Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 263-271

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Su alcune classi di equazioni alle differenze finite, lineari. (**)

Introduzione.

In un precedente lavoro (1) ho considerato un metodo risolutivo per la classe di equazioni alle differenze finite, lineari,

$$x\, y^{(2,h)}(x) + 2n\, y^{(1,h)}(x+h) - a^2\, x\, y(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

dove

$$y^{(1,h)}(x) = \frac{1}{h}\{ y(x+h) - y(x) \}, \qquad y^{(2,h)}(x) = \frac{1}{h^2}\{ y(x+2h) - 2y(x+h) + y(x) \}$$

e $a = a(x, h)$ è una data funzione periodica di x, di periodo h (in particolare una costante). Tali equazioni [che ho chiamato *del tipo di Bessel* in quanto si possono riguardare, nel Calcolo delle differenze finite, come le corrispondenti delle equazioni di BESSEL

$$x\, y''(x) + 2n\, y'(x) - a^2\, x\, y(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

nel Calcolo infinitesimale] venivano scritte nella seguente forma monomia (2)

$$(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n\, x\, (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{1-n}\, y(x) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1'}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. - Ricevuto il 18-V-1965.

(1) L. TANZI CATTABIANCHI, *Su una classe di equazioni alle differenze, del tipo di Bessel*, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1959), 145-152.

(2) Cfr. loc. cit. in (1), p. 151.

dove è $D^2_{x,h} f(x) = f^{(2,h)}(x)$, e la speciale sottolineatura orientata sta ad evitare l'uso di parentesi e a ricordare che le varie operazioni applicate a $y(x)$ si susseguono da destra verso sinistra. Si trovava, per (1), la formula risolutiva

$$(2) \qquad y(x) = (D^2_{x,h} - a^2)^{n-1} \frac{\pi_1 \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 - ah)^{x/h}}{x}$$

con $\pi_1 = \pi_1(x, h)$, $\pi_2 = \pi_2(x, h)$ arbitrarie funzioni periodiche di x, col periodo h.

Nel presente lavoro considero alcune classi di equazioni alle differenze lineari — che generalizzano, in varie forme, le equazioni (1) — e sviluppo, per tali classi di equazioni, procedimenti risolutivi generalizzanti quello seguito per le (1). Questi procedimenti sono in parallelismo con altri relativi a certe classi di equazioni differenziali lineari (3).

1. - Risultati.

1.1. – Osserviamo dapprima che, nel Calcolo delle differenze finite, in analogia al Calcolo differenziale: 1°) l'operatore $D^r_{x,h}$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$ è il corrispondente di D^r_x; 2°) le funzioni $c(x, h)$ periodiche di x col periodo h [quali $a(x, h)$, $\pi_1(x, h)$, $\pi_2(x, h)$ considerate nell'Introduzione] corrispondono alle ordinarie costanti, in quanto è $D_{x,h}\, c(x, h) = 0$; 3°) le funzioni del tipo $(1 + ah)^{x/h}$, con $a = a(x, h)$ funzione periodica di x col periodo h, corrispondono alle funzioni esponenziali e^{ax} (a = costante); 4°) i prodotti

$$x^{n|h} = x(x - h)(x - 2h) \ldots (x - (n-1)h) \,,$$

per i quali risulta $D_{x,h}\, x^{n|h} = n x^{(n-1)|h}$, vanno riguardati come corrispondenti alle potenze x^n. Pertanto le funzioni del tipo

$$(3) \qquad P(x)_h = a_0\, x^{m|h} + a_1\, x^{(m-1)|h} + \ldots + a_{m-1}\, x + a_m$$

[con $a_r = a_r(x, h)$ $(r = 0, 1, \ldots, m)$ funzioni periodiche di x col periodo h] vanno riguardate come corrispondenti agli ordinari polinomi

$$P(x) = a_0\, x^m + a_1\, x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}\, x + a_m \,.$$

(3) Cfr. A. Mambriani, *Genesi ed integrazione in termini finiti di vaste classi d'equazioni differenziali lineari, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere*, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **9** (1940), 27-43.

Tali funzioni (3) si diranno nel seguito *polinomi nel senso delle differenze finite*, o, brevemente, *polinomi* $P(x)_h$; m si dirà il *grado* (nel senso delle differenze finite) di $P(x)_h$.

