Riv. Mat. Univ. Parma (2) 6 (1965), 37-54

GIOVANNI MELZI (*)

Una caratterizzazione del toro mediante integrali. (**)

Introduzione.

Sono ben noti (1) certi teoremi affermanti che la condizione necessaria e sufficiente affinchè una varietà differenziabile bidimensionale V_2 contenuta nello spazio ordinario S_3 sia una sfera è che risulti

$$\int_{\gamma} \varphi = 0 ,$$

essendo γ un qualunque ciclo unidimensionale di V_2 ed essendo φ una forma differenziale lineare opportuna, dipendente solo dalla linea γ oppure dipendente sia dalla γ che dalla superficie V_2.

Nel primo caso l'integrando φ dipende solo dalla immersione del ciclo γ nello spazio S_3 in cui è immersa anche la V_2, nel senso che la forma φ è metricamente covariante rispetto alla sola linea γ. In tal caso si hanno teoremi che possono dirsi di *caratterizzazione assoluta.*

Nel secondo caso la forma φ dipende anche dalla immersione di γ nella superficie V_2, nel senso che la φ è metricamente covariante rispetto all'ente costituito dalla superficie V_2 e dalla linea γ su di essa tracciata. Si hanno allora dei teoremi che diremo di *caratterizzazione relativa.*

I teoremi suddetti possono essere estesi in varie direzioni, ottenendosi in tal modo nuove caratterizzazioni delle ipersfere e delle sfere immerse in spazi più generali di quello euclideo ordinario.

Limitandoci alla superficie dello spazio ordinario possiamo ora cercare di generalizzare i teoremi sopra citati proponendoci di caratterizzare, mediante

---

(*) Indirizzo: Via Monfalcone 14, Milano, Italia.

(**) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 30 del C.N.R. – Ricevuto il 23-X-1965.

(1) Cfr. la Bibliografia posta alla fine del presente lavoro, alla quale sempre rimandano i numeri posti entro parentesi quadre.

opportune relazioni integrali, altre superfici più generali della sfera. La superficie che per tale via si incontra più spontaneamente e dà risultati più interessanti è il *toro*.

Nel presente lavoro assegneremo appunto un teorema di *caratterizzazione relativa* del toro (n. **10**).

I metodi impiegati in questa ricerca si fondano essenzialmente sul concetto di *connessione metrica* in una varietà differenziabile, opportunamente assegnata col metodo del riferimento mobile nel senso di É. CARTAN, e sul concetto di *struttura fibrata tangente* ad una varietà differenziabile immersa in uno spazio euclideo.

Alcune particolarità del metodo impiegato sembrano avere interesse e portata più generale di quella attualmente occorrente e sono perciò esposti autonomamente nei nn. 1-7, con un'ampiezza alquanto maggiore di quella che sarebbe strettamente richiesta.

Il simbolismo che impiegheremo e anche molti suoi presupposti concettuali si ricollegano alla Nota [1] già citata, alla quale faremo sempre tacito ricorso.

1. – Sia V_2 una superficie compatta e orientabile, munita di una struttura differenziabile di Classe $\mathcal{C}^2$, e immersa nell'ordinario spazio euclideo tridimensionale S_3.

Sia inoltre

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{T} \,|\, \boldsymbol{n}] \tag{1.1}$$

un complesso orizzontale costituito da due versori mutuamente ortogonali

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{t}_1 \; \boldsymbol{t}_2]$$

e da un versore $\boldsymbol{n}$ ortogonale ai due precedenti.

Sia h l'operatore a destra che applicato alla terna $\boldsymbol{R}$ dà la nuova terna $\overline{\boldsymbol{R}}$:

$$\overline{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}\, h,$$

essendo

$$\boldsymbol{R} = \overline{\boldsymbol{R}} \left[\begin{array}{c|c} H & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right], \tag{1.2}$$

ed essendo H la matrice quadrata ortogonale data da

$$H = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{1.3}$$

Come si vede, h può essere interpretato geometricamente come una rotazione di ampiezza α di $\boldsymbol{R}$ attorno al versore $\boldsymbol{n}$. Gli operatori h formano ovviamente un gruppo abeliano che denoteremo con $\mathcal{H}$. Porremo inoltre

$$\mathfrak{F} = \boldsymbol{R}\,\mathcal{H}\,, \tag{1.4}$$

cioè indicheremo con $\mathfrak{F}$ lo spazio topologico i cui punti sono i complessi $\boldsymbol{R}h$ al variare di h in $\mathcal{H}$.

Sia ora $\mathfrak{F}(X)$ lo spazio topologico costituito da tutte le terne trirettangole (destrorse):

$$\boldsymbol{R}(X) = [\boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{n}]$$

costituite da due versori ortogonali tangenti in X alla V e dal versore $\boldsymbol{n}$ normale in X alla V medesima (²).

