(x)$ dell'elemento non lineare sia più generale di quella di VAN DER POL, da noi qui ammessa (cfr. la relazione (3')) ⁽²¹⁾.

A tale scopo, cominciamo con l'osservare che la soluzione periodica $y(\tau)$ di cui s'è ammessa l'esistenza, ha necessariamente nulla la media a_0 nel periodo T ; si ha cioè:

$$(39) \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T y(\tau) d\tau = 0,$$

come risulta immediatamente integrando la (38) nel periodo T ⁽²²⁾; sicchè la soluzione $y(\tau)$ può esprimersi mediante la serie:

$$(40) \quad y(\tau) = \sum_1^{\infty} A_n \cos(nk\tau + \gamma_n).$$

⁽²⁰⁾ Cfr. D. GRAFFI, «Sopra alcune equazioni differenziali della Radiotecnica» Atti Acc. Scienze, Bologna, (9) 9, 1941-42. L. CAPRIOLI, op. cit. in ⁽¹⁴⁾.

⁽²¹⁾ È quasi superfluo rilevare che il binomio $y - y^3$ della (36) e la $f(y)$ della (38), rappresentano, in forma adimensionale, le caratteristiche degli elementi non lineari del circuito cui si riferiscono.

⁽²²⁾ È infatti, per l'ammessa periodicità di $y(\tau)$:

$$\int_0^T y d\tau = 0, \quad \int_0^T \dot{y} d\tau = 0, \quad \int_0^T \frac{d^3}{d\tau^3} f(y) d\tau = 0.$$

Ciò premesso, moltiplichiamo la (38) per la funzione $g(\tau)$ definita dalla relazione:

$$(41) \quad g(\tau) = - \sum_1^{\infty} \frac{A_n}{n^2 k^2} \cos (nk\tau + \gamma_n),$$

e che verifica, manifestamente, l'equazione:

$$(42) \quad \ddot{g}(\tau) = y(\tau) \quad (23);$$

integrando nel periodo T l'equazione così ottenuta si ha, dopo calcoli assai semplici,

$$(43) \quad \int_0^T \ddot{g}^2 d\tau - \int_0^T \dot{g}^2 d\tau = 0 \quad (24).$$

Posto ora:

$$(44) \quad \frac{1}{nk} A_n = B_n,$$

cioè:

$$\dot{g}(\tau) = \sum_1^{\infty} B_n \operatorname{sen} (nk\tau + \gamma_n), \quad \ddot{g}(\tau) = \sum_1^{\infty} B_n nk \cos (nk\tau + \gamma_n),$$

risulta subito, dalla (43), per la proposizione di PARSEVAL, la relazione:

$$k^2 \sum_1^{\infty} n^2 B_n^2 = \sum_1^{\infty} B_n^2 \quad (25),$$

(23) È appunto alla introduzione della funzione $g(\tau)$ (suggerita da D. GRAFFI) che si deve la possibilità di dominare il termine nella derivata terza, portando così alla immediata applicazione del procedimento citato in annotazione (20).

(24) Si ha, infatti, con successive integrazioni per parti:

$$\begin{aligned} \int_0^T \ddot{y}g d\tau &= \int_0^T \dot{y} \dot{g} d\tau = - \int_0^T \dot{y} g d\tau = \int_0^T \ddot{y}g d\tau = \int_0^T \ddot{g}^2 d\tau, \\ \int_0^T \dot{y}g d\tau &= \int_0^T g \dot{g} d\tau = - \int_0^T \dot{g}^2 d\tau, \quad \int_0^T \ddot{y}g d\tau = - \int_0^T \dot{g}^2 d\tau = 0, \\ \int_0^T \frac{d^3y}{d\tau^3} g d\tau &= - \int_0^T \dot{g} d \frac{dy}{d\tau} = - \int_0^T \dot{g} \ddot{y} d\tau = - \int_0^T \dot{g} \ddot{g} d\tau = 0. \end{aligned}$$

(25) Cfr. D. GRAFFI, op. cit. in (20).

dalla quale si ha, intanto la cercata limitazione superiore:

$$(45) \quad k^2 = \frac{\sum_1^{\infty} B_n^2}{\sum_1^{\infty} n^2 B_n^2} \leq 1,$$

per la pulsazione k ⁽²⁶⁾: essa non può, cioè superare l'unità, uguagliandola soltanto quando siano nulle tutte le quantità B_n d'ordine $n > 1$: quindi nulle tutte le armoniche A_n d'ordine superiore al primo della $y(\tau)$ (cioè, quando la $y(\tau)$ è sinusoidale).

