

FULVIA SKOF e LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

**Variazioni di segno condizionate
e presenza di un punto singolare su un arco. (**)**

§ 1. - Introduzione.

1.1. - Considerazioni preliminari.

La serie di potenze

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

abbia raggio di convergenza 1 ($\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1$). Sulla circonferenza $|z| = 1$ esiste almeno un punto singolare: un classico teorema di FABRY (1) assegna una condizione sufficiente a garantire la presenza di un punto singolare sull'arco Γ_{Δ}

$$(1.1) \quad \Gamma_{\Delta}: \quad z = 1, \quad -\Delta\pi \leq \arg z \leq \Delta\pi \quad (0 < \Delta < 1).$$

Sia $\{n_h\}$ una successione crescente di interi positivi, $0 < \Delta < 1$, $\{\gamma_h \pmod{2\pi}\}$ una successione di orientazioni. Consideriamo la successione di « tratti » di interi positivi

$$(1.2) \quad I_h \equiv ((1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h) \quad (0 < \theta < 1; \quad h = 1, 2, 3, \dots)$$

(*) Indirizzi degli Autori:

F. SKOF, Istituto Matematico dell'Università (Via C. Saldini 50), Milano, Italia.

L. TANZI CATTABIANCHI, Istituto Matematico, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. - Ricevuto il 16-V-1964.

(1) Vedi per es. L. BIEBERBACH [1], pp. 43-44.

e supponiamo che $\{n_h\}$ e $\{\gamma_h\}$ siano scelte in guisa da avere

$$(1.3) \quad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \quad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \rightarrow 1 \quad \text{per } h \rightarrow +\infty.$$

Consideriamo la successione di sequenze di numeri reali

$$(1.4) \quad \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \quad (m \in I_h, \quad h = 1, 2, 3, \dots)$$

e le variazioni di segno da esse presentate.

La condizione di FABRY, denotiamola con (\mathfrak{F}) , si vale di una suddivisione di I_h in intervalli parziali

$$J_{h,l} \quad (l = 1, 2, \dots, k(h)), \quad (\cup_l J_{h,l} = I_h, \quad J_{h,l} \cap J_{h,l'} = \emptyset)$$

ed è imposta dalla distribuzione delle variazioni di segno in $J_{h,l}$. Indichiamo con $j_{h,l}$ l'ampiezza di $J_{h,l}$ e con $\lambda_{h,l}$ il numero delle variazioni di segno della sequenza

$$(1.5) \quad \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}), \quad m \in J_{h,l}.$$

(\mathfrak{F}) « Se esistono $0 \leq \Delta < 1$, $0 < \theta < 1$, $\{n_h\}$, $\{\gamma_h \pmod{2\pi}\}$, $J_{h,l}$ tali che valgano (1.3) e inoltre

$$(1.6) \quad j_h = \operatorname{Max}_l j_{h,l} = o(n_h) \quad (h = 1, 2, 3, \dots)$$

$$(1.7) \quad \lambda_{h,l} \leq \Delta j_{h,l} \quad (\Delta \text{ indipendente da } h, l),$$

allora esiste un punto singolare sull'arco Γ_Δ (1.1) ».

Questa condizione si può esprimere in modo equivalente⁽²⁾ nella seguente forma (\mathfrak{F}') di PÓLYA-BIEBERBACH⁽³⁾:

(\mathfrak{F}') « Detti m^* gli indici $m \in I_h$ che introducono variazioni di segno, se Δ è la densità massimale della successione degli m^* , allora esiste un punto singolare sull'arco Γ_Δ ».

La condizione sufficiente (\mathfrak{F}) potrebbe essere rinforzata qualora anziché computare tutte le variazioni di segno fosse consentito di computarne soltanto alcune: in questo senso è stata introdotta la nozione di ψ -variazione di

⁽²⁾ Circa tale equivalenza si veda M. CUGIANI [3].

⁽³⁾ G. PÓLYA [5], p. 626; L. BIEBERBACH [1], p. 51; M. CUGIANI [3], p. 278.

segno ⁽⁴⁾. Le variazioni in senso ordinario sono le 0-variazioni. Da questo punto di vista G. RICCI [8] ha recentemente stabilito che

(S) « Sia I_h il tratto (1.2) e v_h una successione di interi $v_h \rightarrow +\infty$, $v_h = o(n_h)$; consideriamo la funzione condizionatrice

$$\psi_h(u, v_h) = \exp \left\{ n_h T \left[\frac{u}{n_h} \right] - \Phi(u, v_h) - \log n_h + K \right\} \cdot \operatorname{Re} (a_{n_h} e^{-iv_h}),$$

dove

$$T(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^{2k}}{k(2k-1)} = z^2 + \frac{1}{6} z^4 + \frac{1}{15} z^6 + \dots,$$

$$\Phi(u, v) = \begin{cases} u \left[\log \frac{v}{u} + c \right] & 1 \leq u \leq v \\ v \left[\log \frac{u}{v} + c \right] & 1 \leq v \leq u, \end{cases}$$

$$c > 1 + 2 \log 2, \quad K > 0 \text{ arbitrario.}$$

Poniamo $m = n_h \pm u \in I_h$ e denotiamo con ν_h il numero delle ψ_h -variazioni di segno della sequenza

$$\operatorname{Re} (a_m e^{-i\nu_h}), \quad m \in I_h.$$

Allora, se il numero ν_h verifica la disuguaglianza

$$\nu_h \leq v_h,$$

il punto 1 è singolare per $f(z)$.

L'introduzione delle ψ_h -variazioni consente di dimostrare anche condizioni sufficienti che impegnino il comportamento della successione $\{a_n\}$, in modo prevalente, lungo una successione $\{J_h\}$ di « tratti ridotti » J_h , concentrici con I_h , di ampiezza relativa infinitesima, ossia di ampiezza $o(n_h)$.

⁽⁴⁾ Vedi G. RICCI [6], p. 2. Assegnata la sequenza di numeri reali a_u ($u = 1, 2, 3, \dots$) e la « funzione condizionatrice » $\psi(u)$ ($1 \leq u \leq n$), si dice che due elementi a_u, a_{u+r} presentano una ψ -variazione di segno quando è $a_u > \psi(u), a_{u+r} < -\psi(u+r)$ oppure $a_u < -\psi(u), a_{u+r} > \psi(u+r)$, mentre tutti gli (eventuali) elementi intermedi a_t ($u < t < u+r$) sono tutti in modulo non superiore a $\psi(t)$, cioè $|a_t| \leq \psi(t)$ ($u < t < u+r$). In sostanza, il numero delle ψ -variazioni di segno di una sequenza è quello della sequenza ottenuta quando si trascurino tutti gli eventuali $|a_u| \leq \psi(u)$.

La considerazione delle variazioni di segno condizionate per un criterio sufficiente a garantire la presenza di un punto singolare sull'arco Γ_A ha condotto M. CUGIANI ⁽⁵⁾ ad una condizione che equivale alla seguente (conservando a $\Delta > 0$, θ , n_h , I_h , γ_h , $J_{h,l}$, $j_{h,l}$ il significato introdotto precedentemente):

(E) « Esista una successione di numeri reali positivi β_h , con $\beta_h \rightarrow 0$, $\beta_h^{4/3} \cdot n_h \rightarrow +\infty$, tale che, posto

$$J_{h,l} \equiv ((1 + \beta_h)^l n_h < m \leq (1 + \beta_h)^{l+1} n_h) \quad (l \geq 0, J_{h,l} \subseteq I_h)$$

e detto $\lambda_{h,l}$ il numero delle ψ_h -variazioni di segno per $m \in J_{h,l}$, risulti

$$\lambda_{h,l} \leq \Delta j_{h,l},$$

essendo la funzione condizionatrice $\psi_h(u)$ definita nel modo seguente:

$$\begin{cases} \psi_h(u) = 0 & \text{per } \mu < \beta_h^{1/2} \\ \psi_h(u) = \frac{K}{n_h} \exp \{ n_h (\mu^2 - \Phi(\mu, \beta_h)) \} \cdot \operatorname{Re} (a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) & \text{per } \mu \geq \beta_h^{1/2}, \end{cases}$$

dove $K > 0$, $m = n_h \pm u$, $\mu = u/n_h$,

$$\Phi(\mu, \beta_h) = \beta_h^{2/3} \log^{4/3} \frac{1}{\beta_h} + \frac{1}{4} \mu \beta_h^{1/3} \log \frac{1}{\beta_h}.$$

Allora, sull'arco Γ_A esiste almeno un punto singolare. »

Da questo criterio M. CUGIANI ricava anche criteri per il tratto ridotto concentrico con I_h .

Osserviamo che nella condizione (E) il sistema dei tratti parziali $J_{h,l}$ risulta vincolato in modo speciale.

1.2. - Posizione del problema.

Considerando le condizioni (F), (G), (H), (E) che abbiamo sopra ricordate, sorge spontaneo il problema di formulare un criterio che lasci la partizione ($J_{h,l}$) di I_h libera come in (F) e consideri la distribuzione delle ψ_h -variazioni di segno della sequenza $\operatorname{Re} (a_m e^{-i\gamma_h})$ ($m \in I_h$) ammettendo di poterne trascurare un certo numero v_h , comunque distribuite in I_h , in modo che le rimanenti $\lambda_{h,l}$ in ogni $J_{h,l}$ verifichino la condizione di densità $\lambda_{h,l} \leq \Delta j_{h,l}$; e, in condizioni così

⁽⁵⁾ M. CUGIANI [2], pp. 105-106.

generali, pervenire a una funzione condizionatrice possibilmente « sensibile » come quella di (31). La parte essenziale della funzione condizionatrice dovrebbe essere così formata da rivelare quale influenza bilanciata abbiano in essa, da una parte, la struttura $(J_{h,i})$ e, dall'altra, il numero ν_h delle variazioni non computate per la condizione di densità; questa funzione dovrebbe essere indicativa anche nella zona centrale di I_h , per quanto possibile.

Abbiamo studiato il problema suddetto e in questa Memoria presentiamo il criterio generale (Teorema A) le cui ipotesi, atteggiate in vari modi e in casi particolari, conducono a criteri espressivi: ivi compresi quelli riguardanti il tratto ridotto, che si deducono come corollari secondo lo schema ben noto ⁽⁶⁾.

Osserviamo che, se da una successione di interi m , contenuta in $I = \bigcup_n I_n$ e di densità massimale Δ , si tolgono ν_h elementi in I_h con $\nu_h/n_h \rightarrow 0$, allora la successione residua ha ancora densità massimale Δ : questo fatto fa prevedere che la determinazione della funzione condizionatrice ψ_h , sensibile nel senso detto sopra, richiederà una indagine, almeno indiretta, della struttura del seguente limite iterato, che definisce la densità massimale Δ ,

$$\lim_{r \rightarrow 1-} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{N(rx, x)}{(1-r)x}$$

($N(a, b)$ è il numero degli interi m con $a < m \leq b$).

§ 2. - I risultati.

2.1. - Il teorema principale.

Teorema A.

La serie di potenze

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

abbia raggio di convergenza 1 ($\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1$).

