Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 117-128

LUIGI SANTOBONI (*)

Ancora sulla formula di Lidstone. (**)

1. – In un recente lavoro [1] ho studiato alcune equazioni funzionali, che s'incontrano nelle assicurazioni del ramo vita su due teste, e mi sono occupato di una equazione funzionale posta allo scopo di riconoscere se esistono leggi di mortalità, che verificano esattamente la formula di LIDSTONE

(1) $$P_{xy,\,\overline{n}|} = P_{x,\,\overline{n}|} + P_{y,\,\overline{n}|} - P_{\overline{n}|}\,,$$

la quale, come è ben noto, permette di determinare (in modo approssimato) il premio annuo per l'assicurazione mista su due teste, quando si conoscono i corrispondenti premi annui sulle singole teste e il premio finanziario.

Dopo aver mostrato che non esiste alcuna legge di mortalità, che soddisfi alla equazione funzionale ora detta, mi sono prefisso di dare una dimostrazione analitica della formula di LIDSTONE e di assegnare una espressione esatta dell'errore che si commette applicandola, trovando, poi, un termine correttivo, di facile calcolo, che ne migliora sensibilmente il grado di approssimazione.

La dimostrazione analitica, da me esposta nel citato lavoro su tale argomento, è fondata sostanzialmente sullo sviluppo in serie di MAC LAURIN di una funzione di due variabili, e il procedimento riveste un carattere generale; scegliendo opportunamente la forma analitica di questa funzione, si deduce facilmente la formula di LIDSTONE e si determina l'espressione dell'errore ad essa relativo.

In questo lavoro ho ritenuto interessante ritornare sullo stesso argomento per studiare come le considerazioni generali e i risultati trovati si prestino ad altre applicazioni riguardanti alcune questioni di Matematica attuariale.

(*) Indirizzo: Via Nomentana 220, Roma, Italia.
(**) Ricevuto: 9-I-1965.
[1] L. SANTOBONI, *Su alcune equazioni funzionali che si incontrano nella Matematica attuariale e sulla formula di Lidstone*, Ann. Facoltà Sci. polit. econ. comm. Univ. Perugia, n. 8 (1963-64), 259-276.

Mostrerò, cosí, che per l'assicurazione mista su due teste è possibile stabilire una relazione analitica fra le riserve matematiche, analoga a quella riguardante la formula di LIDSTONE.

Farò poi un'altra applicazione dei risultati al caso dell'assicurazione di morte temporanea su due teste, deducendone alcune conseguenze per la assicurazione vita intera.

Studierò infine se le considerazioni analitiche precedenti si possono estendere ad una funzione di tre variabili, mostrando non solo che ciò è possibile, ma che il procedimento è applicabile allo studio di alcune forme di assicurazione del ramo vita su tre (o più) teste.

2. – Supponiamo che una funzione $f(\alpha, \beta)$, di due variabili, sia sviluppabile in serie di MAC LAURIN in un campo piano connesso contenente il quadrato di cui due vertici opposti siano l'origine $(0, 0)$ e il punto $(1, 1)$.

Consideriamo quindi i tre sviluppi in serie seguenti:

$$f(1, 1) = f(0, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} \right]^k f(\alpha, \beta) \right]_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}},$$

$$f(1, 0) = f(0, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^k f(\alpha, 0) \right]_{\alpha=0},$$

$$f(0, 1) = f(0, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^k f(0, \beta) \right]_{\beta=0}.$$

Potendosi scrivere, come è evidente,

$$f(1, 1) = f(0, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\sum_0^\infty{}_s \binom{k}{s} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^{k-s} \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^s f(\alpha, \beta) \right]_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} =$$

$$= f(0, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^k f(\alpha, \beta) + \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^k f(\alpha, \beta) \right]_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}} +$$

$$+ \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\sum_1^{k-1}{}_s \binom{k}{s} \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^{k-s} \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^s f(\alpha, \beta) \right]_{\substack{\alpha=0 \\ \beta=0}},$$

risulta senz'altro

$$f(1, 1) = f(1, 0) + f(0, 1) - f(0, 0) + \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} P_k, \tag{2}$$

essendosi posto

$$P_k = \sum_1^{k-1}{}_s \binom{k}{s} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^{k-s} \left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^{s} f(\alpha,\ \beta) \right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} .$$

Il carattere generale del risultato espresso dalla (2) è evidente; di esso, come vedremo nei nn. successivi, è possibile fare delle applicazioni a talune questioni.