Osserviamo inoltre che la (45) può scriversi nella forma:

$$(45') \quad \sum_2^{\infty} (k^2 n^2 - 1) B_n^2 = (1 - k^2) B_1^2,$$

e che nell'ipotesi non restrittiva in pratica (cfr. il seg. n. 6), di $\frac{1}{4} < k^2 \leq 1$ tutti i termini della somma a primo membro sono positivi; ne seguono pertanto le disequazioni:

$$(46) \quad B_n^2 \leq B_1^2 \frac{1 - k^2}{n^2 k^2 - 1},$$

che forniscono altrettante limitazioni superiori per le armoniche d'ordine $1 < n$ in funzione dell'ampiezza della fondamentale B_1 e della pulsazione k ; e, quindi, per le analoghe armoniche A_n della funzione $y(\tau)$ (cfr. le relazioni (44)).

6. - Di notevole interesse, anche pratico, possono risultare alcune espressioni approssimate dell'ampiezza e della pulsazione, che è facile determinare nella ipotesi che il parametro α sia sufficientemente piccolo rispetto all'unità,

⁽²⁶⁾ La pulsazione effettiva (cfr. la relazione (31)) $\Omega = \omega_0 k$ della soluzione periodica dell'equazione (30) ammette pertanto come limitazione superiore il valore:

$$\Omega = \sqrt{\frac{Q}{N}} = \frac{1}{rc \sqrt{6 + 4 \frac{R}{r}}},$$

ottenuto nella Tecnica, valendosi di procedimenti lineari (cfr. ad es., E. L. GINZTON, op. cit., formula (10), p. 45), e assunto come valore approssimato della pulsazione propria del sistema.

sicchè se ne possano trascurare, rispetto alla prima, le potenze superiori (27). A tale riguardo, osserviamo, intanto, che sempre tenuto conto della (39), è possibile esprimere la soluzione periodica della (36) nella forma:

$$(47) \quad y(\tau) = a_1 \cos k\tau + \alpha \sum_2^{\infty} (a_n \cos nk\tau + b_n \sin nk\tau) \quad (28),$$

in cui supporremo la fondamentale a_1 e la pulsazione k poco diverse dall'ampiezza a e dalla pulsazione, unitaria, della soluzione $a \cos(\tau + \tau_0)$ dell'equazione cui, per $\alpha = 0$, si riduce la (36).

Ciò premesso, moltiplichiamo la (36) per $\cos k\tau$ ed integriamo nel periodo; si ha, dopo un semplice calcolo (29), la relazione:

$$(48) \quad 1 - k^2 + \frac{3}{4} \alpha^2 \beta k a_1 b_3 + O(\alpha^i) = 0 \quad (30) \quad (i \geq 3),$$

dalla quale segue, intanto, che l'espressione $1 - k^2$ è d'ordine non inferiore ad α^2 .

(27) Non privi d'interesse sono i risultati cui si perviene considerando, in luogo del parametro α , il parametro β (che condiziona esso pure la non linearità di (36)); ma su ciò non ci soffermiamo qui.

(28) Per una semplice dimostrazione di ciò, cfr. ad es. L. CAPRIOLI, op. cit. in (14).

(29) Dall'equazione:

$$(1 - k^2) \int_0^T y \sin k\tau \, d\tau - \alpha k(1 - \beta k^2) \int_0^T y \cos k\tau \, d\tau - \alpha \beta k^3 \int_0^T y^3 \cos k\tau \, d\tau = 0,$$

ottenuta con semplici integrazioni per parti; e dalle relazioni

$$\int_0^T y \sin k\tau \, d\tau = O(\alpha^2), \quad \int_0^T y \cos k\tau \, d\tau = a_1 \frac{\pi}{k} + O(\alpha^2),$$

$$\int_0^T y^3 \cos k\tau \, d\tau = \frac{3}{4} a_1^3 \frac{\pi}{k} + O(\alpha^2),$$

si ottiene subito la (48) del testo.