1.2. – Le classi di equazioni alle differenze, generalizzanti le (1), qui considerate, sono le seguenti:

$$\underleftarrow{(\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^n \, P(x)_h \, (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{\nu-n}} \, y(x) = 0 \,, \tag{4}$$

$$\underleftarrow{\Lambda_h^n \; x \; \Lambda_h^{1-n}} \; y(x) = 0 \,, \tag{5}$$

$$\underleftarrow{\Lambda_h^n \; P(x)_h \; \Lambda_h^{\nu-n}} \; y(x) = 0 \,, \tag{6}$$

dove $P(x)_h$ è un polinomio di tipo (3) di grado non superiore a ν (ν intero, $1 \leqq \nu \leqq n$) e Λ_h è un operatore alle differenze, lineare, di ordine m, con coefficienti funzioni periodiche di x col periodo h, ossia:

$$\Lambda_h = \Lambda_h(\mathrm{D}_{x,h}) = \lambda_0 \, \mathrm{D}^m_{x,h} + \lambda_1 \, \mathrm{D}^{m-1}_{x,h} + \ldots + \lambda_{m-1} \, \mathrm{D}_{x,h} + \lambda_m \tag{7}$$

$$[\lambda_r = \lambda_r(x, h) \qquad (r = 0, 1, \ldots, m)] \,.$$

Si constata che queste equazioni alle differenze sono lineari, a coefficienti dati da polinomi di tipo (3) di gradi $\leqq \nu$.

Le formule risolutive di tali equazioni sono rispettivamente le seguenti:

$$y(x) = (\mathrm{D}^2_{x,h} - a^2)^{n-\nu} \, \frac{x^{(n-1)|h} \varphi_1 + x^{(n-2)|h} \varphi_2 + \ldots + x \varphi_{n-1} + \varphi_n}{P(x)_h} \,, \tag{8}$$

dove

$$\varphi_r = \pi_{r,1} \cdot (1 + ah)^{x/h} + \pi_{r,2} \cdot (1 - ah)^{x/h} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

e $\pi_{r,s} = \pi_{r,s}(x, h)$ $(s = 1, 2)$ sono arbitrarie funzioni periodiche di x, col periodo h;

$$y(x) = \Lambda_h^{n-1} \, \frac{\pi_1 \cdot (1 + \alpha_1 h)^{x/h} + \ldots + \pi_m \cdot (1 + \alpha_m h)^{x/h}}{x} \,, \tag{10}$$

dove $\pi_1 = \pi_1(x, h), \ldots, \pi_m = \pi_m(x, h)$ sono arbitrarie funzioni periodiche di x col periodo h e $\alpha_1 = \alpha_1(x, h), \ldots, \alpha_m = \alpha_m(x, h)$ sono le m radici dell'equazione caratteristica

$$\lambda_0 t^m + \lambda_1 t^{m-1} + \dots + \lambda_{m-1} t + \lambda_m = 0; \tag{11}$$

$$y(x) = \Delta_h^{n-\nu} \frac{x^{(n-1)|h} \Phi_1 + x^{(n-2)|h} \Phi_2 + \dots + x\Phi_{n-1} + \Phi_n}{P(x)_h}, \tag{12}$$

dove

$$\Phi_r = \sum_{1}^{m}{}_s \pi_{r,s} \cdot (1 + \alpha_s h)^{x/h} \qquad (r = 1, 2, \dots, n). \tag{13}$$

Va notato che le funzioni arbitrarie della x, di periodo h, figuranti nelle formule risolutive (8) e (12), possono essere in numero sovrabbondante rispetto all'ordine delle rispettive equazioni: si mostra però come, noto il grado di $P(x)_h$, si possa fare la riduzione effettiva delle funzioni arbitrarie (cfr. n. **4.2**).

2. - Risoluzione delle equazioni (4).

2.1. – Riportiamo, per maggiore chiarezza, una formula e alcune identità fra operatori [4], utili per il seguito. La formula è la seguente

$$\mathfrak{L}_{x,h}(u \cdot v) = \sum_{0}^{m}{}_\nu \frac{u^{(\nu,h)}}{\nu!} \mathfrak{L}^{(\nu)}_{x,h} v, \tag{14}$$

dove:

$$u = u(x), \qquad v = v(x),$$

$$\mathfrak{L}_{x,h} \equiv \sum_{0}^{m}{}_r\, p_r \mathrm{D}^r_{x,h} \qquad [p_r = p_r(x)],$$

$$\mathfrak{L}^{(\nu)}_{x,h} v \equiv \sum_{\nu}^{m}{}_r\, r(r-1) \dots (r-\nu+1) p_r \cdot {}_{\nu h}v^{(r-\nu,h)} \qquad [{}_{\nu h}v = v(x + \nu h)].$$

Vale poi fra operatori l'identità

$$\mathrm{D}_{x,h} - a \equiv \underleftarrow{(1 + ah)^{\frac{x}{h}+1}\, \mathrm{D}_{x,h}\, (1 + ah)^{-\frac{x}{h}}} \tag{15}$$