Esiste almeno un punto singolare sull'arco

$$(1.1) \quad \Gamma_{\Delta}: \quad |z| = 1, \quad -\Delta\pi \leq \arg z \leq \Delta\pi \quad (0 < \Delta < 1)$$

⁽⁶⁾ Vedasi G. RICCI [6], pp. 7-8.

quando è verificata la seguente condizione:

Sia possibile determinare

$$(2.1) \quad \begin{aligned} & \theta \quad (0 < \theta < 1), \quad \{n_h\} \quad (n_h < n_{h+1}), \quad \{\gamma_h \pmod{2\pi}\}, \\ & v_h \rightarrow +\infty \quad \text{con} \quad v_h = o(n_h), \end{aligned}$$

tali che

$$(1.3) \quad \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) > 0, \quad \{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \rightarrow 1 \quad \text{per} \quad h \rightarrow +\infty$$

e inoltre, posto

$$I_h \equiv ((1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h),$$

esista una partizione di I_h in intervalli parziali contigui disgiunti

$$J_{h,l} \equiv (m_l < m \leq m_{l+1}),$$

la cui lunghezza diciamo $j_{h,l}$ (n_h essendo uno dei punti di divisione) con

$$(2.2) \quad j_h = \operatorname{Max}_l j_{h,l} = o(n_h), \quad j_h \rightarrow +\infty,$$

e tale che, considerata la sequenza finita di numeri reali

$$\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_m}), \quad (m \in I_h),$$

le ψ_h -variazioni di segno da essa presentate siano così distribuite in I_h che, tolte v_h di esse, con

$$(2.3) \quad v_h \leq v_h,$$

delle rimanenti, in ogni intervallo parziale $J_{h,l}$ ne siano contenute $\lambda_{h,l}$, dove

$$(2.4) \quad \lambda_{h,l} \leq \Delta j_{h,l}.$$

La funzione $\psi_h(u) = \psi_h(u; v_h, j_h)$ condizionatrice delle variazioni di segno, per $m = n_h \pm u \in I_h$, ha l'espressione

$$(2.5) \quad \psi_h(u; v_h, j_h) = \exp \left[n_h \left\{ T \left[\frac{u}{n_h} \right] - \Phi_h(u; v_h, j_h) \right\} \right] \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}),$$

dove

$$T(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^{2k}}{k(2k-1)} = z^2 + \frac{1}{6} z^4 + \frac{1}{15} z^6 + \dots \quad (|z| < 1),$$

(2.6)

$$\Phi_h(u) = \Phi_h(u; v_h, j_h) =$$

$$= \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h} + c(\Delta) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h} + O\left[\frac{v_h + j_h + \log n_h}{n_h}\right],$$

$$c(\Delta) = 2(1 + 2\Delta)(1 - \Delta).$$

La costante implicata in $O(\dots)$ dipende da Δ . Risulta

$$v_h + j_h + \log n_h = o\left[v_h \log \frac{u}{n_h} + c(\Delta) j_h \log \frac{u}{j_h}\right]$$

per $u \geq u_h^* = (v_h + j_h) \exp\left\{\Omega_h \cdot \left[1 + \frac{\log n_h}{v_h + j_h}\right]\right\}, \quad \Omega_h \rightarrow +\infty.$

Osservazioni.

1) Si può assumere $c(\Delta) = 9/4$ indipendente da Δ (quindi esiste una costante c^* estremo inferiore dei numeri c positivi per i quali vale il teorema precedente, ed è $c^* \leq 9/4$).

2) Nella (2.6) i primi due termini della funzione $\Phi_h(u; v_h, j_h)$ per Δ, h fissati risultano monotoni crescenti al crescere di ciascuna delle tre variabili u, v_h, j_h .

3) Se la proprietà enunciata dal criterio vale per (θ, n_h) , essa vale, a maggior ragione, per (θ_1, n_{h_1}) , dove $\theta_1 \leq \theta$ e n_{h_1} è una successione parziale di n_h (questo consente il diradamento della successione n_h e la contrazione del tratto I_h in $I_h^{(1)}$). Poichè $j_h/n_h \rightarrow 0$, come nuovo intervallo $I_h^{(1)}$ si può assumere l'intervallo $(1 - \theta_1)n_h \leq m \leq (1 + \theta_1)n_h$ ampliato, eventualmente, a sinistra e a destra dei due J_{h_1} ($\subseteq I_h$) terminali che eventualmente debordassero da esso: risulta $I_h^{(1)} \equiv ((1 - \theta_1')n_h \leq m \leq (1 + \theta_1'')n_h)$, con $\theta_1' = (1 + \varepsilon_h')\theta_1$, $\theta_1'' = (1 + \varepsilon_h'')\theta_1$, dove $\varepsilon_h' \leq j_h/(\theta_1 n_h) \rightarrow 0+$, $\varepsilon_h'' \rightarrow 0+$. Si potrà pertanto supporre, quando occorra, $0 < \theta < 1/c$.

4) Nell'espressione della funzione $\Phi_h(u; v_h, j_h)$ i primi due termini si possono includere nel terzo termine $O((v_h + j_h + \log n_h)/n_h)$ quando u sia « abbastanza piccolo ». Nel n. 2.2 seguente verrà valutata un'espressione u_h^* (che denomineremo « soglia di sensibilità » della funzione condizionatrice), tale che per $u \geq u_h^*$ la somma dei primi due termini risulti preponderante rispetto all'ultimo termine $O(\dots)$.

2.2. - La «soglia di sensibilità» della funzione condizionatrice.

Nell'espressione della funzione condizionatrice (2.5) consideriamo la parte $n_h \Phi_h(u)$, che possiamo anche scrivere nella forma (trascurando, per semplicità, l'indice h)

$$v \log \frac{u}{v} + c(\Delta)j \log \frac{u}{j} + O(v + j + \log n).$$

Il risultato del Teorema A è sensibile soltanto per

$$(2.7) \quad v + j + \log n = o \left[v \log \frac{u}{v} + j \log \frac{u}{j} \right],$$

ossia per

$$(2.7)' \quad v \log \frac{u}{v} + j \log \frac{u}{j} = \Omega \cdot (v + j + \log n),$$

essendo $\Omega = \Omega_n \rightarrow +\infty$ lentamente quanto si vuole. La (2.7)' può essere scritta nella forma

$$(2.7)'' \quad (v + j) \log u = \Omega \cdot (v + j + \log n) + v \log v + j \log j.$$

Esaminiamo gli ultimi due termini a secondo membro: essi sono del tipo $x \log x + y \log y$. È facile constatare che risulta, uniformemente rispetto ad (x, y) ,

$$(2.8) \quad x \log x + y \log y = (x + y) \log (x + y) - \theta \cdot (x + y), \quad 0 < \theta \leq \log 2 \quad (?).$$

(?) Infatti, considerata la differenza

$$q(x, y) = (x + y) \log (x + y) - (x \log x + y \log y),$$

essendo $q(x, y) = q(y, x)$, si può supporre $y \leq x$: allora, posto $y = \alpha x$ ($0 < \alpha \leq 1$), risulta

$$q(x, \alpha x) = x \{ (1 + \alpha) \log (1 + \alpha) - \alpha \log \alpha \}$$

ed è $(1 + \alpha) \log (1 + \alpha) \leq 2 \log 2$, $-\alpha \log \alpha \leq 1/e$, e anche $q(x, y) < (2 \log 2 + 1/e)(x + y)$. Valutiamo $c' = \inf c$ per cui $q(x, y) \leq c \cdot (x + y)$. Essendo $q(x, y) = \log 2 \cdot (x + x)$, è intanto $c' \geq \log 2$; essendo poi

$$q(x, y)/(x + y) = \{ (1 + \alpha) \log (1 + \alpha) - \alpha \log \alpha \} / (1 + \alpha) = \varphi(\alpha),$$

si tratta di determinare il massimo della funzione $\varphi(\alpha)$ per $0 < \alpha \leq 1$. Si trova facilmente che tale massimo è dato da $\log 2$: risulta pertanto $c' = \inf c = \min c = \log 2$, ossia

$$0 < q(x, y) \leq \log 2 \cdot (x + y),$$

da cui la (2.8).

Tenuto conto di (2.8), la (2.7)^o assume la forma

$$\log u = \Omega \cdot (1 + \log n/(v + j)) + \log(v + j) - \theta.$$

Trascurando il termine favorevole $-\bar{\theta}$ ($0 < \bar{\theta} \leq \log 2$), l'espressione « soglia » $u^* = u_n^*$ viene individuata da

$$\log u^* = \Omega \cdot (1 + \log n/(v + j)) + \log(v + j),$$

ossia da

$$(2.9) \quad u_n^* = (v_n + j_n) \exp \left\{ \Omega_n \cdot \left[1 + \frac{\log n_n}{v_n + j_n} \right] \right\},$$

che si può anche scrivere nella forma

$$(2.9)' \quad u_n^* = (v_n + j_n) \Omega_n' n_n^{\log \Omega_n' / (v_n + j_n)} \quad (\Omega_n' = \exp \Omega_n).$$

Si vede subito che è $u_n^*/v_n \rightarrow +\infty$, $u_n^*/j_n \rightarrow +\infty$, $u_n^*/(v_n + j_n) \rightarrow +\infty$.

Si trova poi che per $\Omega_n \rightarrow +\infty$ *abbastanza lentamente* la « soglia » u_n^* è infinitesima rispetto ad n_n , ossia che risulta

$$(2.10) \quad u_n^*/n_n \rightarrow 0$$

(e precisamente si trova che se $\log n_n/(v_n + j_n) = O(1)$ basta assumere $\Omega_n = o(\log \{ n_n/(v_n + j_n) \})$; se poi $\log n_n/(v_n + j_n) \rightarrow +\infty$ (eventualmente lungo una successione parziale di n_n), basta assumere $\Omega_n = o(v_n + j_n)$).

La (2.10) ci garantisce che l'intervallo (centrato su n_n) nel quale la funzione condizionatrice del Teorema A cessa di essere espressiva (nel senso che non è verificata la (2.7)) ha ampiezza relativa $2u_n^*/n_n$ infinitesima.

Diremo « soglia di sensibilità » ammissibile per la funzione condizionatrice (2.5) ogni successione u_n^* per la quale valga (2.10).

Osservazioni. 1) L'espressione (2.9) della « soglia » u_n^* è valida qualunque sia l'andamento del rapporto $\log n_n/(v_n + j_n)$: qualora si voglia tenere conto di questo andamento, in corrispondenza dei diversi casi che si possono presentare, si ottengono per l'espressione u_n^* le seguenti forme equivalenti, ma più semplici. Possiamo supporre, diradando eventualmente la successione

$\{n_h\}$, che esista $\lim (\log n_h / (v_h + j_h))$. Allora:

- 1) se $\frac{\log n_h}{v_h + j_h} \rightarrow 0$ si può assumere $u_h^* = \Omega_h \cdot (v_h + j_h)$,
- 2) se $\frac{\log n_h}{v_h + j_h} \rightarrow +\infty$ si può assumere $u_h^* = (v_h + j_h) n_h^{\Omega_h / (v_h + j_h)}$,
- 3) se $\frac{\log n_h}{v_h + j_h} \rightarrow \lambda$, con $0 < \lambda < +\infty$, si può assumere per u_h^* l'una

o l'altra delle due espressioni in 1) e 2), che risultano equivalenti nel senso che, fissato $\Omega_h' \rightarrow +\infty$ *abbastanza lentamente*, si può trovare $\Omega_h'' \rightarrow +\infty$ *lentamente* quanto si vuole, e viceversa, tali che sia $\Omega_h' \cdot (v_h + j_h) = (v_h + j_h) n_h^{\Omega_h'' / (v_h + j_h)}$.