Poniamo

$$\mathfrak{T} = \bigcup_{X\in V_2} \mathfrak{F}(X)\,.$$

Anche $\mathfrak{T}$ ha ovviamente la struttura di varietà differenziabile (tridimensionale) di classe $\mathcal{C}^2$. L'applicazione

$$p: \quad \mathfrak{T} \to V_2$$

che ad ogni terna $\boldsymbol{R}(X)$ fa corrispondere il punto X:

$$p\,\boldsymbol{R}(X) = X$$

definisce in $\mathfrak{T}$ una struttura fibrata (*fascio di fibre secondo Steenrod*):

$$\mathfrak{T} = \{ V_2,\ \mathfrak{F},\ p \}$$

avente per base la superficie V_2, per fibra lo spazio $\mathfrak{F}$ definito dalla (1.4) e per proiezione l'applicazione p definita poco sopra.

Il gruppo $\mathcal{H}$ introdotto più sopra è il gruppo strutturale della struttura fibrata $\mathfrak{T}$.

Chiameremo *fibrato aderente alla* V_2 il fascio $\mathfrak{T}$ di fibre ora introdotto.

Consideriamo ora una sezione diagonale locale $\boldsymbol{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$ del fibrato $\mathfrak{T}$:

(²) Scelto in base ad una prefissata orientazione della V_2.

essa associa ad ogni punto $X \in p\mathfrak{R} \subset V_2$ una terna trirettangola $\boldsymbol{R}(X)$ costituita da due versori $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$ tangenti in X alla V_2 e dal versore normale, terna che diremo *aderente alla* V_2 *in* X. La sezione diagonale $\mathfrak{R}$ sarà detta *riferimento locale* sulla V_2. Se poi $p\mathfrak{R}$ coincide con V_2, cioè se $\mathfrak{R}$ è una *sezione diagonale globale* del fibrato $\mathfrak{T}$, il riferimento sarà detto anch'esso *globale*, o *definito globalmente*. Qui e nel seguito supporremo sempre tacitamente che ogni riferimento locale $\mathfrak{R}$ da noi considerato sia di classe $\mathcal{C}^1$.

2. – I differenziali $\mathrm{d}X$ e $\mathrm{d}\boldsymbol{R}$, rispettivamente del punto X e dei vettori costituenti la terna $\boldsymbol{R}(X)$, possono esprimersi mediante un sistema differenziale del tipo:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X = \boldsymbol{T}\,\xi_{-1} \quad (^3) & (2.1) \\ \mathrm{d}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\,\Phi\,, & (2.2) \end{cases}$$

essendo ξ un complesso orizzontale di due forme lineari indipendenti nelle coordinate locali di X in una carta locale di V_2, ed essendo Φ una matrice emisimmetrica di forme differenziali lineari. Ricordando la (1.1), la (2.2) può essere scritta nella forma

$$\mathrm{d}[\boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{n}] = [\boldsymbol{T}\,|\boldsymbol{n}]\left[\begin{array}{c|c} \varrho & \nu_{-1} \\ \hline -\nu & 0 \end{array}\right], \tag{2.3}$$

essendo ϱ una matrice emisimmetrica di tipo (2.2), ed essendo ν un complesso [1.2] di forme differenziali lineari.

Le condizioni di integrabilità del sistema differenziale (2.1), (2.2), condizioni che nel presente lavoro si supporranno sempre verificate, portano, tra l'altro (4), che i complessi ν e ξ siano legati dalla relazione

$$\nu_{-1} = A\,\xi_{-1}, \tag{2.4}$$

essendo A una *matrice scalare simmetrica*.

---

(3) Con ξ^{-1} viene indicata la matrice trasposta (in questo caso il complesso verticale trasposto) di ξ. Il prodotto fra matrici dei vari tipi (scalari, di forme, di vettori) è sottoposto alle restrizioni e alle regole esposte in [1] al § **1.2**.

(4) Cfr. [1], § **2.4**.

La (2.4) può interpretarsi come una biiezione lineare dello spazio vettoriale tangente in X alla V_2 in se stesso. Tale biiezione sarà detta, secondo l'uso corrente, *dilatazione di curvatura* della V_2 in X.

3. – Consideriamo una sezione diagonale (locale) $\mathfrak{R}$ del fibrato aderente $\mathfrak{T}$ alla V_2 e sia

$$s: \quad \mathfrak{R} \to \mathcal{H}$$

una applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ di $\mathfrak{R}$ nel gruppo strutturale $\mathcal{H}$ definito nel n. **1**. È ovvio che applicando al generico triedro $\boldsymbol{R}(X)$ l'operatore

$$h = s\,\boldsymbol{R}(X)$$

si otterrà un nuovo triedro $\overline{\boldsymbol{R}}(X)$, per modo che dal riferimento locale $\mathfrak{R}$ si otterrà un nuovo riferimento locale $\overline{\mathfrak{R}}$.