---

[4] Cfr. loc. cit. in [1], formula (5) p. 148 e (9) p. 149.

dalla quale, tenendo conto dell'espressione analoga per $D_{x,h}+a$, si ha

$$\text{(16)} \qquad D^2_{x,h}-a^2 \equiv (1-a^2h^2)(1+ah)^{x/h} D_{x,h}\left[\frac{1-ah}{1+ah}\right]^{x/h} D_{x,h}(1-ah)^{-x/h} \ .$$

2.2. – *Le equazioni* (4) *sono lineari, di ordine* 2ν, *con coefficienti polinomi di tipo* (3) *di gradi* $\leqq \nu$. Infatti, applicando al primo membro di (4) la formula (14), ove si assuma

$$\mathfrak{L}_{x,h}=(D^2_{x,h}-a^2)^n, \quad u=P(x)_h, \quad v=(D^2_{x,h}-a^2)^{\nu-n}\, y(x),$$

si trova che esso può scriversi

$$\sum_0^{\nu}{}_r \frac{1}{r!}\, P^{(r,h)}(x)_h\, L_{2\nu-r}\, y(x+rh),$$

dove $L_{2\nu-r}=L_{2\nu-r}(D_{x,h})$ è un operatore alle differenze, lineare, di ordine $2\nu-r$, di tipo (7) e i polinomi $P^{(r,h)}(x)_h$ sono di gradi $\leqq \nu$.

2.3. – Per risolvere, ora, l'equazione (4) basta invertire successivamente gli operatori applicati, nel primo membro, a $y(x)$. Si ottiene così:

$$y(x)=(D^2_{x,h}-a^2)^{n-\nu}\,\frac{1}{P(x)_h}\,(D^2_{x,h}-a^2)^{-n}\,0.$$

Da questa formula risolutiva, eseguendo i calcoli indicati ([5]), risulta proprio la (8) precedente.

3. - Risoluzione delle equazioni (5).

3.1. – Assumendo nella formula (14)

$$\mathfrak{L}_{x,h}=\Lambda^n_h\,, \qquad u=x, \qquad v=\Lambda^{1-n}_h\, y(x),$$

si prova che *le equazioni* (5) *sono lineari, di ordine* m, *con coefficienti polinomi*

([5]) Cfr. loc. cit. in ([1]), p. 151, formula (14').

di tipo (3) *di gradi* $\leqq 1$. Infatti, tali equazioni assumono la forma

$$(5') \qquad x\,\Delta_h\, y(x) + n\Delta_h'\, y(x+h) = 0 \qquad \left[\Delta_h' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathrm{D}_{x,h}}\,\Delta_h\right],$$

ossia, per esteso,

$$(5'') \qquad \lambda_0\, x\, y^{(m,h)}(x) + mn\lambda_0\, y^{(m-1,h)}(x+h) + \lambda_1\, x\, y^{(m-1,h)}(x) +$$

$$+ (m-1)n\lambda_1\, y^{(m-2,h)}(x+h) + \lambda_2\, x\, y^{(m-2,h)}(x) + \ldots +$$

$$+ 2n\lambda_{m-2}\, y^{(1,h)}(x+h) + \lambda_{m-1}\, x\, y^{(1,h)}(x) + n\lambda_{m-1}\, y(x+h) + \lambda_m\, x\, y(x) = 0\,.$$

Si può osservare che è possibile trasformare (5″) in modo che nelle $y^{(r,h)}$ $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$ non compaia l'argomento $x+h$, bensì l'argomento x: basta notare che è

$$y^{(r,h)}(x+h) = \{y^{(r,h)}(x+h) - y^{(r,h)}(x)\} + y^{(r,h)}(x) = hy^{(r+1,h)}(x) + y^{(r,h)}(x).$$

La (5″) diventa allora:

$$(5''') \qquad \lambda_0\{x + mnh\}\, y^{(m,h)}(x) + \{\lambda_1 x + (m-1)nh\lambda_1 + mn\lambda_0\}\, y^{(m-1,h)}(x) +$$

$$+ \{\lambda_2 x + (m-2)nh\lambda_2 + (m-1)n\lambda_1\}\, y^{(m-2,h)}(x) + \ldots +$$

$$+ \{\lambda_{m-1} x + nh\lambda_{m-1} + 2n\lambda_{m-2}\}\, y^{(1,h)}(x) + \{\lambda_m x + n\lambda_{m-1}\}\, y(x) = 0\,,$$

che è una particolare equazione alle differenze del tipo

$$(\alpha_0 x + \beta_0)y^{(m,h)}(x) + (\alpha_1 x + \beta_1)y^{(m-1,h)}(x) + \ldots + (\alpha_m x + \beta_m)y(x) = 0$$

$[\alpha_r = \alpha_r(x,h),\ \beta_r = \beta_r(x,h)]$, da porre in analogia con l'equazione differenziale lineare di LAPLACE.