3. – La formula (2) si può applicare per riconoscere che nell'assicurazione mista su due teste x, y, di durata n, il premio annuo $P_{xy,\,\overline{n}|}$ resta collegato ai premi $P_{x,\overline{n}|}$, $P_{y,\overline{n}|}$, relativi alle singole teste, e al premio finanziario $P_{\overline{n}|}$.

Infatti, indicata con l_x la funzione di sopravvivenza nel caso continuo e posto $\delta = \log_e (1 + i)$, dove i rappresenta il tasso tecnico adoperato, si consideri la funzione

$$f(\alpha,\ \beta) = \frac{1}{\varphi(\alpha,\ \beta)} = \frac{1}{\int_0^n (l_{x+t}/l_x)^{\alpha}\, (l_{y+t}/l_y)^{\beta}\, e^{-\delta t}\, dt} . \tag{3}$$

I premi annui, che c'interessano, hanno evidentemente le espressioni (nel caso continuo)

$$P_{xy,\overline{n}|} = \frac{1}{\int_0^n (l_{x+t}/l_x)\, (l_{y+t}/l_y)\, e^{-\delta t}\, dt} - \delta = f(1,\ 1) - \delta ,$$

$$P_{x,\,\overline{n}|} = \frac{1}{\int_0^n (l_{x+t}/l_x)\, e^{-\delta t}\, dt} - \delta = f(1,\ 0) - \delta ,$$

$$P_{y,\,\overline{n}|} = \frac{1}{\int_0^n (l_{y+t}/l_y)\, e^{-\delta t}\, dt} - \delta = f(0,\ 1) - \delta ,$$

$$P_{\overline{n}|} = \frac{1}{\int_0^n e^{-\delta t}\, dt} - \delta = f(0,\ 0) - \delta .$$

In virtù della (2) risulta quindi la relazione esatta fra i premi

$$P_{xy,\overline{n}|} = P_{x,\,\overline{n}|} + P_{y,\,\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} + \sum_2^{\infty}{}_k \frac{1}{k!}\, P_k ,$$

che resta pertanto stabilita per via puramente analitica. È chiaro inoltre che l'errore, che si commette applicando la formula (2) di LIDSTONE, è rappresentato dalla serie

$$S = \sum_{2}^{\infty} {}_k \frac{1}{k!} P_k ,$$

con riferimento alla funzione (3).

Si riconosce perciò che, come primo termine correttivo per tale formula, si può assumere il primo termine della serie S, cioè l'espressione

$$H(x,\ y,\ n) = f_{\alpha\beta}(0,\ 0) = \frac{1}{\varphi^3(0,\ 0)} \left[2\, \varphi_\alpha(\alpha,\ \beta)\, \varphi_\beta(\alpha,\ \beta) - \varphi(\alpha,\ \beta)\, \varphi_{\alpha\beta}(\alpha,\ \beta)\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} ,$$

ossia

$$(4) \quad H(x,\ y,\ n) = \frac{1}{\bar{a}^3_{\overline{n}|}} \Big[2 \int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x) \cdot e^{-\delta t}\, dt \int_0^n \log\,(l_{y+t}/l_y) \cdot e^{-\delta t}\, dt - $$
$$- \bar{a}_{\overline{n}|} \int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x) \cdot \log\,(l_{y+t}/l_y) \cdot e^{-\delta t}\, dt\Big] .$$