2) Le proprietà che avevamo in vista per la funzione condizionatrice $\psi_h(u)$, annunciate nell'Introduzione (al n. 1.2), si possono ritenere, in certo senso, realizzate dall'espressione (2.5) stabilita nel Teorema A. Sebbene la funzione $\psi_h(u)$ presenti un intervallo di centro n_h e di ampiezza relativa infinitesima nel quale la « sensibilità » viene a mancare, tuttavia, nella parte rimanente dell'intervallo I_h l'espressione di $\log \psi_h(u)$ presenta il termine $n_h T(u/n_h)$, che supera u^2/n_h ; accanto ad esso i due rimanenti termini

$$(v_h/n_h) \log (u/n_h), \quad c(\Delta)(j_h/n_h) \log (u/j_h)$$

pongono in rilievo l'influenza che sull'abbassamento della funzione $\exp \{ n_h \cdot T(u/n_h) \}$ hanno, da una parte, l'andamento del numero v_h delle ψ_h -variazioni non computate ($v_h \leq v_h$) per rispondere alla condizione di densità $\lambda_{h,i} \leq \Delta j_{h,i}$ e, dall'altra, l'andamento dell'ampiezza $j_h = \text{Max } j_{h,i}$ connessa con la « finezza » della suddivisione.

2.3. - Due aspetti limiti del teorema principale.

Può accadere che dei primi due termini dell'espressione di $\Phi_h(u)$ uno sia preponderante rispetto all'altro e inoltre non venga assorbito in $O(\dots)$. In ciascuno di questi due casi possibili il Teorema A prende i due seguenti aspetti.

Teorema B. *Se le ipotesi del Teorema A sono verificate con l'ulteriore proprietà $j_h/v_h \rightarrow 0$, allora il criterio rimane valido quando alla funzione condizionatrice $\psi_h(u; v_h, j_h)$ si sostituisca quella nella quale Φ_h è la seguente:*

$$\Phi_h^{(2)}(u; v_h, *) = (1 + o(1)) \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h} + O \left[\frac{v_h + \log n_h}{n_h} \right].$$

Esempio. La sequenza dei valori m^* dell'indice $m \in I_h$ che introducono una ψ_h -variazione di segno (tali m^* verranno qui, per comodità, chiamati « nodi ») sia costituita da interi della forma (progressione aritmetica) $tN + a$ (t intero variabile, N intero indipendente da h e da t , a intero indipendente da t) e da altri v_h interi, comunque distribuiti in I_h , con $v_h \leq v_h \rightarrow +\infty$. In questo caso si possono assumere i v_h nodi come nodi in soprannumero (rispetto alla condizione di densità (2.4)) e si può scegliere la suddivisione di I_h in intervalli parziali $J_{h,t}$ tutti della stessa ampiezza j_h multipla di N , $j_h = z_h N = o(v_h)$, $j_h \rightarrow +\infty$. Allora è $\Delta = 1/N$, $j_h/v_h \rightarrow 0$ e siamo nelle condizioni del Teorema B. Risulta, per $u \geq u_h^*$,

$$\Phi_h^{(1)}(u) \sim \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h}.$$

Osservazione. Nel caso in cui j_h verifichi la condizione

$$j_h \log(n_h/j_h) = O(v_h),$$

più forte di $j_h = o(v_h)$ (questa condizione presa insieme a $j_h \rightarrow +\infty$ richiede $v_h/\log v_h \rightarrow +\infty$), nella funzione condizionatrice ψ_h la funzione Φ_h può essere sostituita da quella più semplice

$$\Phi_h^{(2)}(u; v_h, *) = \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h} + O\left[\frac{v_h}{n_h}\right].$$

Teorema C. Se le ipotesi del Teorema A sono verificate con l'ulteriore proprietà $v_h/j_h \rightarrow 0$, allora il criterio rimane valido quando alla funzione condizionatrice ψ_h si sostituisca quella nella quale Φ_h è la seguente:

$$\Phi_h^{(2)}(u; *, j_h) = (c(\Delta) + o(1)) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h} + O\left[\frac{j_h + \log n_h}{n_h}\right].$$

Esempio. Consideriamo l'esempio che segue l'enunciato del Teorema B e pensiamo che i v_h nodi in soprannumero siano distribuiti nei posti $m^* \neq tN + a$ disponibili alla destra di n_h e più prossimi a n_h . Associamo un gruppo di s_h intervalli consecutivi a partire da n_h , verso destra, a formare un unico intervallo $J'_{h,1}$, della nuova configurazione, di ampiezza $j'_h = j_h s_h$. Assumendo $j_h \rightarrow +\infty$ abbastanza lentamente e $s_h \rightarrow +\infty$, $s_h j_h/v_h \rightarrow +\infty$, si constata che siamo nelle condizioni del Teorema C. Risulta, per $u \geq u_h^*$,

$$\Phi_h^{(2)}(u) \sim c(\Delta) \frac{s_h j_h}{n_h} \log \frac{u}{s_h j_h}.$$

Osservazione. Vale un'osservazione analoga a quella che segue il Teorema B: la condizione

$$v_h \log (n_h/v_h) = O(j_h),$$

più forte di $v_h = o(j_h)$, consente di sostituire in ψ_h la funzione Φ_h con

$$\Phi_h^{(2)}(u; *, v_h) = c(\Delta) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h} + O \left[\frac{j_h}{n_h} \right].$$

2.4. - Alcuni esempi di confronto fra i teoremi dati.

Esempio I. Una configurazione di nodi per la quale il criterio espresso dal Teorema B è più favorevole di quello espresso dal Teorema C.

I nodi siano disposti come nell'esempio che segue l'enunciato del Teorema C. Se $j_h \rightarrow +\infty$ abbastanza lentamente, così che $j_h = o(v_h)$, e se s_h verifica, oltre alle condizioni dichiarate $s_h \rightarrow +\infty$, $s_h j_h / v_h \rightarrow +\infty$, all'ulteriore condizione $(s_h j_h)^2 / v_h = o(n_h)$, si può constatare che risulta, per $u \geq \text{Max} \{u_h^*, (s_h j_h)^2 / v_h\}$,

$$(2.11) \quad \Phi_h^{(1)}(u) = o(\Phi_h^{(2)}(u)).$$

Infatti è

$$\Phi_h^{(1)}(u) \sim \frac{u}{n_h} \cdot \frac{v_h}{u} \log \frac{u}{v_h}, \quad \Phi_h^{(2)}(u) \sim c(\Delta) \frac{u}{n_h} \cdot \frac{s_h j_h}{u} \log \frac{u}{s_h j_h},$$

da cui la (2.11).

Esempio II. Una configurazione di nodi per la quale il Teorema C è più favorevole del Teorema B.

Indichiamo con I'_h e con I''_h le due parti del tratto I_h rispettivamente a sinistra e a destra di n_h . La sequenza dei nodi che introducono le ψ_h -variazioni di segno in I''_h sia la seguente: scelta $\{p_h\}$, con $p_h \rightarrow +\infty$, $p_h = o(n_h)$, assumiamo gli intervalli

$$\left\{ \begin{array}{ll} n_h + 2tp_h < m \leq n_h + (2t+1)p_h & \text{« pieni di nodi » (cioè un nodo} \\ & \text{ogni intero } m) \\ n_h + (2t+1)p_h < m \leq n_h + (2t+2)p_h & \text{« vuoti di nodi »,} \\ & t = 0, 1, 2, \dots \end{array} \right.$$

In I'_h si abbia la configurazione simmetrica rispetto ad n_h .

1) Sono verificate le condizioni del Teorema C con $\Delta = 1/2$, quando si scelgano: $j_{h,t} = j_h = 2p_h$ (intervalli parziali tutti uguali), $v_h = 0$, e quindi $v_h \rightarrow +\infty$ lentamente quanto si vuole, $v_h = o(j_h)$. La funzione Φ_h data dal Teorema C risulta

$$\Phi_h^{(2)}(u) \sim c(\Delta) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h}, \quad u \geq u_h^*.$$

2) Per ottenere una nuova partizione di I_h in intervalli $J'_{h,i}$ utile per applicare il Teorema B, ancora con $\Delta = 1/2$, occorrerà estrarre da I_h v_h nodi da considerare come nodi in soprannumero, e avere $j'_h = \text{Max } j'_{h,i} = o(v_h)$, $j'_h < j_h$.

Se $v_h/p_h = 2v_h/j_h \rightarrow +\infty$, l'espressione $\Phi_h^{(2)}(u)$ che si ottiene è sfavorevole rispetto a quella ottenuta in 1), poichè risulta $\Phi_h^{(2)}(u) = o(\Phi_h^{(1)}(u))$.

Se $v_h/p_h = O(1)$, non è possibile ottenere una partizione di I_h tale che $j'_h = o(p_h)$ e pertanto non ci si può ricondurre al Teorema B, risultando $j'_h \neq o(v_h)$. Infatti, essendo $v_h = O(p_h)$, esiste in I_h almeno un intervallo di ampiezza p_h contenente un numero di nodi non inferiore a

$$(\theta n_h - v_h) : (\theta n_h / p_h) = p_h(1 - \varepsilon_h), \text{ con } \varepsilon_h \rightarrow 0,$$

e quindi per ogni $\eta > 0$ e $h \geq h_0(\eta)$ abbastanza grande esiste almeno un intervallo di ampiezza p_h contenente più di $(1 - \eta)p_h$ nodi. Se fosse $j'_h = o(p_h)$, in tale intervallo di ampiezza p_h sarebbero contenuti (numerosi) intervalli $J'_{h,i}$ (poichè $j'_h = o(p_h)$) e in almeno uno di essi, diciamolo $J'_{h,r}$, si troverebbero più di $(1 - 2\eta)j'_{h,r}$ nodi ($1 - 2\eta > 1/2$ per η abbastanza piccolo): non risulterebbe così rispettata la condizione di densità con $\Delta = 1/2$.

Si è così mostrato che ogni partizione di I_h in intervalli parziali $J'_{h,i}$ utile per l'applicazione del Teorema B conduce ad una funzione condizionatrice meno vantaggiosa di quella del Teorema C.

Esempio III. Una configurazione di nodi per la quale il Teorema A è più favorevole del Teorema C.

Consideriamo la sequenza dei nodi presentata nell'esempio II (tratti « pieni » e tratti « vuoti » di ampiezza p_h , alternati) e supponiamo p_h intero, multiplo di 4.

1) Sono verificate le condizioni del Teorema C con $\Delta = 1/2$, quando si scelga $j_{h,i} = j_h = 2p_h$, $v_h = 0$ come in II, 1), e si ottiene

$$\Phi_h^{(2)}(u) \sim c(\Delta) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h} \sim 4 \frac{p_h}{n_h} \log \frac{u}{p_h} \quad (u \geq u_h^*)$$

(teniamo presente che $c(\Delta) = 2$ per $\Delta = 1/2$).