Rispetto ad un opportuno sistema di coordinate locali, introducendo gli enti $\overline{\boldsymbol{T}}$, $\bar{\varrho}$, $\bar{\nu}$,... definiti nel n. **2** ma relativi al nuovo riferimento locale $\mathfrak{R}$ si ha, fatti alcuni semplici calcoli [5]:

$$\bar{\varrho} = \varrho + \mathrm{d}\alpha\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$\overline{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}\,H^{-1} = \boldsymbol{T}\,H_{-1} \ \text{[6]}, \tag{3.2}$$

$$\bar{\nu}_{-1} = H_{-1}, \tag{3.3}$$

$$\bar{\xi}_{-1} = H\,\xi_{-1}, \tag{3.4}$$

essendo H e α rispettivamente la matrice ortogonale e lo scalare che figurano nella (1.3).

4. – Indicata con

$$g: \quad \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$$

una applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ del fibrato aderente relativo alla superficie V_2

---

(5) Cfr. [1], § 4.3.

(6) Per la supposta ortogonalità di H, l'inversa H^{-1} e la trasposta H_{-1} di tale matrice *coincidono*.

nel campo reale $\mathfrak{J}$, è ben noto che g viene detta *funzione invariante dei punti di* V_2 se essa *risulta costante su ogni fibra di* $\mathfrak{F}$, cioè se per ogni $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}$, e per ogni $X \in V_2$, da $\boldsymbol{R} \in \mathfrak{F}(X)$ e $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}(X)$ segue $g\,\boldsymbol{R} = g\,\boldsymbol{R}'$.

Sia ora f una applicazione di classe $\mathcal{C}^1$ del fibrato aderente relativo alla V_2 nel fibrato tangente V, sottoposta alla condizione

$$f\mathfrak{F}(X) \subset \tau(X), \tag{4.1}$$

essendo $\tau(X)$ lo spazio vettoriale dei vettori tangenti in X alla V_2. Ciò significa che la f muta ogni terna trirettangola $\boldsymbol{R}(X)$ in un vettore $f\,\boldsymbol{R}(X)$ tangente in X alla V_2. Diremo, secondo l'uso corrente, che g definisce una funzione vettoriale invariante su V_2, ovvero un *campo vettoriale su* V_2, se f è costante su ogni fibra di $\mathfrak{F}$; cioè se per ogni $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}$ e per ogni $X \in V_2$, da $\boldsymbol{R} \in \mathfrak{F}(X)$ e $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}(X)$ segue $f\,\boldsymbol{R} = f\,\boldsymbol{R}'$.

Infine sia $\mu(X)$ lo spazio vettoriale costituito da tutti gli operatori lineari

$$m: \quad \tau(X) \to \tau(X) \tag{4.2}$$

che mutano lo spazio vettoriale tangente in X alla V_2 in se stesso. Diciamo M lo spazio topologico fibrato i cui punti sono gli operatori m e le cui fibre sono gli spazi $\mu(X)$:

$$\mathrm{m} = \bigcup_{X \subset V_2} \mu(X),$$

e sia F una applicazione $\mathcal{C}^1$ del fibrato aderente $\mathfrak{F}$ nel fibrato m, sottoposta alla condizione

$$F\,\mathfrak{F}(X) \subset \mu(X).$$

Diremo ancora che F definisce una funzione tensoriale invariante su V_2, ovvero un *campo tensoriale su* V_2, se F è costante su ogni fibra $\mathfrak{F}(X)$, cioè se per ogni $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}$ e per ogni $X \in V_2$, da $\boldsymbol{R} \in \mathfrak{F}(X)$ e $\boldsymbol{R}' \in \mathfrak{F}(X)$ segue che $F\,\boldsymbol{R}$ e $F\,\boldsymbol{R}'$ sono lo stesso operatore lineare.

È del tutto ovvio che se l'applicazione f data dalla (4.1) definisce un campo vettoriale e se l'applicazione F data dalla (4.2) definisce un campo tensoriale, allora, ponendo

$$F\,\mathfrak{F}(X) = m, \qquad f\,\mathfrak{F}(X) = \boldsymbol{u},$$

si definisce in ogni punto X il vettore tangente

$$\boldsymbol{v}(X) = m\,\boldsymbol{u}(X)$$

in modo che anche l'applicazione

$$f_1: \quad \mathfrak{T} \to \mathfrak{V}$$

definita da

$$f_1\,\mathfrak{T}(X) = m\,\boldsymbol{u}$$

dà luogo ad un nuovo campo vettoriale su V_2.

Ciò si può esprimere scrivendo brevemente

$$\boldsymbol{v} = m\,\boldsymbol{u}$$

e intendendo che tale eguaglianza valga in ogni punto $X \in V_2$ e sia indipendente dal riferimento $\mathfrak{R}$, abbia cioè carattere *intrinseco* rispetto alla superficie V_2.