Come ho mostrato nel già citato lavoro, è possibile assegnare per la (4) forme approssimate. Se la durata n dell'assicurazione è breve, si può applicare la formula di G. OTTAVIANI:

$$H(x,\ y,\ n) \cong \frac{\mu_x\, \mu_y}{\mathbf{a}^3_{\overline{n}|}} \left[2\, (Ia)^2_{\overline{n}|} - \mathbf{a}_{\overline{n}|}\, (Ia^2)_{\overline{n}|}\right] ,$$

mentre, se la durata non è breve, si possono stabilire altre formule approssimate; di esse riporto la seguente

$$H(x,\ y,\ n) \cong \frac{1}{2\mathbf{a}^2_{\overline{n}|}}\, n\, v^n \log \frac{l_{x+\bar{t}}}{l_x}\, \log \frac{l_{y+n}}{l_y} \qquad (\text{con } 0 < \bar{t} < n),$$

che ha il pregio di rispondere bene alle esigenze di calcolo numerico e che migliora sensibilmente il grado di approssimazione della formula di LIDSTONE. Questa si può scrivere, pertanto, più correttamente cosí:

$$P_{xy,\overline{n}|} \cong P_{x,\overline{n}|} + P_{y,\overline{n}|} - P_{\overline{n}|} + H(x,\ y,\ n) .$$

4. – Consideriamo ancora un'assicurazione mista su due teste x, y, di durata n, e domandiamoci se esiste una relazione esatta fra la riserva matematica ${}_tV_{xy}$, relativa alle due teste, e le riserve ${}_tV_x$, ${}_tV_y$, relative alle singole teste.

Vedremo che un tale legame si può stabilire con un procedimento analitico in virtù della (2).

Infatti, consideriamo la funzione

$$f(\alpha, \beta) = \frac{\psi(\alpha, \beta)}{\varphi(\alpha, \beta)}, \tag{5}$$

con

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int_0^n (l_{x+u}/l_x)^\alpha \, (l_{y+u}/l_y)^\beta \, e^{-\delta u} \, du \,,$$

$$\psi(\alpha, \beta) = \int_0^{n-t} (l_{x+t+u}/l_{x+t})^\alpha \, (l_{y+t+u}/l_{y+t})^\beta \, e^{-\delta u} \, du \,.$$

Nel continuo, per le riserve matematiche che ci interessano, si hanno, evidentemente, le espressioni:

$${}_tV_{xy} = 1 - \frac{{}_{/n-t}\bar{a}_{x+t,\, y+t}}{{}_{/n}\bar{a}_{xy}} = 1 - \frac{\psi(1,\, 1)}{\varphi(1,\, 1)} = 1 - f(1,\, 1)\,,$$

$${}_tV_x = 1 - \frac{{}_{/n-t}\bar{a}_{x+t}}{{}_{/n}\bar{a}_x} = 1 - \frac{\psi(1,\, 0)}{\varphi(1,\, 0)} = 1 - f(1,\, 0)\,,$$

$${}_tV_y = 1 - \frac{{}_{/n-t}\bar{a}_{y+t}}{{}_{/n}\bar{a}_y} = 1 - \frac{\psi(0,\, 1)}{\varphi(0,\, 1)} = 1 - f(0,\, 1)\,.$$

da cui, in base alla (2), resta dimostrato che le riserve sono legate dalla relazione

$${}_tV_{xy} = {}_tV_x + {}_tV_y - [1 - f(0,\, 0)] - \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} P_k \,,$$

oppure

$${}_tV_{xy} = {}_tV_x + {}_tV_y - V_{\overline{t}|} - \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} P_k \,, \tag{6}$$

essendosi posto

$$V_{\overline{t}|} = 1 - f(0,\, 0) = 1 - \frac{\bar{a}_{\overline{n-t}|}}{\bar{a}_{\overline{n}|}}\,.$$

La formula (6) mostra dunque che per le riserve matematiche della mista su due teste sussiste la formula approssimata

$$ {}_tV_{xy} \cong {}_tV_x + {}_tV_y - V_{\overline{t}|} \, , \tag{7} $$

analoga a quella di LIDSTONE, e che l'errore che si commette applicandola è rappresentato dalla serie

$$ S = \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} P_k \, , $$

con riferimento alla funzione (5).