2) Assumiamo la seguente partizione di J_h in intervalli $J'_{h,i}$, adatta al Teorema A. Il sistema degli $J'_{h,i}$ è costituito dagli intervalli:

$$\begin{cases} n_h + (l - 3/2)p_h < x \leq n_h + (l - 1/2)p_h & (l = \pm 2, \pm 3, \dots) \\ J'_{h,-1} \equiv (n_h - p_h/2 < x \leq n_h) \\ J'_{h,1} \equiv (n_h < x \leq n_h + p_h/2). \end{cases}$$

Risulta $j_h = \text{Max } j'_{h,i} = p_h$. Da ciascuno dei due intervalli $J'_{h,-1}$, $J'_{h,1}$ si estrarrebbero $p_h/4$ nodi, da considerare come nodi in soprannumero. Eventuali porzioni di tratti « pieni » che si trovassero agli estremi di I_h possono essere trascurate operando una lieve contrazione del tratto I_h (si veda Osservazione 3), al n. 2.1). Abbiamo così $v_h = p_h/2$ e $\Delta = 1/2$. La funzione $\Phi_h(u)$ fornita dal Teorema A risulta ($c(1/2) = 2$)

$$\Phi_h(u) \sim \frac{1}{2} \frac{p_h}{n_h} \log \frac{u}{p_h} + 2 \frac{p_h}{n_h} \log \frac{u}{p_h} = \frac{5}{2} \frac{p_h}{n_h} \log \frac{u}{p_h} \quad (u \geq u_h^*),$$

ed è più favorevole di quella $\Phi_h^{(2)}(u)$ fornita dal Teorema C.

2.5. - Forme semplici per la funzione condizionatrice.

Dal Teorema A si possono dedurre i due seguenti teoremi, nei quali la funzione condizionatrice è meno favorevole (perchè più piccola), ma ha una forma più semplice: tale funzione viene assunta eguale a zero in un tratto centrale $n_h - A_h \leq m \leq n_h + A_h$, dove A_h viene scelto convenientemente ed è comunque tale da superare il valore u_h^* della « soglia di sensibilità » della funzione condizionatrice.

Teorema D. *Il Teorema A rimane valido quando alla funzione condizionatrice ψ_h in esso contenuta si sostituisca la seguente*

$$\psi_h'(u) = \begin{cases} 0 & \text{per } 1 \leq u \leq A_h' \\ \exp(u^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-iv_h}) & \text{per } A_h' < u \leq \theta n_h, \end{cases}$$

dove

$$A_h' = \left\{ \frac{3}{4} \beta (v_h + c(\Delta)j_h) n_h^3 \log \frac{n_h}{v_h + c(\Delta)j_h} \right\}^{1/4}$$

con β costante, $\beta > 6$.

Teorema E. *Il Teorema A rimane valido quando, fissato α con $0 < \alpha < 1$, alla funzione condizionatrice ψ_h si sostituisca la seguente*

$$\psi_h''(u) = \begin{cases} 0 & \text{per } 1 \leq u \leq A_h'' \\ \exp(\alpha u^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-iv_h}) & \text{per } A_h'' < u \leq \theta n_h, \end{cases}$$

dove

$$A_h'' = \left\{ \frac{1}{2} \beta (v_h + c(\Delta)j_h) n_h \log \frac{n_h}{v_h + c(\Delta)j_h} \right\}^{1/2}$$

con β costante, $\beta > 1/(1 - \alpha)$.

Osservazione. In questi due teoremi la funzione condizionatrice è indipendente da v_h e j_h , tuttavia le successioni v_h e j_h risultano vincolate in dipendenza dell'ampiezza del tratto (concentrico con I_h) nel quale la funzione condizionatrice si è assunta eguale a zero: è facile constatare che tale ampiezza è infinitesima rispetto ad n_h e questo fatto rende i due teoremi più espressivi.

Dimostrazione del Teorema D.

Ricordiamo (cfr. n. 2.1, Teorema A) che

$$n T \left(\frac{u}{n} \right) = n \left\{ \frac{u^2}{n^2} + \frac{1}{6} \frac{u^4}{n^4} + \dots \right\} > \frac{u^2}{n} + \frac{1}{6} \frac{u^4}{n^3},$$

$$n \Phi(u; v, j) = v \log \frac{u}{v} + c(\Delta) j \log \frac{u}{j} + O(v + j + \log n)$$

(per semplicità abbiamo trascurato l'indice h). Poniamo

$$w = v + c(\Delta)j$$

(risulta, per ipotesi, $w = o(n)$, $w \rightarrow +\infty$). Poichè, per la (2.8), risulta

$$x \log \frac{1}{x} + y \log \frac{1}{y} = (x + y) \log \frac{1}{x + y} + \theta_1 \cdot (x + y) \log 2, \quad 0 < \theta_1 \leq 1,$$

e si ha inoltre

$$c(\Delta) j \log \frac{u}{j} = c(\Delta) j \log \frac{u}{c(\Delta)j} + c(\Delta) \log \Delta \cdot j,$$

possiamo scrivere

$$n \Phi(u; v, j) = w \log (u/w) + O(w + \log n).$$

Supporremo anche qui, ovviamente, che sia $u \geq u_n^*$, per cui, valendo (2.7), risulta

$$w + \log n = o(w \log (u/w)),$$

e pertanto

$$(2.12) \quad n \Phi(u; v, j) = (1 + o(1))w \log (u/w).$$

Fissato $\beta' > 6$, ci proponiamo di determinare $A' = A'_n$ tale che si abbia

$$\frac{u^4}{\beta' n^3} \geq n \Phi(u; v, j) \quad \text{per ogni } u \geq A'.$$

Allora risulta $\psi_h(u; v, j) > \exp(u^2/n) \cdot \operatorname{Re}(a_n e^{-iv_n}) = \psi'_h(u)$. Fissato β'' , con $6 < \beta' < \beta''$, tenuto conto di (2.12), basterà assumere

$$(2.13) \quad u^4/(\beta'' n^3) \geq w \log(u/w),$$

ossia

$$(u/w)^4 : \log (u/w)^4 \geq \frac{1}{4} \beta'' (n/w)^3.$$

Qui soltanto il primo membro dipende da u ed è crescente per $u > \sqrt[4]{e} \cdot w$. Sia u_0 il numero reale $\geq \sqrt[4]{e} \cdot w$ per cui

$$(u_0/w)^4 : \log (u_0/w)^4 = \frac{1}{4} \beta'' (n/w)^3.$$

Poichè $n/w \rightarrow +\infty$, il primo membro $\rightarrow +\infty$ e quindi, poichè non è $u_0/w \rightarrow 1 +$ (infatti $u_0/w \geq \sqrt[4]{e} > 1$), ne segue $u_0/w \rightarrow +\infty$, $\log (u_0/w) \rightarrow +\infty$ e, passando ai logaritmi nell'uguaglianza, si ottiene

$$\log (u_0/w)^4 = 3(1 + o(1)) \log (n/w),$$

e ne segue, sostituendo nella precedente uguaglianza,

$$u_0^4 = (1 + o(1)) \frac{3}{4} \beta'' w n^3 \log (n/w).$$

Fissato β , con $6 < \beta'' < \beta$, la (2.13) è certamente verificata per $u \geq A'$, assumendo

$$A' = \left\{ \frac{3}{4} \beta w n^3 \log (n/w) \right\}^{1/4} \quad (\beta > 6).$$

Dimostrazione del Teorema E.

Fissato α , con $0 < \alpha < 1$ è

$$n T \left[\frac{u}{n} \right] > \frac{u^2}{n} = \alpha \frac{u^2}{n} + (1 - \alpha) \frac{u^2}{n};$$

tutte le volte che risulta

$$(2.14) \quad (1 - \alpha) \frac{u^2}{n} > n \Phi(u; v, j) = (1 + o(1)) w \log \frac{u}{w},$$

risulta pure $\psi_n(u; v, j) > \exp(\alpha u^2/n) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i v u}) = \psi_n''(u)$. La (2.14) è cer-

tamente verificata se, fissato $\beta' > 1/(1 - \alpha)$, si assume

$$u^2/n \geq \beta' w \log(u/w),$$

ossia

$$(u/w)^2 : \log(u/w)^2 \geq \frac{1}{2} \beta' n/w.$$

Un ragionamento analogo a quello svolto precedentemente per il Teorema D, conduce a considerare l'uguaglianza

$$(u_0/w)^2 : \log(u_0/w)^2 = \frac{1}{2} \beta' n/w.$$

Passando in questa ai logaritmi, si ottiene

$$\log(u_0/w)^2 = (1 + o(1)) \log(n/w),$$

e ne segue, sostituendo nella precedente uguaglianza,

$$u_0^2 = (1 + o(1)) \frac{1}{2} \beta' w n \log(n/w).$$

Fissato $\beta > \beta' > 1/(1 - \alpha)$, basterà assumere

$$A'' = \left\{ \frac{1}{2} \beta w n \log(n/w) \right\}^{1/2}$$

perchè, per $u \geq A''$, valga la (2.14).

2.6. - Il tratto ridotto.

Dal Teorema A possiamo ottenere i due seguenti criteri sufficienti per l'esistenza di almeno un punto singolare sull'arco Γ_A , fissando l'attenzione sopra una successione di tratti

$$J_h \equiv (n_h - A_h \leq m \leq n_h + A_h), \quad A_h = o(n_h), \quad (h = 1, 2, 3, \dots),$$

concentrici con I_h e di ampiezza relativa infinitesima, nell'ipotesi che in $I_h - J_h$ ($h = 1, 2, 3, \dots$) le componenti $\text{Re}(a_m e^{-i\nu_h})$ siano vincolate in grandezza; l'esame della distribuzione delle ψ_h -variazioni di segno è richiesto soltanto in J_h .

Analoghi criteri si possono ottenere dai Teoremi B e C.

Teorema F. Sia $0 < \Delta < 1$. Sia possibile determinare

$$\theta \quad (0 < \theta < 1), \quad n_h \quad (n_h < n_{h+1}), \quad \gamma_h \pmod{2\pi}, \quad A'_h, \quad v_h$$

tali che

$$\{\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})\}^{1/n_h} \rightarrow 1 \text{ per } h \rightarrow +\infty, \quad A'_h = o(n_h), \quad v_h = o(n_h)$$

e inoltre, posto

$$I_h \equiv ((1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h),$$

$$J_h \equiv (n_h - A'_h \leq m \leq n_h + A'_h),$$

sia

$$(2.15) \quad |\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})| < \exp(u^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \quad (m = n_h \pm u \in I_h - J_h);$$

esista inoltre una partizione di J_h in intervalli parziali contigui disgiunti $J_{h,i}$, la cui lunghezza diciamo $j_{h,i}$ (n_h essendo uno dei punti di divisione), con

$$j_h = \operatorname{Max}_i j_{h,i} = o(n_h), \quad j_h \rightarrow +\infty,$$

per la quale, considerata la sequenza finita di numeri reali

$$\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \quad (m \in J_h)$$

le ψ_h -variazioni di segno da essa presentate siano così distribuite in J_h che, tolte v_h di esse, con

$$v_h \leq v_h,$$

delle rimanenti, in ogni intervallo parziale $J_{h,i}$ ne siano contenute $\lambda_{h,i}$, dove

$$\lambda_{h,i} \leq \Delta j_{h,i}.$$

La funzione $\psi_h(u; v_h, j_h)$ condizionatrice delle variazioni di segno, per $m = n_h \pm u \in J_h$, ha l'espressione presentata nel Teorema A.