5. – Un operatore lineare m, funzione tensoriale dei punti X di V_2 verrà qui detto *isotropo* se, in ogni punto $X \in V_2$, muta un vettore $\boldsymbol{u} \in \tau(X)$ in un vettore $\boldsymbol{v} = \varrho\boldsymbol{u}$, essendo ϱ uno scalare dipendente dal punto X.

In una carta locale di V_2, rappresentando con

$$u = [u_1\, u_2]$$

il complesso delle componenti di $\boldsymbol{u}$ nel riferimento $\boldsymbol{R}(X)$, l'operatore lineare m può essere interpretato come una trasformazione lineare

$$v_{-1} = M\,u_{-1},$$

essendo M una matrice scalare di tipo (2.2) ed essendo

$$v = [v_1\, v_2]$$

il complesso delle componenti del vettore $\boldsymbol{v}$ corrispondente di $\boldsymbol{u}$. L'isotropia di m si traduce allora nel fatto che *la matrice M è multipla secondo lo scalare ϱ della matrice identica.*

È immediato verificare che tale circostanza, caratterizzante gli operatori m isotropi, non dipende dalla scelta dei riferimento locale $\mathfrak{R}$.

6. – Sia g una funzione invariante dei punti di V_2 e sia M un riferimento locale relativo a tale superficie. Consideriamo il differenziale totale dg della funzione rispetto alle due coordinate locali di V_2 in una carta permissibile della V_2. Poichè (n. 2) le due forme lineari costituenti il complesso ξ sono linearmente indipendenti [7], la forma lineare dg potrà esprimersi nella forma

$$\mathrm{d}g = G\,\xi_{-1}, \tag{6.1}$$

essendo

$$G = [g_1\, g_2]$$

un complesso di funzioni delle coordinate locali, funzioni univocamente determinate dallo scalare g. Cambiando il riferimento locale $\mathfrak{R}$, cioè operando sul triedro $\boldsymbol{R}(X)$ una rotazione rappresentata dalla formula (1.2), per l'invarianza di g e perciò di dg, risulterà:

$$\mathrm{d}g = \overline{G}\,\overline{\xi}_{-1}\,.$$

Ricordando la (3.3) si ha poi

$$\mathrm{d}g = \overline{G}\,H\,\xi_{-1}\,,$$

e di qui, per confronto con la (6.1):

$$\overline{G}_{-1} = HG_{-1}\,.$$

Ciò si interpreta ovviamente dicendo che G è il complesso delle componenti di un vettore, funzione del punto $X \in V_2$, indipendente dal riferimento locale $\mathfrak{R}$. Il vettore introdotto in tale modo è il *gradiente* di g e sarà indicato secondo l'uso, con grad g.

7. – Sia ancora g una funzione invariante dei punti della superficie V_2 e consideriamo il vettore grad g (n. 6). Consideriamo inoltre il prodotto tensoriale

---

(7) Cfr. [1], § 2.4.

$\tau^*(X) \otimes \tau(X)$ dello spazio $\tau^*(X)$ duale dello spazio tangente in X alla V_2 per lo spazio tangente medesimo. Il prodotto tensoriale grad* $g \otimes$ grad g del duale di grad g per questo vettore è un *operatore lineare invariante*. Con riferimento ad un sistema di coordinate locali, detto

$$G = [g_1\ g_2]$$

il complesso (orizzontale) delle componenti di grad g, l'operatore lineare introdotto qui sopra si rappresenterà col prodotto matriciale

$$G_{-1}G = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} [g_1 g_2] = \begin{bmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_2 g_1 & g_2^2 \end{bmatrix}.$$

Come si vede, tale operatore lineare può anche interpretarsi come una *omografia degenere* dello spazio tangente $\tau(X)$ in sè medesimo. Questa omografia muta un qualunque vettore di componenti

$$U = [u_1\ u_2]$$

in un vettore di componenti U' *parallelo* a grad g; infatti si ha

$$U'_{-1} = (G_{-1}G)U_{-1} = G_{-1}(GU_{-1})$$

e in questa eguaglianza, essendo GU_{-1} uno scalare, si legge appunto il parallelismo del vettore di componenti U' e del vettore di componenti G.

8. – Per il seguito ci interessa di dare una *caratterizzazione differenziale* del toro. Tale caratterizzazione è contenuta nel seguente

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie chiusa differenziabile V_2 di classe $\mathcal{C}^3$ dello spazio ordinario sia un toro di raggi R, r* (8) *è che, dette C_1 e C_2 le curvature principali di V_2, scelte in ordine opportuno l'operatore lineare*

$$a + r^2(C_1 - C_2)b \tag{8.1}$$

(8) Con r indichiamo il raggio comune dei cerchi meridiani del toro e con R la distanza dei centri di tali cerchi dall'asse di rotazione del toro medesimo.