5. – Se si vuole un termine correttivo per la (7), si può assumere come tale il primo termine della serie S, cioè l'espressione

$$ K(x,\, y,\, t,\, n) = f_{\alpha\beta}(0,\, 0) = \frac{1}{\varphi^2(0,\, 0)} \left[\varphi\, \psi_{\alpha\beta} - \varphi_\alpha\, \psi_\beta - \varphi_{\alpha\beta}\, \psi - \varphi_\beta\, \psi_\alpha\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} + $$
$$ + \frac{2}{\varphi^3(0,\, 0)} \left[\psi\, \varphi_\alpha\, \varphi_\beta\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} \, , $$

ossia

$$ K(x,\, y,\, t,\, n) = \frac{1}{\bar{a}^2_{\overline{n}|}} \left[\bar{a}_{\overline{n}|} \int_0^{n-t} \log\, (l_{x+t+u}/l_{x+t}) \cdot \log\, (l_{y+t+u}/l_{y+t}) \cdot e^{-\delta u}\, du \, - \right. \tag{8} $$
$$ - \bar{a}_{\overline{n-t}|} \int_0^n \log\, (l_{x+u}/l_x) \cdot \log\, (l_{y+u}/l_y) \cdot e^{-\delta u}\, du \, - $$
$$ - \int_0^{n-t} \log\, (l_{x+t+u}/l_{x+t}) \cdot e^{-\delta u}\, du \int_0^n \log\, (l_{y+u}/l_y) \cdot e^{-\delta u}\, du \, - $$
$$ \left. - \int_0^{n-t} \log\, (l_{y+t+u}/l_{y+t}) \cdot e^{-\delta u}\, du \int_0^n \log\, (l_{x+u}/l_x) \cdot e^{-\delta u}\, du \right] + $$
$$ + \frac{2}{\bar{a}^3_{\overline{n}|}}\, \bar{a}_{\overline{n-t}|} \int_0^n \log\, (l_{x+u}/l_x) \cdot e^{-\delta u}\, du \int_0^n \log\, (l_{y+u}/l_y) \cdot e^{-\delta u}\, du \, . $$

Introduciamo ora la forza di mortalità μ_x relativa alla funzione di sopravvivenza l_x; detto ξ un conveniente punto interno all'intervallo $(x,\, x+u)$ e indicato con σ un infinitesimo per $u \to 0$, si può scrivere

$$ \log\, (l_{x+u}/l_x) = -\int_x^{x+u} \mu_s\, ds = -\, u\, \mu_\xi = -\left[u\, \mu_x + u\, \sigma\right] . $$

Nel caso che la durata n dell'assicurazione sia breve, si può trascurare l'infinitesimo $u\,\sigma$, e quindi si può porre approssimativamente

$$\log(l_{x+u}/l_x) = -\,u\,\mu_x\,.$$

Operando in modo analogo per ciascuna delle funzioni logaritmiche, che figurano sotto i singoli segni di integrale nella (8), si trova per il termine correttivo la seguente espressione approssimata:

$$K(x,\ y,\ t,\ n) \cong \frac{1}{\bar{a}^2_{\overline{n}|}}\Big[\bar{a}_{\overline{n}|}\,\mu_{x+t}\,\mu_{y+t}\int_0^{n-t} u^2\,e^{-\delta u}\,du -$$

$$-\,\bar{a}_{\overline{n-t}|}\,\mu_x\,\mu_y\int_0^{n} u^2\,e^{-\delta u}\,du - (\mu_y\,\mu_{x+t} + \mu_x\,\mu_{y+t})\int_0^{n-t} u\,e^{-\delta u}\,du\int_0^{n} u\,e^{-\delta u}\,du\Big] +$$