Esiste almeno un punto singolare per la serie di potenze $f(z)$ sull'arco Γ_Δ quando, fissato $\beta > 6$, è possibile scegliere l'ampiezza $2A'_h$ del tratto ridotto J_h in guisa da

avere

$$(2.16) \quad \left\{ \frac{3}{4} \beta (v_h + c(\Delta)j_h) n_h^3 \log \frac{n_h}{v_h + c(\Delta)j_h} \right\}^{1/4} \leq A'_h = o(n_h).$$

Teorema G. Sia $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1/(1 - \alpha)$. Vale l'analogo criterio ottenuto dal precedente sostituendo alla (2.15) la condizione

$$|\operatorname{Re}(a_m e^{-v_h})| < \exp(\alpha u^2/n_h) \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-v_h}) \quad (m = n_h \pm u \in I_h - J_h),$$

e alla (2.16) la condizione

$$\left\{ \frac{1}{2} \beta (v_h + c(\Delta)j_h) n_h \log \frac{n_h}{v_h + c(\Delta)j_h} \right\}^{1/2} \leq A''_h = o(n_h).$$

Le dimostrazioni di questi due Teoremi F e G si deducono rispettivamente da quelle dei Teoremi D ed E, osservando che essi riguardano il caso in cui le v_h ψ_h -variazioni di segno in soprannumero sono tutte contenute nel tratto ridotto.

2.7. - Confronto del teorema principale con risultati noti.

Veniamo a mostrare in quale modo i risultati noti (vedi n. 1.1) sono contenuti come casi particolari nel Teorema A.

a) *Condizione* (\mathfrak{F}). Se è possibile soddisfare alle condizioni del Teorema A assumendo $v_h = 0$, $\lambda_{h,i} \leq \Delta j_{h,i}$, $\psi_h(u)$ identicamente nulla (si contano le 0-variazioni), allora esiste almeno un punto singolare sull'arco Γ_Δ : si ottiene così come caso particolare il teorema di E. FABRY⁽⁸⁾.

b) *Condizione* (\mathfrak{F}) con $\Delta = 0$. Se è possibile soddisfare alle condizioni del Teorema A assumendo ψ_h identicamente nulla, v_h numero globale delle 0-variazioni in I_h , $v_h = o(n_h)$, allora Δ e j_h possono essere arbitrari e quindi Δ piccolo quanto si vuole e $j_h = o(n_h)$: se segue che $z = 1$ è singolare (E. FABRY)⁽⁹⁾.

c) *Condizione* (\mathfrak{R}). Se è possibile soddisfare alle condizioni del Teorema A assumendo v_h uguale al numero globale delle ψ_h -variazioni in I_h , $v_h = o(n_h)$ (allora Δ e j_h possono essere scelti arbitrariamente, Δ piccolo quanto

⁽⁸⁾ Cfr. L. BIEBERBACH [1], p. 43.

⁽⁹⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽⁸⁾, p. 44.

si vuole e $j_h = o(n_h)$, la funzione ψ_h essendo ottenuta con

$$\Phi_h(u; v_h, *) = \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h} + O \left[\frac{v_h + \log n_h}{n_h} \right],$$

si perviene così ad un teorema del tipo di quello di G. RICCI [8], tuttavia con una funzione condizionatrice meno favorevole di quella che figura in (\mathfrak{R}).

d) *Condizione (e)*. Ci riferiamo alla condizione di M. CUGIANI enunciata alla fine del n. 1.1. Assumiamo la particolare suddivisione di I_h secondo lo schema indicato in (e) e la relativa condizione di densità: riferendoci alle notazioni introdotte nel Teorema A, abbiamo

$$v_h = 0, \quad j_h \sim (1 + \theta) n_h \beta_h, \quad \beta_h^{4/3} n_h \rightarrow +\infty.$$

Questa condizione richiede

$$j_h \sim \Omega_1 n_h^{1/4}, \quad \Omega_1 \rightarrow +\infty$$

e ciò pone un vincolo alla partizione $J_{h,l}$ di I_h , non consentendo partizioni « minute ». L'espressione

$$\beta_h^{1/2} n_h \sim \left[\frac{j_h n_h}{1 + \theta} \right]^{1/2} \sim \left[\frac{\Omega_1}{1 + \theta} \right]^{1/2} \cdot n_h^{5/8}$$

della semiampiezza dell'intervallo nel quale è $\psi_h(u) = 0$ supera il valore « soglia » u_h^* (si veda il Teorema A) che, con la precedente assunzione di j_h risulta

$$u_h^* = \Omega_2 \Omega_1 n_h^{1/4}, \quad \Omega_2 \rightarrow +\infty \text{ lentamente quanto si vuole.}$$

Allora la funzione condizionatrice del Teorema A risulta

$$\psi_h(u) = \exp \left[n_h \left\{ T \left[\frac{u}{n_h} \right] - \Phi_h(u; *, j_h) \right\} \right] \cdot \operatorname{Re} (a_{n_h} e^{-i\gamma_h}),$$

dove

$$\Phi_h(u; *, j_h) = c(\Delta) \cdot (1 + \theta) \beta_h \log \frac{u}{n_h \beta_h} + O \left[\beta_h + \frac{\log n_h}{n_h} \right],$$

mentre la funzione condizionatrice che figura in (e), e che qui indicheremo con

$\psi_h^*(u)$, è

$$\psi_h^*(u) = \begin{cases} 0 & \text{per } u < \beta_h^{1/2} n_h \\ \frac{K}{n_h} \exp \left\{ n_h \left[\frac{u^2}{n_h^2} - \Phi_h^*(u; \beta_h) \right] \right\} \cdot \operatorname{Re} (a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) & \text{per } u \geq \beta_h^{1/2} n_h \end{cases}$$

dove

$$\Phi_h^*(u; \beta_h) = \left\{ \beta_h^{2/3} \left[\log \frac{1}{\beta_h} \right]^{1/3} + \frac{u}{4n_h} \beta_h^{1/3} \right\} \log \frac{1}{\beta_h}.$$

Osserviamo che per $u \geq \beta_h^{1/2} n_h (> u_h^*)$ risulta

$$(2.17) \quad \psi_h^*(u) = o(\psi_h(u)).$$

Infatti il rapporto fra le funzioni condizionatrici è

$$\psi_h(u) : \psi_h^*(u) = \exp \left[n_h \left\{ T \left[\frac{u}{n_h} \right] - \frac{u^2}{n_h^2} - \Phi_h(u; *, j_h) + \Phi_h^*(u; \beta_h) \right\} \right]$$

ed è evidentemente

$$\exp \left[n_h \left\{ T \left[\frac{u}{n_h} \right] - \frac{u^2}{n_h^2} \right\} \right] = \exp \left[\frac{1}{6} \frac{u^4}{n_h^3} + \dots \right]$$

e inoltre $\Phi_h(u; *, j_h) = o(\Phi_h^*(u; \beta_h))$: risulta infatti, considerando il rapporto Φ_h/Φ_h^* e ponendo $u = \theta n_h$ nel numeratore e $u = \beta_h^{1/2} n_h$ nel denominatore,

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_h}{\Phi_h^*} &= O \left(\frac{\beta \log(1/\beta)}{\left\{ \beta^{2/3} \left[\log \frac{1}{\beta} \right]^{1/3} + \beta^{5/6} \right\} \log(1/\beta)} \right) & (\beta \rightarrow 0) \\ &= O(\{\beta/\log(1/\beta)\}^{1/3}) = O(\Omega_1^{1/3}/(n_h^{1/4} \log^{1/3} n_h)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\psi_h(u) : \psi_h^*(u) \sim \exp \left[\frac{1}{6} \frac{u^4}{n_h^3} + \dots \right] \cdot \exp (n_h \cdot \Phi_h^*(u; \beta_h)).$$

Osserviamo ancora che

$$\Phi_h^*(\beta^{1/2} n_h; \beta) \sim \beta^{2/3} \left[\log \frac{1}{\beta} \right]^{4/3} \sim \frac{\Omega_1^{2/3}}{n_h^{1/2}} \left[\log \frac{n_h^{3/4}}{\Omega_1} \right]^{4/3},$$

onde risulta

$$\psi_h(u) : \psi_h^*(u) > (1 + o(1)) \exp(n_h^{1/2} \log^{4/3} n_h)$$

per $u \geq \Omega_0 n_h^{5/8}$ ($\Omega_0 \rightarrow +\infty$ lentamente quanto si vuole).

La (2.17) risulta dimostrata e quindi è stato ottenuto un miglioramento nel passaggio da (e) al Teorema A.

§ 3. - La dimostrazione del teorema principale.

3.1. - La funzione intera «ribaltatrice».

In questo ordine di problemi un metodo classico consiste nel ricorrere alla funzione intera di FABER ⁽¹⁰⁾ la quale, con la considerazione delle ψ_h -variazioni, si definisce nel modo seguente.

Siano m_1, m_2, \dots, m_{r_h} i valori dell'indice m del tratto I_h tali che a_m introduca una ψ_h -variazione di segno. Poniamo $\varrho_s^* = m_s - 1/2$ ($s = 1, 2, \dots, r_h$),

$$P_h(z) = \prod_{s=1}^{r_h} \left[1 - \frac{z^2}{\varrho_s^{*2}} \right],$$

$$(3.1) \quad g^*(z) = \prod_{h=1}^{\infty} P_h(z).$$

Questa funzione (3.1), che cambia segno nel passaggio da m_{s-1} a m_s , fornisce i «ribaltamenti» che sopprimono le variazioni di segno; possiamo anzi osservare che potrà essere impiegata come «ribaltatrice» ogni altra funzione intera, analoga a $g^*(z)$, che si ottiene infittendo la successione degli zeri ϱ^* con l'introduzione di altri zeri, inseriti a coppie (ϱ_1, ϱ_2) e collocati in modo da avere $m_s < \varrho_1 < \varrho_2 < m_{s+1} - 1$ (gli zeri di queste funzioni, per comodità, saranno anche, nel seguito, denominati «nodi»).

Risulterà utile per la dimostrazione del Teorema A un classico teorema di G. PÓLYA ⁽¹¹⁾ che si può enunciare come segue:

⁽¹⁰⁾ Cfr. E. LANDAU [4], pp. 78-83.

⁽¹¹⁾ Cfr. L. BIEBERBACH [1], p. 12.

« Condizione necessaria e sufficiente affinché

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

in tutto il piano di Riemann abbia punti singolari soltanto su $|\arg z| \leq \Delta\pi$, $0 \leq \Delta < 1$, $|z| = 1$, è che esista una funzione intera $A(z)$, appartenente al più al tipo medio di ordine 1, tale che valga

$$a_n = A(n) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

e il suo diagramma indicatore sia un segmento dell'asse immaginario compreso fra $-i\Delta\pi$ e $i\Delta\pi$. »

Una funzione $A(z)$ che verifichi le proprietà richieste dal teorema precedente è fornita dal seguente lemma ⁽¹²⁾:

« La funzione

$$A(z) = \prod_1^{\infty} \left[1 - \frac{z^2}{\varrho_k^2} \right]$$

appartiene al tipo medio di ordine 1 ed ha come diagramma indicatore il segmento dell'asse immaginario compreso fra $-i\Delta\pi$ e $i\Delta\pi$, quando esiste una successione $\{\varrho_k\}$ di numeri con le seguenti proprietà:

- a) $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \dots$;
- b) $\varrho_{k+1} - \varrho_k \geq l > 0$, $k = 1, 2, \dots$; l indipendente da k ;
- c) la densità di $\{\varrho_k\}$ è Δ , $0 \leq \Delta < 1$. »

Si tratta dunque di passare dalla successione degli zeri ϱ^* della $g^*(z)$ ad una nuova successione di zeri, avente densità Δ ($0 < \Delta < 1$): ciò viene effettuato secondo le modalità indicate nel § 4; si perviene ad una nuova successione $\{\bar{\varrho}\}$ (di densità Δ). Indichiamo con $\bar{g}(z)$ la funzione intera costruita a partire dalla successione $\{\bar{\varrho}\}$, così come si è costruita $g^*(z)$ a partire da $\{\varrho^*\}$:

$$(3.2) \quad \bar{g}(z) = \prod_{\bar{\varrho}} \left[1 - \frac{z^2}{\bar{\varrho}^2} \right].$$

⁽¹²⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽¹¹⁾, pp. 12-13.