risulti isotropo in ogni punto $X \in V_2$, *essendo:*

a) *a l'operatore lineare di curvatura in* X (n. 2);

b) *b l'operatore lineare* (n. 6) grad* $F \otimes$ grad F;

c) F *la funzione invariante*

$$F = -\operatorname{arcsen}\frac{R + Rr(C_1 - 1/r)}{r^2(C_1 - 1/r)} \tag{8.2}$$

In questo numero ci limiteremo a dimostrare che la condizione è *necessaria*, rimandando la dimostrazione della sua sufficienza al numero successivo. Partiamo dunque dall'ipotesi che V_2 sia un toro di raggi R, r. Dato il carattere manifestamente invariantivo dell'enunciato procederemo facendo uso di una carta locale opportuna particolarmente comoda di V_2 e di un particolare riferimento locale $\mathfrak{R}$. Passando poi da una carta locale ad altre opportune e cambiando comunque il riferimento locale, il Teorema acquisterà valore generale e globale.

Rappresenteremo localmente la superficie in questione mediante le equazioni

$$\begin{cases} x = (R + r \operatorname{sen} \psi) \cos \varphi \\ y = (R + r \operatorname{sen} \psi) \operatorname{sen} \varphi \\ z = r \cos \psi \end{cases} \qquad (0 < \varphi < 2\pi,\ \ 0 < \psi < 2\pi),$$

nelle quali, come si vede, φ e ψ hanno il significato rispettivamente di longitudine e di colatitudine di un punto X, il quale ha a sua volta coordinate x, y, z in un opportuno sistema di assi cartesiani ortogonali in S_3.

Con calcoli che non presentano alcun interesse concettuale, e che perciò non riportiamo, si possono scrivere le formule (2.1), (2.2) relative ad un riferimento aderente $\mathfrak{R}$ per il quale il triedro $\boldsymbol{R}$ consta di due versori tangenti rispettivamente al parallelo e al meridiano per X e del versore normale $\boldsymbol{n}$ rivolto verso l'esterno del toro. In tali formule il complesso ξ e la matrice Φ sono rispettivamente date dalle relazioni

$$\xi_{-1} = \begin{bmatrix} (R + r \operatorname{sen}\psi)\, d\varphi \\ -r\, d\psi \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -\cos\psi\, d\varphi & \operatorname{sen}\psi\, d\varphi \\ \cos\psi\, d\varphi & 0 & -d\psi \\ \hline -\operatorname{sen}\psi\, d\varphi & d\psi & -0 \end{array}\right]. \tag{8.4}$$

La dilatazione di curvatura (n. 2) può nel nostro caso essere rappresentata con l'equazione matriciale (2.4), nella quale l'operatore lineare a, pensato come una matrice A, presenta la *forma canonica*:

$$A = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}, \tag{8.5}$$

essendo C_1 e C_2 le curvature principali, date rispettivamente da:

$$C_1 = \frac{\operatorname{sen} \psi}{R + r \operatorname{sen} \psi}, \quad C_2 = \frac{1}{r}. \tag{8.6}$$

Per calcolare il gradiente di F basta porre

$$dF = p_1 \xi_1 + p_2 \xi_2,$$

essendo

$$p = [p_1 \, p_2]$$

il complesso orizzontale delle componenti del gradiente richiesto rispetto ai versori tangenti del triedro $\boldsymbol{R}(X)$. Ricordando l'espressione (8.2) di F e le espressioni (8.3) di ξ_1 e di ξ_2, si trae:

$$p_1 = 0\,, \quad p_2 = 1/r^2. \tag{8.7}$$

Si noti che l'essere nulla la prima componente del gradiente di F è d'accordo col fatto che la prima curvatura C_1, e perciò la funzione F, è costante sui paralleli del toro, che è una superficie di rotazione.

Nel particolare riferimento scelto, l'operatore lineare (8.1) si rappresenta assai comodamente con la matrice $A + r^2(C_1 - C_2)B$, essendo A la matrice (8.5) ed essendo

$$B = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} [p_1 \, p_2] = \begin{bmatrix} p_1^2 & p_1 p_2 \\ p_2 p_1 & p_2^2 \end{bmatrix}$$

la matrice che nel riferimento $\mathfrak{R}$ rappresenta, secondo quanto è detto nel n. 7, il prodotto tensoriale grad* $F \otimes$ grad F. Calcolando la matrice (8.1), tenendo conto delle (8.5), (8.6), (8.7), si trova immediatamente l'identità (rispetto alle coordinate locali φ, ψ):

$$A + r^2 \, (C_1 - C_2) = C_1 \, I\,.$$

essendo I la matrice identica di tipo (2.2), e ciò dimostra la prima parte del Teorema.

9. – Per dimostrare ora che la condizione espressa dal Teorema è *sufficiente* supponiamo che per la superficie V_2 di classe $\mathcal{C}^3$, l'operatore (8.1) sia isotropo. Supporremo inoltre che i parametri R, r che figurano nella espressione di tale operatore siano scalari positivi.