$$+\,\frac{2}{\bar{a}^3_{\overline{n}|}}\,\bar{a}_{\overline{n-t}|}\,\mu_x\,\mu_y\,\Big(\int_0^{n} u\,e^{-\delta u}\,du\Big)^2,$$

ossia

$$K(x,\ y,\ t,\ n) \cong \mu_x\,\mu_y\,\frac{\bar{a}_{\overline{n-t}|}}{\bar{a}^3_{\overline{n}|}}\,[2\,(\bar{I}a)^2_{\overline{n}|} - \bar{a}_{\overline{n}|}\,(\bar{I}a^2)_{\overline{n}|}] + \tag{9}$$

$$+\,\frac{\mu_{x+t}\,\mu_{y+t}}{\bar{a}^2_{\overline{n}|}}\left[\bar{a}_{\overline{n}|}\,(\bar{I}a^2)_{\overline{n-t}|} - \left[\frac{\mu_x}{\mu_{x+t}} + \frac{\mu_y}{\mu_{y+t}}\right](\bar{I}a)_{\overline{n}|}\,(\bar{I}a)_{\overline{n-t}|}\right],$$

dove i simboli $(\bar{I}a)_{\overline{n}|}$, $(\bar{I}a^2)_{\overline{n}|}$ indicano i valori attuali, nel caso continuo, delle ben note rendite certe, crescenti secondo la successione dei numeri naturali e secondo la successione dei quadrati dei numeri stessi.

Partendo dalla formula (8), si potrebbero trovare altre espressioni approssimate del termine correttivo $K(x,\ y,\ t,\ n)$ nel caso che la durata n non sia breve, ma non ritengo di dover insistere sull'argomento.

In base alla (9) la formula (7) resta quindi cosí corretta

$${}_tV_{xy} \cong {}_tV_x + {}_tV_y - V_{\overline{t}|} - K(x,\ y,\ t,\ n).$$

6. – Un'altra applicazione della formula (2) a questioni riguardanti le assicurazioni del ramo vita può farsi, per esempio, nel caso dell'assicurazione temporanea di morte. Precisamente, è facile stabilire, mediante la (2), un legame fra il premio annuo $P'_{xy,\overline{n}|}$ relativo a due teste x, y e i singoli premi annui $P'_{x,\overline{n}|}$, $P'_{y,\overline{n}|}$, essendo n la durata dell'assicurazione.

Infatti, ricordando che

$$P'_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{/n}\mathbf{a}_x} - d - \frac{{}_nE_x}{{}_{/n}\mathbf{a}_x},$$

$$P'_{xy,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{/n}\mathbf{a}_{xy}} - d - \frac{{}_nE_{xy}}{{}_{/n}\mathbf{a}_{xy}}$$

(dove d indica il tasso tecnico di sconto), consideriamo la funzione

$$f(\alpha,\ \beta) = \frac{\psi(\alpha,\ \beta)}{\varphi(\alpha,\ \beta)}, \tag{10}$$

essendo

$$\psi(\alpha,\ \beta) = 1 - (l_{x+n}/l_x)^\alpha\ (l_{y+n}/l_y)^\beta\ e^{-\delta n},$$

$$\varphi(\alpha,\ \beta) = \int_0^n (l_{x+t}/l_x)^\alpha\ (l_{y+t}/l_y)^\beta\ e^{-\delta t}\ dt\,.$$

I premi annui, che c'interessano, hanno evidentemente, nel caso continuo, le seguenti espressioni:

$$P'_{xy,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{/n}\bar{a}_{xy}}(1 - {}_nE_{xy}) - \delta = f(1,\ 1) - \delta\,,$$

$$P'_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{/n}\bar{a}_x}(1 - {}_nE_x) - \delta = f(1,\ 0) - \delta\,,$$

$$P'_{y,\overline{n}|} = \frac{1}{{}_{/n}\bar{a}_y}(1 - {}_nE_y) - \delta = f(0,\ 1) - \delta\,,$$

e perciò, qualora si osservi che $f(0,\ 0) - \delta = 0$, in virtù della (2) si deduce la formula

$$P'_{xy,\overline{n}|} = P'_{x,\overline{n}|} + P'_{y,\overline{n}|} + S\,, \tag{11}$$

essendo

$$S = \sum_2^\infty{}_k \frac{1}{k!} P_k\,,$$

con riferimento alla funzione (10).