(30) Con la notazione $O(\alpha^i)$ indichiamo termini d'ordine i nel parametro α .

Analoghi procedimenti d'integrazione nel periodo T , ma previa moltiplicazione della (36) per $\cos rk\tau$ e per $\sin rk\tau$ (r intero, ≥ 2), portano alle relazioni:

$$(49) \quad (r^2k^2 - 1)a_r = \alpha \left[rk(1 - \beta r^2k^2)b_r + \frac{3}{2}\beta k^3r^3a_1^2 \left(b_r + \frac{1}{2}b_{r+2} \right) \right] + O(\alpha^2),$$

$$(50) \quad (9k^2 - 1)b_3 = -\frac{27}{4}\beta k^3a_1^3 - \alpha \left[3ka_3(1 - 9k^2) + \frac{81}{2}\beta k^3a_1^2 \left(a_3 + \frac{1}{2}a_5 \right) \right] + O(\alpha^2),$$

$$(51) \quad (s^2k^2 - 1)b_s = -\alpha \left[sk(1 - \beta s^2k^2)a_s + \frac{3}{2}s^3\beta k^3a_1^2 \left(a_s + \frac{1}{2}a_{s+2} \right) \right] + O(\alpha^2), \quad (31)$$

$$(s \neq 3, j \geq 2);$$

(31) La (36), moltiplicata per $\cos rk\tau$ e per $\sin sk\tau$ ed integrata poi nel periodo, porta rispettivamente alle equazioni:

$$(1 - r^2k^2) \int_0^T y \cos k\tau \, d\tau + \alpha rk(1 - \beta r^2k^2) \int_0^T y \sin rk\tau \, d\tau + \alpha \beta r^3k^3 \int_0^T y^3 \sin rk\tau \, d\tau = 0,$$

$$(1 - s^2k^2) \int_0^T y \sin k\tau \, d\tau - \alpha sk(1 - \beta s^2k^2) \int_0^T y \cos sk\tau \, d\tau - \alpha \beta s^3k^3 \int_0^T y^3 \cos sk\tau \, d\tau = 0,$$

dalle quali, tenuto conto delle identità:

$$\int_0^T y \cos rk\tau \, d\tau = \alpha a_r \frac{\pi}{k}, \quad \int_0^T y \sin sk\tau \, d\tau = \alpha b_s \frac{\pi}{k},$$

$$\int_0^T y^3 \sin rk\tau \, d\tau = \frac{3}{2} \alpha a_1^2 \frac{\pi}{k} \left[b_r + \frac{1}{2} b_{r+2} \right] + O(\alpha^2),$$

$$\int_0^T y^3 \cos sk\tau \, d\tau = \frac{3}{2} \alpha a_1^2 a_s \frac{\pi}{k} + \frac{3}{4} \alpha a_1^2 \frac{\pi}{k} [a_{s-2} + a_{s+2}] + O(\alpha^2) \quad (s > 3),$$

$$\int_0^T y^3 \cos 2k\tau \, d\tau = \frac{3}{2} \alpha a_1^2 a_2 \frac{\pi}{k} + \frac{3}{4} \alpha a_1^2 \frac{\pi}{k} a_4 + O(\alpha^2),$$

$$\int_0^T y^3 \cos 3k\tau \, d\tau = \frac{1}{4} a_1^2 \frac{\pi}{k} + \frac{3}{2} \alpha a_1^2 \left[a_3 + \frac{1}{2} a_5 \right] + O(\alpha^2),$$

segue la relazione del testo.

nelle nostre ipotesi, tutti i coefficienti a_r, b_s ($r, s \leq 2$) sono dunque d'ordine non inferiore ad α ; ad eccezione di b_3 , che ha il valore finito, assegnato dalla (50). Tenuto conto di ciò, la (47) si può scrivere nella forma:

$$(52) \quad y(\tau) = a_1 \cos k\tau + \alpha b_3 \sin 3k\tau + O(\alpha^2),$$

ed è ora assai facile ottenere valutazioni approssimate delle quantità k, a_1, b_3 ⁽³²⁾.