Scegliamo ora un riferimento locale $\mathfrak{R}$ in modo che dette φ, ψ due coordinate locali su V_2, le linee

$$\varphi = \varphi_0 \qquad (\text{cost})$$

e le linee

$$\psi = \psi_0 \qquad (\text{cost})$$

siano *linee di curvatura* per la V.

Questa supposizione non è lecita in relazione agli eventuali *punti sferici* X di V_2, per i quali passano infinite linee di curvatura. Si noti però che una superficie V_2 per la quale ogni punto X sia sferico è notoriamente una *sfera*, cioè un tipo particolare di toro, per modo che in tal caso il Teorema è già dimostrato. Se poi su V_2 esiste un punto non sferico, tale punto ammette un intorno, ogni punto del quale è ancora non sferico, per ovvie ragioni di continuità. A un tale intorno si applica la dimostrazione qui di seguito svolta.

Le matrici ξ_{-1} e Φ che compaiono nelle equazioni (2.1) e (2.2) saranno ora del tipo:

$$\xi_{-1} = \begin{bmatrix} U\,\mathrm{d}\varphi \\ V\,\mathrm{d}\psi \end{bmatrix}, \tag{9.1}$$

$$\Phi = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -G\mathrm{d}\psi - H\,\mathrm{d}\psi & C_1 U\;\mathrm{d}\varphi \\ G\,\mathrm{d}\varphi + H\,\mathrm{d}\psi & 0 & C_2 V\;\mathrm{d}\psi \\ \hline -C_1\,U\,\mathrm{d}\varphi & -C_2 V\,\mathrm{d}\psi & 0 \end{array}\right] \tag{9.2}$$

essendo U, V, G, H quattro funzioni opportune di classe $\mathcal{C}^2$ delle coordinate locali, ed essendo C_1, C_2 le due curvature principali della superficie V_2, anch'esse funzioni $\mathcal{C}^2$ di φ e ψ.

Rispetto al riferimento $\mathfrak{R}$ ora fissato potremo rappresentare l'operatore lineare (8.1) sotto forma di una matrice scalare M che risulterà del tipo

$$M = \begin{bmatrix} C_1 + r^2(C_1 - C_2)p_1^2 & r^2(C_1 - C_2)p_1 p_2 \\ r^2(C_1 - C_2)p_1 p_2 & C_2 + r^2(C_1 - C_2)p_2^2 \end{bmatrix}, \tag{93}$$

essendo C_1 e C_2 gli elementi diagonali della matrice di curvatura (ridotta a forma canonica per ipotesi) ad essendo p_1, p_2 le componenti del vettore gradiente della funzione F. Per la supposta isotropia dell'operatore (8.1), la matrice M deve intanto presentare la forma diagonale e perciò sarà

$$r^2(C_1 - C_2)p_1p_2 = 0 .$$

Dovendo inoltre risultare $C_1 \neq C_2$ si trae subito che una delle due componenti p_1, p_2 del gradiente della funzione F deve risultare nulla. Per fissare le idee supporremo nulla la p_1.

Ricordiamo ora che le componenti del gradiente di F sono legate alle forme $U d\varphi$ e $V d\psi$ dalla relazione (n. 7):

$$dF = p_1 U \, d\varphi + p_2 V \, d\psi$$

che, confrontata colla espressione del differenziale primo di F:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F}{\partial \psi} d\psi,$$

porge

$$p_1 U = \partial F / \partial \varphi = 0 , \tag{9.4}$$

$$\partial F / \partial \psi = p_2 V. \tag{9.5}$$

Dalla prima di queste relazioni si deduce che F, *e perciò anche* C_1, è funzione della sola coordinata locale ψ. La condizione di isotropia della matrice (9.3) dà luogo inoltre alla relazione

$$C_1 = C_2 + r^2(C_1 - C_2)\, p^2 ,$$

che, confrontata colla (9.5), porge:

$$(C_1 - C_2)(1 - r^2 \dot{F}^2 / V^2) = 0 , \tag{9.6}$$

avendo denotato con $\dot{F}$ la derivata ordinaria di F rispetto alla variabile ψ. Da questa relazione, essendo come detto più sopra $C_1 \neq C_2$, si trae ulteriormente

$$\dot{F}^2 = V^2 / r^2$$

e questa relazione dice che anche V è funzione della sola coordinata locale ψ Possiamo allora, con un eventuale cambiamento, di classe $\mathcal{C}^2$, del parametro ψ, supporre che la forma differenziale $V\,\mathrm{d}\psi$ che compare nella (9.1) si riduca alla forma $-\,r\,\mathrm{d}\bar{\psi}$, essendo $\bar{\psi}$ una nuova coordinata locale che, per semplicità, denoteremo ancora con ψ. La relazione (9.6), scritta rispetto alla nuova coordinata locale ψ, dà allora semplicemente, tenendo conto del fatto che la V è ora la costante $-\,r$:

$$\dot{F}^2 = 1\,.$$

Da questa relazione, integrando, si ha

$$F = \pm\,\psi + \psi_0 \qquad (\psi_0 = \mathrm{cost});$$

e non si lede la generalità scegliendo il segno superiore e prendendo inoltre:

$$\psi_0 = 0 \quad (^9)$$

Sarà dunque

$$F = \psi,$$

e, ricordando l'espressione (8.2) di F, si avrà allora, dopo calcoli immediati

$$C_1 = \frac{\mathrm{sen}\psi}{R + r\ \mathrm{sen}\psi}\,. \tag{9.7}$$

Occorre a questo punto ricordare che il complesso ξ_{-1} dato dalla (9.1) e la matrice Φ data dalla (9.2) devono soddisfare alle *condizioni di integrabilità*

$$\begin{cases} \mathrm{d}\xi_{-1} + \varrho \wedge \xi_{-1} = 0 \\[2ex] \mathrm{d}\Phi + \Phi \wedge \Phi = 0 \end{cases}$$

del sistema differenziale (2.1), (2.2), condizioni che, dopo qualche calcolo che

(9) Si riconosce subito dal seguito che l'altra scelta del segno e la scelta di un valore $\psi_0 \neq 0$ per la costante di integrazione portano a concludere che V_2 è ancora un toro, a meno di inessenziali cambiamenti sul parametro ψ.

non riportiamo, portano alle seguenti relazioni

$$\begin{cases} H = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial \psi} - Gr = 0 \\ \dfrac{\partial G}{\partial \psi} + C_1 C_2 U r = 0 \\ \dfrac{\partial (C_1 U)}{\partial \psi} - G C_2 r = 0 \,, \end{cases}$$

nelle quali C_1 ha l'espressione (9.7). Da queste relazioni si ricava che devono sussistere le relazioni

$$\tag{9.8} \begin{cases} H = 0 \\ U = L(R + r \operatorname{sen} \psi) \\ G = L \cos \psi \\ C_2 = 1/r \,, \end{cases}$$

essendo L una arbitraria funzione di classe $\mathcal{C}^1$ della sola coordinata locale φ (cioè una costante rispetto a ψ).

Tenendo conto della (9.7) e delle (9.8), il complesso (9.1) e la matrice (9.2) (avendo fatto $V = -1$), si riducono, dopo un opportuno cambiamento della sola variabile φ, al complesso e alla matrice che figurano nell equazioni (8.3) e (8.4), caratterizzanti a meno di un movimento di S_3 in se stesso, il toro.

L'aperto di superficie considerato in questo numero appartiene dunque ad un toro di raggi R, r e perciò possiamo intanto concludere che *ogni aperto della superficie V_2 il quale non contenga alcun punto sferico della V_2 stessa è torico.* A priori potrebbe accadere che V_2 contenga qualche punto sferico appartenente alla serratura di un aperto A torico. In tal caso la dimostrazione svolta in questo numero non potrebbe estendersi a tutta la superficie V_2. Ma la circostanza ora ricordata non può presentarsi: infatti la funzione continua $C_1 - C_2$ dei punti $X \in V_2$, che non si annulla in alcun punto di A, non può neppure annullarsi sulla eventuale serratura di A, perchè tale funzione possiede ovviamente un minimo $\mu > 0$ sul toro di raggi R, r $(R > 0)$ a cui A appartiene. Il Teorema è pertanto completamente dimostrato.

10. – Consideriamo di nuovo una superficie V_2, differenziabile di classe $\mathcal{C}^3$, e immersa nello spazio ordinario S_3, e sia, al solito, $\mathfrak{R}$ un riferimento aderente a questa superficie. Diremo ancora a e b rispettivamente l'operatore lineare di curvatura e l'operatore lineare ottenuto dal prodotto tensoriale grad* $F \otimes$ grad F nel modo spiegato nel n. **7**, essendo F la funzione invariante (8.2).

Possiamo ora dare una *caratterizzazione integrale della superficie torica* mediante il seguente

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie V_2, differenziabile di classe $\mathcal{C}^3$, immersa nello spazio ordinario S_3, sia un toro di raggi R, r ($R, r > 0$) è che per ogni ciclo unidimensionale $\mathfrak{F}_1$ di classe $\mathcal{C}^3$ appartenente a V_2 risulti*

$$\int_{\mathfrak{F}_1} T\,\mathrm{d}s = -r^2 \int_{\mathfrak{F}_1} (C_1 - C_2) p_1 p_2 \,\mathrm{d}s, \tag{10.1}$$

essendo:

a) *T la torsione di $\mathfrak{F}_1$ nel suo generico punto X e* ds *l'elemento d'arco di tale curva;*

b) *C_1 e C_2 le curvature principali di V_2 nel punto $X \in \mathfrak{F}_1$, scelte in ordine opportuno;*

c) *p_1 e p_2 le componenti del gradiente della funzione*

$$F = -\operatorname{arc\,sen} \frac{R + rR(C_1 - 1/r)}{r^2(C_1 - 1/r)}$$

rispetto ad un riferimento locale $\mathfrak{R}$, per il quale il versore $\boldsymbol{t}_1$ è tangente a $\mathfrak{F}_1$.