Resta cosí dimostrato che, nell'assicurazione temporanea di morte, il premio annuo relativo a due teste e i premi annui relativi alle singole teste sono legati fra loro mediante la relazione (11).

Dalla (11) segue poi la formula approssimata

$$P'_{xy,\overline{n}|} \cong P'_{x,\overline{n}|} + P'_{y,\overline{n}|}\,, \tag{12}$$

analoga a quella di LIDSTONE, per la quale si può assumere come termine correttivo il primo termine della serie S, cioè l'espressione

$$U(x,\ y,\ n) = f_{\alpha\beta}(0,\ 0) = \frac{1}{\varphi^2(0,\ 0)}\left[\varphi\ \psi_{\alpha\beta} - \varphi_\alpha\ \psi_\beta - \varphi_{\alpha\beta}\ \psi - \varphi_\beta\ \psi_\alpha\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}} +$$

$$+ \frac{2}{\varphi^3(0,\ 0)}\left[\psi\,\varphi_\alpha\,\varphi_\beta\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0}}\,,$$

ossia

$$U(x,\ y,\ n) = (e^{-\delta n}/\,\bar{a}^2_{\overline{n}|})\Big[-\bar{a}_{\overline{n}|}\log\,(l_{x+n}/l_x)\cdot\log\,(l_{y+n}/l_y) + \tag{13}$$

$$+ \log\,(l_{y+n}/l_y)\cdot\int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot e^{-\delta t}\,dt + \log\,(l_{x+n}/l_x)\cdot\int_0^n \log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\,dt\Big] +$$

$$+ \left\{(1 - e^{-\delta n})/\,\bar{a}^3_{\overline{n}|}\right\}\Big[2\int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot e^{-\delta t}\,dt\int_0^n \log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\,dt -$$

$$- \bar{a}_{\overline{n}|}\int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot\log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\,dt\Big]\,.$$

Secondo le varie applicazioni numeriche, che interessano, si potranno ricavare dalla (13) espressioni approssimate di $U(x,\ y,\ n)$ e, in luogo della (12), si potrà scrivere la formula più approssimata

$$P'_{xy,\overline{n}|} \cong P'_{x,\overline{n}|} + P'_{y,\overline{n}|} + U(x,\ y,\ n)\,.$$

7. – Le considerazioni del n. **6** si applicano evidentemente al caso dell'assicurazione vita intera a premi vitalizi, che indicheremo con i simboli P_{xy}, P_x, P_y.

Qualora si osservi che

$$\lim_{n\to\infty}\left\{e^{-\delta n}\log\,(l_{x+n}/l_x)\right\} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\left\{e^{-\delta n}\log\,(l_{x+n}/l_x)\cdot\log\,(l_{y+n}/l_y)\right\} = 0\,,$$

dalla (13) si deduce, passando al limite per $n \to \infty$, l'espressione

$$U(x,\, y,\, +\infty) = U(x,\, y) =$$

$$= \delta^3 \left[2 \int_0^{+\infty} \log\,(l_{x+t}/l_x) \cdot e^{-\delta t}\, dt \int_0^{+\infty} \log\,(l_{y+t}/l_y) \cdot e^{-\delta t}\, dt - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\delta} \int_0^{+\infty} \log\,(l_{x+t}/l_x) \cdot \log\,(l_{y+t}/l_y) \cdot e^{-\delta t}\, dt \right].$$