Può utilizzarsi, a tal fine, insieme alla (48) ed alla (50), la relazione:

$$(53) \quad \beta k^2 - 1 = \frac{3}{4} \beta k^2 a_1^2 + O(\alpha^2),$$

cui si perviene moltiplicando la (36) per $\sin \omega\tau$ ed integrando ancora nel periodo T ⁽³³⁾. Dalla (53) si può, infatti, dedurre una prima approssimazione per la quantità a_1^2 , sostituendovi a k^2 il valore:

$$(54) \quad k^2 \cong 1,$$

fornito, a meno di termini d'ordine 2 in α , dalla (48); si ha così, sempre a meno di termini del second'ordine in α ,

$$(55) \quad a_1 = 2 \sqrt{\frac{\beta - 1}{3\beta}} + O(\alpha^2).$$

Dalla (50), ponendovi ora per a_1, k i valori dati dalle (54), (55), segue la cercata espressione:

$$(56) \quad b_3 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{[3(\beta - 1)]^3}{\beta}} + O(\alpha),$$

della terza armonica, approssimata a meno di termini d'ordine 1 in α .

⁽³²⁾ Cfr. L. CAPRIOLI, op. cit. in ⁽¹⁴⁾.

⁽³³⁾ Si ha, infatti, operando com'è detto nel testo, l'equazione:

$$(1 - k^2) \int_0^T y \sin k\tau \, d\tau - \alpha\beta(1 - \beta k^2) \int_0^T y \cos k\tau \, d\tau - \alpha\beta k^3 \int_0^T y^3 \cos k\tau \, d\tau = 0,$$

e tenuto conto delle identità di annotazione ⁽²⁰⁾, segue subito la (53) del testo.

Sostituendo, infine, nel secondo membro della (48), i valori di k , a_1 , b_3 forniti dalle (54), (55), (56), si ha per la pulsazione k la espressione:

$$(57) \quad k^2 = 1 - \frac{3}{2} (\beta - 1)^2 \alpha^2 + O(\alpha^3) \quad (34),$$

approssimata, come s'è detto, a meno di termini del terz'ordine in α .

(34) La (57) può ottenersi anche sostituendo le espressioni di k , a_1 , b_3 , fornite dalle (55), (56), (57), nel secondo membro della relazione:

$$(k^2 - 1) = \alpha^2 \frac{1}{a_1^2} [-6 \beta k^3 b_3 a_1^3 + b_3(1 - 9 k^2)] + O(\alpha^3),$$

che si ottiene moltiplicando la (36) per $y(\tau)$ ed integrando poi nel periodo.

S u n t o .

Si stabiliscono le equazioni non lineari, rispettivamente del quinto e del terzo ordine, che, sotto ipotesi abbastanza plausibili, governano il funzionamento di un oscillatore elettronico a spostamento di fase, a seconda che il tubo impiegato è un triodo o un pentodo.

Ammessa, poi, l'esistenza di una soluzione periodica dell'equazione del terzo ordine, si stabiliscono limitazioni superiori per la pulsazione e per l'ampiezza delle armoniche. Nell'ulteriore ipotesi di debole non linearità, si assegnano valutazioni approssimate per la pulsazione, per la fondamentale e per la terza armonica; valutazioni che sono, ordinatamente, del terzo, secondo e primo ordine rispetto a quello del piccolo parametro che caratterizza la debole non linearità.

S u m m a r y .

The non-linear differential equations of the third and fifth order are established for some electronic phase-shift oscillators in which the used electronic tube is a triode, or a pentode, respectively. Then, granting the existence of a periodic solution for the third order equation, some superior limitations for the frequency and for the amplitudes of the harmonics, are fixed. In the further assumption of a small enough non-linearity the approximated evaluations are fixed for frequency, for fundamental harmonic, and for third one; this evaluations are of the third, second and first order, respectively, with reference to the small parameter that is peculiar to small non-linearity.

* * *