La dimostrazione si fonda essenzialmente sull'isotropia dell'operatore lineare (8.1), e su una notevole relazione di omologia dimostrata nel lavoro [**1**] già citato. Perciò procederemo per sommi capi, rimandando per i dettagli a quel lavoro.

Fissiamo anzitutto su V_2 un riferimento locale $\mathfrak{R}$ tale che, in ogni punto $X \in \mathfrak{F}_1$, il versore $\boldsymbol{t}_1$ risulti tangente a $\mathfrak{F}_1$. In ogni carta locale di V_2, il cui dominio contenga qualche punto $X \in \mathfrak{F}_1$, il ciclo $\mathfrak{F}_1$ potrà rappresentarsi coll'equazione differenziale (completamente integrabile):

$$\xi_2 = 0\,. \tag{10.2}$$

Consideriamo ora la dilatazione dello spazio vettoriale tangente a V_2 in X, data dall'equazione matriciale

$$\mu_{-1} = M\,\xi_{-1},$$

nella quale ξ_{-1} è il complesso (verticale) delle componenti ξ_1, ξ_2 del vettore $\mathrm{d}X$, μ_{-1} è il complesso delle componenti μ_1, μ_2 del vettore corrispondente, e M è la matrice

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} + r^2(C_1 - C_2)p_1^2 & a_{12} + r^2(C_1 - C_2)p_1p_2 \\ a_{21} + r^2(C_1 - C_2)p_2p_1 & a_{22} + r^2(C_1 - C_2)p_2^2 \end{bmatrix},$$

che, in coordinate locali, rappresenta l'operatore lineare (8.1). La seconda componente di μ sarà data dunque da

$$\mu_2 = [a_{21} + r^2(C_1 - C_2)p_1p_2]\xi_1 + [a_{22} + r^2(C_1 - C_2)p_2^2]\xi_2,$$

ossia, ricordando la (10.2), da

$$\mu_2 = a_{21}\xi_1 + r^2(C_1 - C_2)p_1p_2\xi_1\,.$$

D'altra parte la forma lineare $a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2$, cioè la $a_{21}\xi_1$, è legata alla forma lineare $T\,\mathrm{d}s$ dalla relazione di omologia (cfr. [1], §§ **5.4**; **6.3**):

$$T\,\mathrm{d}s = a_{21}\xi_1 + \mathrm{d}\theta,$$

essendo θ una certa funzione scalare dei punti di $\mathfrak{F}_1$, che si dimostra essere monodroma con ragionamenti perfettamente analoghi a quelli svolti in [1] al § **6.1**. La relazione differenziale

$$\mu_2 = T\,\mathrm{d}s - \mathrm{d}\theta + r^2(C_1 - C_2)p_1p_2\xi_1 = 0\,.$$

caratterizza, se valida per ogni ciclo $\mathfrak{F}_1 \subset V_2$, il toro, in forza del Teorema del n. **8** (10).

Integrandola sul ciclo $\mathfrak{F}_1$, e tenendo conto della monodromia di θ, si ottiene la relazione integrale

$$\int_{\mathfrak{F}_1} T\,\mathrm{d}s = -r^2 \int_{\mathfrak{F}_1} (C_1 - C_2)p_1p_2\xi_1\,.$$

Da quest'ultima, osservando che ξ_1 coincide con $\mathrm{d}s$ per il modo con cui è stato scelto il riferimento locale $\mathfrak{R}$, si trae la (10.1), cioè la tesi del nostro Teorema, che risulta cosí dimostrato.

(10) Si osservi infatti che μ_2 si annulla con ξ_2 se e solo se l'operatore lineare (8.1) è isotropo, cioè se e solo se V_2 è un toro, in forza del Teorema qui ricordato.

Si noti, infine, come il Teorema conservi la sua validità anche nel caso (da noi presentemente non considerato) in cui sia $R = 0$, cioè *nel caso in cui il toro si riduca ad una sfera.* In tal caso la (10.1), risultando ovviamente

$$C_1 = C_2,$$

si riduce ad una ben nota relazione integrale, caratterizzante appunto la sfera (cfr. ad es. [2]).

Bibliografia.

[1] G. MELZI, *Proprietà metriche locali di varietà differenziabili immerse in uno spazio euclideo e caratterizzazione integrale delle ipersfere,* Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A **99** (1965), 1-36.

[2] W. SCHERRER, *Eine Kennzeichnung der Kugel,* Vierteljahrschr. Naturforsch. Ges. Zürich **85** Beiblatt (1940), 40-46.

Sunto.

Si dà una caratterizzazione della superficie torica dello spazio ordinario, mediante certi integrali dipendenti dalla superficie e da un arbitrario ciclo unidimensionale su di essa tracciato.

* * *