Una espressione approssimata di $U(x,\, y)$ si ricava sostituendo, in entrambi gli integrali, a $\log(l_{x+t}/l_x)$ una medesima media h_x dei valori che il logaritmo stesso assume al variare di t, e a $\log(l_{y+t}/l_y)$ una medesima media h_y dei valori del logaritmo, dedotti in modo analogo. Segue quindi

$$U(x,\, y) \cong \delta\, h_x\, h_y$$

e in conseguenza si ottiene per i premi annui la formula corretta

$$P_{xy} \cong P_x + P_y + d\, h_x\, h_y,$$

dalla quale, ricordando che

$$P_x = \frac{1}{\mathbf{a}_x} - d\,, \qquad P_{xy} = \frac{1}{\mathbf{a}_{xy}} - d\,,$$

discende l'altra

$$\frac{1}{\mathbf{a}_{xy}} \cong \frac{1}{\mathbf{a}_x} + \frac{1}{\mathbf{a}_y} - \frac{1}{\mathbf{a}_{\overline{\infty}|}} + d\, h_x\, h_y\,.$$

8. – Le considerazioni esposte al n. **2** si possono estendere al caso di funzioni di tre (o più) variabili. Mi occuperò ora brevemente di tale questione.

Supponiamo che una funzione $f(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$ di tre variabili sia sviluppabile in serie di MAC-LAURIN in un campo connesso dello spazio contenente il cubo, di cui due vertici opposti siano l'origine $(0,\, 0,\, 0)$ e il punto $(1,\, 1,\, 1)$.

Consideriamo quindi i quattro sviluppi in serie seguenti:

$$f(1,\, 1,\, 1) = f(0,\, 0,\, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\partial}{\partial\gamma} \right]^k f(\alpha,\, \beta,\, \gamma) \right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}},$$

$$f(1,\, 0,\, 0) = f(0,\, 0,\, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \right]^k f(\alpha,\, 0,\, 0) \right]_{\alpha=0},$$

$$f(0,\, 1,\, 0) = f(0,\, 0,\, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\beta} \right]^k f(0,\, \beta,\, 0) \right]_{\beta=0},$$

$$f(0,\, 0,\, 1) = f(0,\, 0,\, 0) + \sum_1^\infty{}_k \frac{1}{k!} \left[\left[\frac{\partial}{\partial\gamma} \right]^k f(0,\, 0,\, \gamma) \right]_{\gamma=0}.$$

Risulta evidentemente

$$f(1,\ 1,\ 1) = f(1,\ 0,\ 0) + f(0,\ 1,\ 0) + f(0,\ 0,\ 1) - 2\,f(0,\ 0,\ 0) + S, \tag{14}$$

dove con S è stata indicata brevemente la serie formata da tutti e soli i termini dello sviluppo di $f(1,\ 1,\ 1)$ contenenti le derivate parziali miste (dal secondo ordine incluso in poi).

È chiaro che la formula riveste un carattere generale e che si può applicare allo studio di questioni, relative a tre (o più) teste, analoghe a quelle esposte nei nn. precedenti. Mi limiterò soltanto a trattare l'assicurazione mista su tre teste x, y, z, di durata n, per stabilire una relazione fra il premio $P_{xyz,\overline{n}|}$ e i premi $P_{x,\overline{n}|}$, $P_{y,\overline{n}|}$, $P_{z,\overline{n}|}$, relativi alle singole teste.

Allo scopo consideriamo la funzione

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \frac{1}{\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma)}\,, \tag{15}$$

essendo

$$\varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = \int_0^n (l_{x+t}/l_x)^\alpha\,(l_{y+t}/l_y)^\beta\,(l_{z+t}/l_z)^\gamma\,e^{-\delta t}\,dt\,.$$

Nel caso continuo il premio $P_{xyz,\overline{n}|}$ ha evidentemente l'espressione

$$P_{xyz,\overline{n}|} = \frac{1}{\varphi(1,\ 1,\ 1)} - \delta = f(1,\ 1,\ 1) - \delta\,,$$

mentre

$$P_{x,\overline{n}|} = \frac{1}{\varphi(1,\ 0,\ 0)} - \delta = f(1,\ 0,\ 0) - \delta\,,$$

$$P_{\overline{n}|} = \frac{1}{\varphi(0,\ 0,\ 0)} - \delta = f(0,\ 0,\ 0) - \delta\,.$$

In virtù della formula (14) risulta quindi la relazione fra i premi

$$P_{xyz,\overline{n}|} = P_{x,\overline{n}|} + P_{y,\overline{n}|} + P_{z,\overline{n}|} - 2P_{\overline{n}|} + S\,,$$

dove con S si è indicata la serie che figura nella (14), con riferimento alla funzione (15).