3.2. – Per la risoluzione dell'equazione (5) consideriamo dapprima l'equazione alle differenze

$$(17) \qquad \Delta_h^n\, z = 0 \qquad [z = z(x)$$

ossia, per esteso,

$$(17') \qquad (\lambda_0\, \mathrm{D}_{x,h}^m + \lambda_1\, \mathrm{D}_{x,h}^{m-1} + \ldots + \lambda_{m-1}\, \mathrm{D}_{x,h} + \lambda_m)^n\, z = 0\,.$$

Da (17) segue

$$z = \Lambda_h^{-n} 0 ,$$

dove resta da specificare l'espressione del secondo membro.

a) A tale scopo cominciamo con l'esaminare la (17) per $n = 1$. Se

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \qquad [\alpha_r = \alpha_r(x, h) \quad (r = 1, 2, \ldots, m)]$$

sono le m radici dell'equazione caratteristica di $\Lambda_h z = 0$ [ossia dell'equazione (11), n. **1.2**], si trova, tenendo conto delle (15) e (16) ed estendendo il procedimento già seguito nel lavoro citato in (¹), che la formula risolutiva dell'equazione considerata (nel caso $n = 1$) è la seguente:

$$z(x) = \pi_1 \cdot (1 + \alpha_1 h)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 + \alpha_2 h)^{x/h} + \ldots + \pi_m \cdot (1 + \alpha_m h)^{x/h},$$

con $\pi_r = \pi_r(x, h)$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$ funzioni periodiche della x, di periodo h.

b) Sia ora, in (17), $n = 2$, cioè sia da risolvere l'equazione $\Lambda_h^2 z = 0$. Si ha intanto

$$\Lambda_h z = \Lambda_h^{-1} 0 = \pi_1 \cdot (1 + \alpha_1 h)^{x/h} + \pi_2 \cdot (1 + \alpha_2 h)^{x/h} + \ldots + \pi_m \cdot (1 + \alpha_m h)^{x/h} ,$$

da cui, invertendo l'operatore Λ_h figurante nel primo membro, si ricava

$$z(x) = x\Phi_1 + \Phi_2,$$

dove si è posto, per brevità,

$$\Phi_r = \pi_{r,1} \cdot (1 + \alpha_1 h)^{x/h} + \pi_{r,2} \cdot (1 + \alpha_2 h)^{x/h} + \ldots + \pi_{r,m} \cdot (1 + \alpha_m h)^{x/h} \quad (r = 1, 2).$$

c) Analogamente, nel caso $n = 3$, si ottiene per l'equazione $\Lambda_h^3 z = 0$ la formula risolutiva

$$z(x) = x^{2|h}\, \Phi_1 + x\, \Phi_2 + \Phi_3 .$$

d) In generale, per l'equazione (17) si ha la formula risolutiva

$$z(x) = x^{(n-1)|h}\, \Phi_1 + x^{(n-2)|h}\, \Phi_2 + \ldots + x\, \Phi_{n-1} + \Phi_n . \tag{18}$$

Risulta cioè:

$$\Delta_h^{-n}\, 0 = \sum_1^n {}_r\, x^{(n-r)|h}\, \Phi_r\,. \tag{18'}$$

3.3. - Ne segue che per l'equazione (5) la formula risolutiva

$$y(x) = \underleftarrow{\Delta_h^{n-1}\, \frac{1}{x}\, \Delta_h^{-n}\, 0}$$

[ottenuta invertendo in (5) gli operatori a primo membro] può scriversi

$$y(x) = \Delta_h^{n-1}\, \frac{1}{x} \left\{ x^{(n-1)|h}\, \Phi_1 + x^{(n-2)|h}\, \Phi_2 + \dots + x\, \Phi_{n-1} + \Phi_n \right\},$$

ossia, tenendo presente che $x^{r|h} = x(x-h)(x-2h) \dots (x-(r-1)h)$,

$$y(x) = \Delta_h^{n-1} \left\{ (x-h)^{(n-2)|h}\, \Phi_1 + (x-h)^{(n-3)|h}\, \Phi_2 + \dots + \Phi_{n-1} \right\} + \Delta_h^{n-1}\, \frac{\Phi_n}{x}\,.$$

Poichè qui il primo termine del secondo membro è nullo [essendo uguale a $\underleftarrow{\Delta_h^{n-1}\Delta_h^{1-n}\, 0}$], risulta infine, per (5), la formula risolutiva

$$y(x) = \Delta_h^{n-1}\, \frac{\Phi_n}{x}\,,$$

la quale, tenuto conto dell'espressione (13) di Φ_n, non è altro che la (10) riportata al n. **1.2.**

4. - Risoluzione delle equazioni (6).