Nella dimostrazione del Teorema A si prende in esame l'espressione

$$(3.3) \quad \left| \frac{\bar{g}(m)}{\bar{g}(n_h)} \right| = \prod_{\bar{\varrho}} \left| \frac{m^2 - \bar{\varrho}^2}{n_h^2 - \bar{\varrho}^2} \right| = \prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}),$$

cioè il modulo del rapporto dei due valori $\bar{g}(m)$, $\bar{g}(n_h)$ di $\bar{g}(z)$ calcolati nel punto $m \in I_h$ e nel punto n_h centrale di I_h : a questo fine si deve tener presente l'andamento del fattore generale nella forma

$$\lambda(x) = \lambda(x; n_h, m) = \left| \frac{m^2 - x^2}{n_h^2 - x^2} \right|$$

($n_h > 0$, $0 < \theta < 1$, $m \neq n_h$, $(1 - \theta)n_h \leq m \leq (1 + \theta)n_h$); tale andamento viene presentato nei due casi $m < n_h$ e $m > n_h$) rispettivamente nelle figure 1 e 2 del n. 5.1.

Dell'espressione $|\bar{g}(m)/\bar{g}(n_h)|$ verrà data una utile maggiorazione.

3.2. - Passaggio dalla funzione $\bar{g}(z)$ alla funzione $g(z; m)$.

Per dare una maggiorazione dell'espressione $|\bar{g}(m)/\bar{g}(n_h)|$ si procede ad un opportuno « adattamento » dei nodi $\bar{\varrho}$; questo adattamento dipende da m e viene effettuato tenendo presente l'andamento della funzione $\lambda(x)$. Siamo condotti ad una nuova successione di nodi ϱ , dipendente da m , ed alla funzione intera

$$g(z; m) = \prod_{\varrho} \left[1 - \frac{z^2}{\varrho^2} \right].$$

Per questa funzione è garantita la disuguaglianza

$$(3.4) \quad \left| \bar{g}(m)/\bar{g}(n_h) \right| \leq \left| g(m; m)/g(n_h; m) \right| \quad \text{per ogni } m \in I_h.$$

Il passaggio dai nodi della categoria $\bar{\varrho}$ a quelli della categoria ϱ viene presentato col Lemma del § 5.

3.3. - Maggiorazione del rapporto $|g(m; m)/g(n_h; m)|$. Lemma principale.

La distribuzione dei nodi ϱ , così come viene effettuata nel § 5, è abbastanza regolare sull'intervallo $0 < x < +\infty$ da consentire la maggiorazione dell'espres-

sione

$$\log |g(m; m)/g(n_h; m)| = \sum_{\varrho} \log \lambda(\varrho) = \sum_{\varrho} A(\varrho)$$

ricorrendo ad espressioni integrali. Questo calcolo viene eseguito nel § 6, dove, dopo avere stabilito un confronto fra un certo tipo di somme e gli integrali corrispondenti (vedi n. 6.1), si dimostra il seguente

Lemma principale. *Sia $m = n_h \pm u$, $1 \leq u \leq \theta n_h$, e $\bar{g}(z)$ la funzione intera*

$$(3.2) \quad \bar{g}(z) = \prod_{\varrho} \left[1 - \frac{z^2}{\varrho^2} \right],$$

dove $\bar{\varrho}$ descrive la successione $\{\bar{\varrho}\}$ (misurabile, con densità Δ) definita al n. 4.2. Se $\{n_h\}$ è abbastanza diradata in modo che risulti $n_{h-1}/n_h \rightarrow 0$ e se inoltre

$$(3.5) \quad v_h \rightarrow +\infty, \quad v_1 + v_2 + \dots + v_{h-1} = O(\log n_h), \quad \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{v_k}{n_k^2} = O\left(\frac{\log n_h}{n_h^2}\right),$$

$$(3.6) \quad j_h \rightarrow +\infty, \quad j_1 + j_2 + \dots + j_{h-1} = O(\log n_h), \quad \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{j_k}{n_k^2} = O\left(\frac{\log n_h}{n_h^2}\right),$$

allora esistono $K' = K'(\Delta)$ e $h_0(\Delta)$ (indipendenti da h) tali che per $h \geq h_0$ si abbia

$$(3.7) \quad \left| \frac{\bar{g}(m)}{g(n_h)} \right| \leq \exp \left\{ v_h \log \frac{u}{v_h} + c(\Delta) j_h \log \frac{u}{j_h} + K' \cdot (v_h + j_h + \log n_h) \right\},$$

dove $c(\Delta) = 2(1 + 2\Delta)(1 - \Delta)$.

Il secondo membro di (3.7) fornisce la parte più riposta della funzione condizionatrice, verso la quale era diretta la presente ricerca.

3.4. - Alcuni lemmi noti.

Si richiamano qui alcuni lemmi noti che saranno utili per la dimostrazione del Teorema A secondo lo schema classico.

Lemma 1°. « Sia $0 < \theta < 1$,

$$c_{n,m} = \frac{n!n!}{m!(2n-m)!} \quad (m \in I_h); \quad S_h(\theta) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h,m} a_m \quad (\text{somma di FABRY}).$$

Se $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = 1$, $\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} |S_h(\theta)|^{1/n_h} \geq 1$, allora $z = 1$ è singolare per la serie $\sum a_n z^n$. » (13)

La funzione $\bar{g}(z)$ introdotta in 3.1 verifica la seguente proprietà:

Lemma 2°. « $|\bar{g}(n_h)|^{1/n_h} \rightarrow 1$ per $h \rightarrow +\infty$. » (14)

La validità di questo lemma è assicurata dal fatto che n_h dista di almeno $1/4$ da ogni zero della funzione intera $\bar{g}(z)$.

Lemma 3°. « Per $0 < u < n/2$ risulta

$$c_{n,m} = c_{n,n \pm u} = \exp \left\{ -n \cdot T(u/n) + O(1) \right\} \quad \text{per } n \rightarrow +\infty,$$

dove

$$(3.8) \quad T(z) = \sum_1^{\infty} \frac{z^{2k}}{k(2k-1)} = z^2 + \frac{1}{6} z^4 + \dots \text{ » } (15)$$

3.5. - La funzione condizionatrice.

La funzione $\psi_h(u)$ che assumiamo come condizionatrice delle variazioni di segno della sequenza $\operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h})$ ($m \in I_h$; $h = 1, 2, 3, \dots$) è la seguente

$$(3.9) \quad \psi_h(u) = \exp \left\{ n_h T \left[\frac{u}{n_h} \right] - v_h \log \frac{u}{v_h} - c(\Delta) j_h \log \frac{u}{j_h} + K \cdot (v_h + j_h + \log n_h) \right\} \cdot \\ \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}),$$

dove $T(z)$ è la funzione (3.8) definita nel Lemma 3°, $c(\Delta)$ è la costante definita al n. 2.1 (Teorema A) e $K = K' + 2$ (K' è la costante che compare in (3.7)).

3.6. - La parte conclusiva della dimostrazione.

Poichè la successione $\{\bar{\rho}\}$ ha densità Δ , per quanto richiamato in 3.1, la funzione

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} \bar{g}(n) z^n$$

ammette punti singolari soltanto sull'arco I_{Δ} (1.1). Inoltre $\varphi(z)$ verifica la proprietà espressa dal Lemma 2° (n. 3.4).

(13) Cfr. E. LANDAU [4], p. 77.

(14) Cfr. loc. cit. in (12).

(15) Questo lemma si trova in G. RICCI [8].

Per dimostrare l'esistenza di almeno un punto singolare di $f(z)$ sull'arco Γ_A , basterà dimostrare (in forza del classico teorema di moltiplicazione delle singolarità di HADAMARD) che la funzione

$$(3.10) \quad F(z) = \sum_0^{\infty} a_n \bar{g}(n) z^n = \sum_0^{\infty} A(n) z^n$$

ammette il punto $z = 1$ come singolare, e questa proprietà si riconosce provando che $F(z)$ verifica le due proprietà richieste dal classico Lemma 1° (n. 3.4).

Dalle ipotesi $\overline{\lim} |a_n|^{1/n} = 1$, $\{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \}^{1/n_h} \rightarrow 1$ riguardanti $f(z)$ e dal Lemma 2° segue

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} |A(n_h)|^{1/n_h} = \overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} \{ |a_{n_h}|^{1/n_h} \cdot |\bar{g}(n_h)|^{1/n_h} \} \rightarrow 1,$$

e la prima a proprietà è verificata.

Veniamo a dimostrare che vale anche l'altra proprietà, riguardante le somme di FABRY,

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow +\infty} |S_h(\theta)|^{1/n_h} \geq 1,$$

seguendo uno schema noto di dimostrazione ⁽¹⁶⁾. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_h(\theta, \gamma_h) &= \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot \operatorname{Re}(a_m \bar{g}(m) e^{-i\gamma_h}) = \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} \cdot \bar{g}(m) \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) = \\ &= \bar{g}(n_h) \cdot \left\{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_{\substack{m \in I_h \\ m \neq n_h}} c_{n_h, m} \frac{\bar{g}(m)}{\bar{g}(n_h)} \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \right\}. \end{aligned}$$

Ripartiamo i termini di quest'ultima somma \sum in due categorie, a costituire due somme parziali \sum_1 e \sum_2 , ponendo nella prima e nella seconda i termini per i quali si ha rispettivamente ($m = n_h \pm u$)

$$(3.11) \quad \left| \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \right| > \psi_h(u), \quad \left| \operatorname{Re}(a_m e^{-i\gamma_h}) \right| \leq \psi_h(u).$$

Otteniamo

$$S_h(\theta, \gamma_h) = \bar{g}(n_h) \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_1 + \sum_2 \},$$

⁽¹⁶⁾ Vedi, per es., G. RICCI [6], pp. 27-29.

da cui segue

$$|S_h(\theta, \gamma_h)| \geq |\bar{g}(n_h)| \cdot \{ |\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) + \sum_1| - |\sum_2| \}.$$

I termini in \sum_1 hanno tutti lo stesso segno, positivo come quello di $\operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h})$ (questo per effetto del cambiamento di segno prodotto dalla funzione $\bar{g}(z)$ « ribaltatrice »); se segue, a maggior ragione,

$$|S_h(\theta, \gamma_h)| \geq |\bar{g}(n_h)| \cdot \{ \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) - |\sum_2| \}.$$

Veniamo a maggiorare $|\sum_2|$.

$$|\sum_2| \leq \sum |c_{n_h, m}| \cdot \left| \frac{\bar{g}(m)}{\bar{g}(n_h)} \right| \psi_h(u).$$

In forza del Lemma 3° e del Lemma principale, tenendo conto delle disuguaglianze là stabilite, si trova che il termine generale in \sum_2 non supera l'espressione

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -n_h T \left[\frac{u}{n_h} \right] + O(1) + v_h \log \frac{u}{v_h} + c(\Delta) j_h \log \frac{u}{j_h} + (K' - K)(v_h + j_h + \log n_h) + \right. \\ & \left. + n_h T \left[\frac{u}{n_h} \right] - v_h \log \frac{u}{v_h} - c(\Delta) j_h \log \frac{u}{j_h} \right\} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) = \\ & = \exp \{ -2(v_h + j_h + \log n_h) + O(1) \} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}), \end{aligned}$$

dove $h \geq h_1$ e $K = K' + 2$, e quindi

$$\begin{aligned} |\sum_2| & \leq 2\theta n_h \cdot \exp \{ -2(v_h + j_h + \log n_h) + O(1) \} \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \\ & \leq \frac{1}{2} \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \quad \text{per } h \geq h_0. \end{aligned}$$

Ne segue

$$|S_h(\theta, \gamma_h)|^{1/n_h} \geq \left\{ \frac{1}{2} |\bar{g}(n_h)| \cdot \operatorname{Re}(a_{n_h} e^{-i\gamma_h}) \right\}^{1/n_h} \rightarrow 1.$$

Quindi, essendo

$$|S_h(\theta)| = \left| \sum_{m \in I_h} c_{n_h, m} A(m) \right| \geq |S_h(\theta, \gamma_h)|,$$

risulta

$$\overline{\lim} |S_h(\theta)|^{1/n_h} \geq \overline{\lim} |S_h(\theta, \gamma_h)|^{1/n_h} \geq 1$$

e, in forza del Lemma 1°, il Teorema A risulta dimostrato.