Per la mista su tre teste sussiste perciò la formula approssimata

$$P_{xyz,\overline{n}|} \cong P_{x,\overline{n}|} + P_{y,\overline{n}|} + P_{z,\overline{n}|} - 2P_{\overline{n}|}\ , \tag{16}$$

analoga alla formula (1), e l'errore, che si commette applicandola, è rappresentato dalla serie S.

Come termine correttivo di tale formula si può assumere, evidentemente, il primo termine della serie S, cioè l'espressione

$$H(x,\ y,\ z,\ n) = f_{\alpha\beta}(0,\ 0,\ 0) + f_{\beta\gamma}(0,\ 0,\ 0) + f_{\alpha\gamma}(0,\ 0,\ 0) =$$

$$= \frac{1}{\varphi^3(0,\ 0,\ 0)} \left[(2\ \varphi_\alpha\, \varphi_\beta - \varphi\, \varphi_{\alpha\beta}) + (2\ \varphi_\beta\, \varphi_\gamma - \varphi\, \varphi_{\beta\gamma}) + (2\ \varphi_\alpha\, \varphi_\gamma - \varphi\, \varphi_{\alpha\gamma})\right]_{\substack{\alpha=0\\ \beta=0\\ \gamma=0}}\ ,$$

ossia

$$H(x,\ y,\ z,\ n) = \frac{1}{\bar{a}^3_{\overline{n}|}} \Big[2 \int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot e^{-\delta t}\, dt \int_0^n \log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\, dt - \tag{17}$$

$$- \bar{a}_{\overline{n}|} \int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot \log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\, dt + 2 \int_0^n \log\,(l_{y+t}/l_y)\cdot e^{-\delta t}\, dt \int_0^n \log\,(l_{z+t}/l_z)\cdot e^{-\delta t}\, dt -$$

$$- \bar{a}_{\overline{n}|} \int_0^n \log(l_{y+t}/l_y)\cdot \log(l_{z+t}/l_z)\cdot e^{-\delta t}\, dt + 2 \int_0^n \log\,(l_{z+t}/l_z)\cdot e^{-\delta t} dt \int_0^n \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot e^{-\delta t}\, dt -$$

$$- \bar{a}_{\overline{n}|} \int_0^n \log\,(l_{z+t}/l_z)\cdot \log\,(l_{x+t}/l_x)\cdot e^{-\delta t}\, dt\Big]\ .$$

Essendo $\bar{t}$ un conveniente punto fissato nell'intervallo $(0,\ n)$, per questa espressione si può assegnare la forma approssimata

$$H(x,\ y,\ z,\ n) \cong \frac{n v^n}{2\ \mathbf{a}^2_{\overline{n}|}} \left[\log\,(l_{x+\bar{t}}/l_x)\cdot \log\,(l_{x+n}/l_x) + \right.$$

$$\left. + \log\,(l_{y+\bar{t}}/l_y)\cdot \log\,(l_{y+n}/l_y) + \log\,(l_{z+\bar{t}}/l_z)\cdot \log\,(l_{z+n}/l_z)\right],$$

che migliora sensibilmente il grado di approssimazione della formula (16), la quale può scriversi, più correttamente, cosí

$$P_{xyz,\overline{n}|} \cong P_{x,\overline{n}|} + P_{y,\overline{n}|} + P_{z,\overline{n}|} - 2P_{\overline{n}|} + H(x,\ y,\ z,\ n)\ .$$

* * *