4.1. - Se nella (14) si assume

$$\mathfrak{L}_{x,h} = \Delta_h^n\,, \qquad u = P(x)_h\,, \qquad v = \Delta_h^{\nu-n}\, y(x)\,,$$

si vede che *le equazioni* (6) *sono lineari, di ordine* $m\nu$, *con coefficienti polinomi di tipo* (3) *di gradi* $\leqq \nu$. Infatti, il primo membro di (6) si può scrivere nella forma

$$\sum_0^\nu {}_r\, \frac{1}{r!}\, \underleftarrow{P^{(r,h)}(x)_h\, L_{m\nu-r}}\, y(x+rh)\,,$$

dove $L_{m\nu-r} = L_{m\nu-r}(\mathrm{D}_{x,h})$ è un operatore alle differenze, lineare, di ordine $m\nu - r$, di tipo (7).

4.2. – Invertendo successivamente nella (6) i vari operatori applicati a $y(x)$, si ha

$$y(x) = \Delta_h^{n-\nu} \frac{1}{P(x)_h} \Delta_h^{-n} 0 ,$$

e, tenendo conto di (18'), si ottiene la formula risolutiva (12).

Osserviamo che le funzioni arbitrarie della x, si periodo h [ossia le funzioni $\pi_{r,s}(x, h)$], figuranti nella (12) possono essere in numero sovrabbondante rispetto all'ordine dell'equazione (6): infatti l'ordine dell'equazione (6) è $m\nu$, mentre la (12) contiene mn funzioni arbitrarie (ed è $\nu \leqq n$). Tenendo conto del grado di $P(x)_h$ e degli ordini di molteplicità delle radici dell'equazione caratteristica (11), è possibile fare, nella (12), la riduzione effettiva delle funzioni arbitrarie : detto p il grado di $P(x)_h$ $(p \leqq \nu)$, dette $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ le radici distinte dell'equazione caratteristica (11) e, infine, detti $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ (con $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_s = m$) i rispettivi ordini di molteplicità di tali radici, la formula risolutiva dell'equazione (6) si può scrivere:

$$(12') \qquad y(x) = \Delta_h^{n-\nu} \sum_1^s {}_r \left[\frac{\pi^*_{r,1}\, x^{(p-1)|h} + \pi^*_{r,2}\, x^{(p-2)|h} + \dots + \pi^*_{r,p}}{P(x)_h} + \right.$$

$$\left. + \overline{\pi}_{r,(n-\nu)\mu_r}\, x^{((n-\nu)\mu_r)|h} + \dots + \overline{\pi}_{r,n\mu_r-p-1}\, x^{(n\mu_r-p-1)|h} \right] \cdot (1 + \alpha_r h)^{x/h}$$

[si tenga presente che

$$\Delta_h^{n-\nu} \sum_1^s {}_r \left\{ (\overline{\pi}_{r,0} + \overline{\pi}_{r,1}\, x + \overline{\pi}_{r,2}\, x^{2|h} + \dots + \overline{\pi}_{r,(n-\nu)\mu_r-1}\, x^{((n-\nu)\mu_r-1)|h}) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\ (1 + \alpha_r h)^{x/h} \right\} = \Delta_h^{n-\nu} \Delta_h^{\nu-n} 0 = 0] .$$

In (12') le funzioni arbitrarie sono proprio in numero di

$$\sum_1^s {}_r \left(p + \left\{ n\mu_r - p - 1 - (n\mu_r - \nu\mu_r - 1) \right\}\right) = \nu \sum_1^s {}_r\, \mu_r = m\nu,$$

cioè in numero eguale all'ordine dell'equazione (6).

Ad esempio, nel caso in cui $P(x)_h$ abbia grado $p = \nu$ e le radici dell'equazione caratteristica (11) siano tutte semplici, la (12') diventa:

$$y(x) = \Delta_h^{n-\nu} \sum_1^m {}_r \frac{\pi_{r,1}\, x^{(\nu-1)|h} + \pi_{r,2}\, x^{(\nu-2)|h} + \dots + \pi_{r,\nu}}{P(x)_h} (1 + \alpha_r h)^{x/h} .$$

* * *