Rimane da esporre la parte presentata schematicamente nei nn. 3.1-3.5.

§ 4. - La funzione ribaltatrice $\bar{g}(z)$.

Nel n. 3.1 è stata introdotta la funzione intera « ribaltatrice » $g^*(z)$, i cui zeri costituiscono la successione $\{\varrho^*\}$. Ci proponiamo qui di costruire una nuova funzione intera, ancora ribaltatrice, $\bar{g}(z)$ tale che la successione dei suoi zeri $\bar{\varrho}$ abbia densità Δ , allo scopo di applicare il teorema di G. PÓLYA ⁽¹⁷⁾ già richiamato in 3.1.

4.1. - Sistemazione preliminare degli intervalli $J_{h,l} \subseteq I_h$.

Per rendere più agevole la costruzione della successione dei nodi $\bar{\varrho}$, associamo preliminarmente sistemi di intervalli $J_{h,l}$ consecutivi appartenenti al semitratto $I'_h \equiv ((1 - \theta)n_h \leq x \leq n_h)$, oppure al semitratto $I''_h \equiv (n_h < x \leq (1 + \theta)n_h)$, con la seguente legge:

In I'_h si inizia dall'intervallo aderente a n_h e si procede verso sinistra: si associano intervalli consecutivi fino ad ottenere un intervallo che abbia ampiezza $\leq j_h$ e sia il massimo a godere di questa proprietà; così si continua fino ad esaurire I'_h . In modo analogo si opera in I''_h , iniziando da n_h e procedendo verso destra. Chiamiamo ancora $J_{h,l}$ i nuovi intervalli ottenuti e poniamo $J_{h,l} \equiv (p_{h,l-1} < x \leq p_{h,l})$, $J_{h,-l} \equiv (p_{h,-l} < x \leq p_{h,-l+1})$ ($l = 1, 2, 3, \dots$; $p_{h,0} = n_h$). Si osserva che: 1° con questa trasformazione il numero ν_h dei nodi $\varrho^* \in I_h$, che sono in soprannumero per la validità di (2.4), non aumenta; 2° di due intervalli $J_{h,l}, J_{h,l+1}$ consecutivi, uno almeno ha ampiezza non inferiore a $j_h/2$.

4.2. - Costruzione della successione $\{\bar{\varrho}_i\}$.

Perchè la funzione $\bar{g}(z)$ abbia il carattere di funzione ribaltatrice come la $g^*(z)$, il passaggio dalla successione dei nodi ϱ^* (zeri di $g^*(z)$) alla successione dei nodi $\bar{\varrho}$, avente densità Δ , viene effettuato inserendo coppie (ϱ_1, ϱ_2) di nodi fra

⁽¹⁷⁾ Cfr. loc. cit. in ⁽¹¹⁾, pp. 12-13.

elementi consecutivi di $\{ \varrho^* \}$ e aggiungendo altri nodi ϱ_3 , secondo le modalità seguenti:

1) *Introduzione delle coppie* (ϱ_1, ϱ_2) nell'intervallo I_h ($h = 1, 2, 3, \dots$).

Si opera separatamente in I_h' e in I_h'' , ma seguendo un procedimento perfettamente analogo, che esponiamo qui riferendoci a I_h'' .

Ogni intervallo $J_{h,i}$ che contenga un numero di nodi $> \Delta j_{h,i}$ (e quindi almeno un nodo in soprannumero) si lascia inalterato.

In ogni intervallo $J_{h,i}$ che contenga un numero di nodi $\leq \Delta j_{h,i}$, le coppie (ϱ_1, ϱ_2) vengono collocate negli intervalli $(t-1, t)$ (t intero) che siano vuoti di nodi, cominciando da quello più lontano da n_h , e ponendo

$$\varrho_1 = t - 3/4, \quad \varrho_2 = t - 1/4$$

in modo da rispettare le norme seguenti:

i) detto $\tau_{h,i}$ il numero complessivo dei nodi in $J_{h,i}$ (nodi ϱ^* , ϱ_1 , ϱ_2) sia

$$[\Delta j_{h,i}] - 1 \leq \tau_{h,i} \leq [\Delta j_{h,i}] + 1;$$

ii) il numero complessivo $\sum_k \tau_{h,k}$ dei nodi ϱ^* , ϱ_1 , ϱ_2 , esclusi i nodi in soprannumero, contenuti in $n_h < x \leq p_{h,i}$ sia $N_{h,i}$ con

$$[\Delta(p_{h,i} - n)] - 2 \leq N_{h,i} \leq [\Delta(p_{h,i} - n)].$$

Osservazioni.

a) Se per rispondere a ii) fosse richiesto $\tau_{h,i} = [\Delta j_{h,i}] + 1$ e se in $J_{h,i}$ esistono nodi in soprannumero, anzichè inserire una coppia (ϱ_1, ϱ_2) si utilizzerà uno di questi nodi in soprannumero.

b) Per h abbastanza grande, risulta $[\Delta j_{h,i}] + 1 < j_{h,i}$, salvo al più per alcuni intervalli con $j_{h,i} \leq (1 - \text{mant } \Delta j_{h,i}) / (1 - \Delta)$, che si possono presentare al più uno per ogni coppia di intervalli consecutivi (si veda l'osservazione 2°) in 4.1). Questo consiglia di rimandare all'intervallo successivo $J_{h,i+1}$ il completamento di $J_{h,i}$ utile per verificare ii), quando sia $[\Delta j_{h,i}] + 1 \geq j_{h,i}$. Con questa avvertenza risulterà sempre verificata la relazione $\tau_{h,i} \leq j_{h,i}$.

c) La presenza di nodi in soprannumero in $J_{h,i}$ esclude la presenza di coppie; infatti, in tal caso, esistono in $J_{h,i}$ almeno $[\Delta j_{h,i}] + 1$ nodi, e d'altra parte i) e ii) richiedono al più $[\Delta j_{h,i}] + 1$ nodi.

d) La collocazione delle coppie (ϱ_1, ϱ_2) secondo le modalità i), ii) è possibile (come si può dimostrare per induzione).

2) Collocamento dei nodi della categoria ϱ_3 .

I nodi ϱ_3 vengono collocati nei punti u/Δ , con u intero, che appartengono ad ogni intervallo

$$(1 + \theta)n_h < x < (1 - \theta)n_{h+1}, \quad (h = 1, 2, 3, \dots).$$

Una volta introdotte le coppie (ϱ_1, ϱ_2) e i nodi ϱ_3 secondo le modalità qui esposte, assumiamo come sistema di nodi $\bar{\varrho}$ la successione formata dall'unione dei sistemi dei nodi ϱ^* , ϱ_1 , ϱ_2 , ϱ_3 .

4.3. - Densità della successione $\{\bar{\varrho}_i\}$.

La successione $\{\bar{\varrho}_i\}$ ha densità Δ .

Per provare che sussiste questa proprietà, basta verificare che, detto $N(a, b)$ il numero dei nodi $\bar{\varrho}$ tali che $a < \bar{\varrho} \leq b$, risulta $N(0, x)/x \rightarrow \Delta$ per $x \rightarrow +\infty$.

Possiamo supporre la successione $\{n_h\}$ abbastanza diradata (si veda l'osservazione 3), n. 2.1) in modo che siano verificate le proprietà di diradamento, richieste nel Lemma principale (n. 3.3): $n_{h-1}/n_h \rightarrow 0$, $\sum_{k=1}^{h-1} v_k = O(\log n_h)$ per $h \rightarrow \infty$.

Per la condizione ii) in 4.2, è garantita per ogni h la limitazione [scriviamo $N(I_h)$ per $N((1 - \theta)n_h, (1 + \theta)n_h)$]

$$2[\Delta\theta n_h] - 4 \leq N(I_h) \leq 2[\Delta\theta n_h] + v_h$$

e, a maggior ragione,

$$2\Delta\theta n_h - 6 \leq N(I_h) \leq 2\Delta\theta n_h + v_h.$$

Esaminiamo l'andamento del rapporto $N(0, x)/x$ distinguendo i due casi: $x \in I_h$, $x \notin I_h$ ($h = 1, 2, \dots$).

1°) Sia $n_h < x \leq (1 + \theta)n_h$, $x \in J_{h,i} \equiv (p_{h,i-1} < z \leq p_{h,i})$. Risulta

$$\begin{aligned} N(0, x) &\leq N(0, (1 - \theta)n_h) + N((1 - \theta)n_h, n_h) + N(n_h, p_{h,i}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{h-1} N(I_k) + \Delta \left\{ (1 - \theta)n_h - \sum_{k=1}^{h-1} 2\theta n_k \right\} + h + \Delta \left\{ \theta n_h + (p_{h,i} - n_h) \right\} + v_h \\ &\leq \Delta p_{h,i} + h + \sum_{k=1}^h v_k \leq \Delta(x + j_h) + h + \sum_{k=1}^h v_k, \end{aligned}$$

da cui

$$(4.1) \quad N(0, x) \leq \Delta x \left\{ 1 + (\Delta j_h + h + \sum_{k=1}^h v_k) / (\Delta n_h) \right\}.$$

D'altra parte si ha

$$\begin{aligned} N(0, x) &\geq N(0, (1 - \theta)n_h) + N((1 - \theta)n_h, n_h) + N(n_h, p_{h, l-1}) \\ &\geq \sum_{k=1}^{h-1} N(I_k) + \Delta \left\{ (1 - \theta)n_h - \sum_{k=1}^{h-1} 2\theta n_k \right\} - h + \Delta \theta n_h + \Delta(p_{h, l-1} - n_h) - 6 \\ &\geq \Delta p_{h, l-1} - 7h \geq \Delta(x - j_h) - 7h, \end{aligned}$$

da cui

$$(4.2) \quad N(0, x) \geq \Delta x \left\{ 1 - (\Delta j_h + 7h) / (\Delta x) \right\}.$$

Per le ipotesi fatte su j_h , v_h ($j_h = o(n_h)$, $v_h = o(n_h)$) e sul diradamento di n_h , si ha

$$(\Delta j_h + h + \sum_{k=1}^h v_k) / n_h \rightarrow 0, \quad (\Delta j_h + 7h) / x \leq (\Delta j_h + 7h) / n_h \rightarrow 0 \text{ per } h \rightarrow \infty,$$

e da (4.1) e (4.2) segue $N(0, x) \sim \Delta x$ per $x \rightarrow +\infty$, $x \in \cup I_h''$.

Quando sia $(1 - \theta)n_h < x \leq n_h$, si trova con calcoli analoghi $N(0, x) \sim \Delta x$ per $x \rightarrow +\infty$, $x \in \cup I_h'$, e pertanto la stessa relazione è garantita per $x \rightarrow +\infty$ lungo $\cup I_h$.

2°) Sia $(1 + \theta)n_h < x < (1 - \theta)n_{h+1}$. Allora è

$$\begin{aligned} N(0, x) &= \sum_{k=1}^h N(I_k) + \Delta \left\{ x - \sum_{k=1}^h 2\theta n_k \right\} \\ &\leq \Delta x + \sum_{k=1}^h v_k, \end{aligned}$$

da cui

$$(4.3) \quad N(0, x) \leq \Delta x \left\{ 1 + \left(\sum_{k=1}^h v_k \right) / (\Delta n_h) \right\};$$

e d'altra parte

$$\begin{aligned} N(0, x) &\geq \sum_{k=1}^h N(I_k) + \Delta \left\{ x - \sum_{k=1}^h 2\theta n_k \right\} - h - 1 \\ &\geq \Delta x - 7h - 1, \end{aligned}$$

$$(4.4) \quad N(0, x) \geq \Delta x \left\{ 1 - (7h + 1) / (\Delta n_h) \right\}.$$

Da (4.3) e (4.4) segue, tenuto conto delle ipotesi, $N(0, x) \sim \Delta x$ per $x \rightarrow +\infty$, $x \in \cup I_h$.

Risulta pertanto $N(0, x)/x \rightarrow \Delta$ per $x \rightarrow +\infty$, e si è così dimostrato che la successione dei nodi \bar{q} ha densità Δ .

§ 5. - Un lemma sull'adattamento della successione dei nodi.

5.1. - Preliminari.

Si consideri la funzione

$$\lambda(x) = \lambda(x; n_h, m) = \left| \frac{m^2 - x^2}{n_h^2 - x^2} \right|, \quad m \in I_h, m \neq n_h$$

della variabile x , definita nell'intervallo $0 \leq x < +\infty$, $x \neq n_h$. L'andamento di $\lambda(x)$ nei due casi $(1 - \theta)n_h \leq m < n_h$, $n_h < m \leq (1 + \theta)n_h$ è illustrato dalle seguenti figure

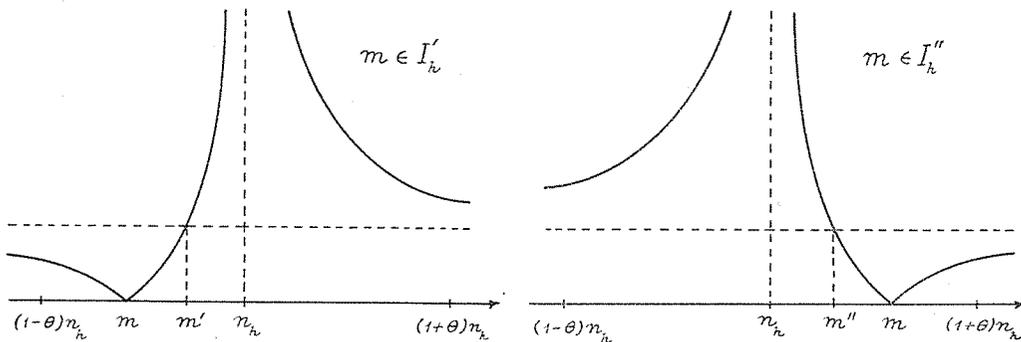


Fig. 1

Fig. 2

Consideriamo il valore di x per il quale è $\lambda(x) = 1$; esso risulta $x = \{ (m^2 + n_h^2)/2 \}^{1/2}$. Poniamo $m = (1 \pm \mu)n_h$ ($1/n_h \leq \mu \leq \theta$). Distinguendo i due casi $m \in I'_h$, $m \in I''_h$, indichiamo rispettivamente con m' e m'' tale valore di x ; posto $m' = (1 - \mu')n_h$, $m'' = (1 + \mu'')n_h$, si ha

$$\mu' = 1 - (1 - \mu + \mu^2/2)^{1/2} = \mu/2 - \mu^2/8 + \dots$$

$$\mu'' = (1 + \mu + \mu^2/2)^{1/2} - 1 = \mu/2 + \mu^2/8 + \dots;$$

in particolare, risulta $\mu' \sim \mu/2$, $\mu'' \sim \mu/2$ per $\mu \rightarrow 0$ ⁽¹⁸⁾.

(18) Per altre informazioni, vedere G. RICCI [6], pp. 18-19.

Come è stato annunciato in 3.2, ci proponiamo di sostituire al sistema dei nodi $\bar{\varrho}$ un nuovo sistema $\{\varrho\}_m$ di nodi ϱ , dipendente da m , che risponda ai due seguenti requisiti:

1) Abbia una distribuzione abbastanza regolare da consentire l'uso di certi integrali per la maggiorazione del prodotto $\prod_{\varrho} \lambda(\varrho)$ (come verrà fatto nel § 6); la regolarità della distribuzione verrà conseguita mediante opportuni « scorrimenti » nel sistema dei nodi $\bar{\varrho}$.

2) Nel passaggio dal sistema $\{\bar{\varrho}\}$ al sistema $\{\varrho\}_m$ deve essere rispettata la disuguaglianza

$$\prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}) \leq \prod_{\varrho} \lambda(\varrho), \quad \varrho \in \{\varrho\}_m;$$

per raggiungere questo intento si terrà presente il diagramma di $\lambda(x)$ e si opererà in modo che nel passaggio dall'allineamento dei $\bar{\varrho}$ a quello dei ϱ , ogni nodo $\bar{\varrho}$ o rimanga fermo o si sposti nel verso dell'ordinata $\lambda(x)$ crescente. Questa condizione conduce alla formazione di « intervalli pieni » di nodi (cioè un nodo in ogni punto $t - 1/2$ con t intero) dove le ordinate $\lambda(x)$ sono grandi, o almeno > 1 , e di « intervalli vuoti » di nodi dove le ordinate $\lambda(x)$ sono piccole, o almeno ≤ 1 , e di « sovrapposizioni », cioè nodi da computarsi secondo una molteplicità dichiarata. (Si potranno eventualmente sopprimere, in questa fase, alcuni nodi $\bar{\varrho}$, quando per essi risulti $\lambda(\bar{\varrho}) \leq 1$: infatti, il sopprimerli equivale a sostituire ad essi nel prodotto $\prod \lambda(\bar{\varrho})$ altrettanti fattori $= 1$).

Un allineamento di nodi ϱ , utile nel senso esposto, è quello indicato dal lemma seguente.

5.2. - Il lemma.

Lemma. Si consideri il sistema (indipendente da h e da m) dei nodi $\bar{\varrho}$ (come è stato costruito nel § 4) e il prodotto

$$\prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}; n_n, m) = \prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}).$$

Accanto a questo, consideriamo il sistema $\{\varrho\}_m$ (dipendente da m) di nodi ϱ costituito dalla successione di punti

$$r/\Delta \quad (r = 1, 2, 3, \dots)$$

con le eccezioni qui sotto presentate, e l'analogo prodotto

$$\prod_{\varrho} \lambda(\varrho).$$

Poniamo:

m', m'' il valore x tale che $\lambda(x) = 1$ rispettivamente per $m \in I'_h, m \in I''_h$;

v'_h, v''_h il numero dei nodi in soprannumero rispettivamente in I'_h, I''_h ;

$$\sigma'_h = (v'_h + j_h)/(1 - \Delta), \quad \sigma''_h = (v''_h + j_h)/(1 - \Delta),$$

$$j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta,$$

$$j_k^* = 2(1 - \Delta)j_k \quad \text{per } k \neq h,$$

$$K > 4/(1 - \Delta).$$

Distinguiamo $m \in I'_h, m \in I''_h$.

1) Sia $(1 - \theta)n_h \leq m < n_h$.

1.1) Eccezioni in I_h :

« intervallo pieno » di nodi $(m', n_h + \sigma''_h)$,

« intervallo vuoto » di nodi $(m - j_h^*, m')$ quando sia $n_h - K \cdot (v_h + j_h) \leq m < n_h$,

« intervallo pieno » di nodi $(n_h - \sigma'_h, n_h + \sigma''_h)$,

« intervallo vuoto » di nodi $(m - j_h^*, m + j_h^*)$ quando sia $(1 - \theta)n_h \leq m < n_h - K \cdot (v_h + j_h)$.

1.2) Eccezioni in I_k per ogni $k \neq h$:

« intervallo vuoto » di nodi $((1 + \theta)n_k - j_k^*, (1 + \theta)n_k)$,

un sistema di $v_k + j_k$ nodi ϱ sovrapposti nel punto $(1 - \theta)n_k$.

2) Sia $n_h < m \leq (1 + \theta)n_h$. (Eccezioni analoghe).

2.1) Eccezioni in I_h :

« intervallo pieno » di nodi $(n_h - \sigma'_h, m'')$,

« intervallo vuoto » di nodi $(m'', m + j_h^*)$ quando sia $n_h < m \leq n_h + K \cdot (v_h + j_h)$,

« intervallo pieno » di nodi $(n_h - \sigma'_h, n_h + \sigma''_h)$,

« intervallo vuoto » di nodi $(m - j_h^*, m + j_h^*)$ quando sia $n_h + K \cdot (v_h + j_h) < m \leq (1 + \theta)n_h$.

2.2) *Eccezioni in I_k per ogni $k \neq h$:*

« Intervallo vuoto » di nodi $((1 - \theta)n_k, (1 - \theta)n_k + j_k^*)$,

un sistema di $v_k + j_k$ nodi q sovrapposti nel punto $(1 + \theta)n_k$.

Allora risulta

$$\prod_{\bar{q}} \lambda(\bar{q}) \leq \prod_{q} \lambda(q) \quad (q \in \{q\}_m)$$

per $m \in I_h$, $h \geq h_0 = h_0(\{j_s\}, \Delta)$.

Osservazioni.

1) Conviene osservare subito che, quando sia $m > n_h + K \cdot (v_h + j_h)$ con $K > 4/(1 - \Delta)$, sussistono le disuguaglianze

$$(5.1) \quad n_h + \sigma''_h \leq m'' \leq m - j_h^*$$

(almeno per $h \geq h_0$), e quando sia $m < n_h - K \cdot (v_h + j_h)$ quelle analoghe $m + j_h^* \leq m' \leq n_h - \sigma'_h$.

Dimostriamo (5.1). Si verifica facilmente che è

$$\begin{aligned} m'' &= 2^{-1/2}(m^2 + n_h^2)^{1/2} \geq 2^{-1/2} \{ (n_h + K \cdot (v_h + j_h))^2 + n_h^2 \}^{1/2} \\ &\geq (1 - \Delta)^{-1} n_h \{ (1 - \Delta)^2 + 4(1 - \Delta)(v_h + j_h)/n_h + 8(v_h + j_h)^2/n_h^2 \}^{1/2} \\ &\geq n_h \{ 1 + 2(1 - \Delta)^{-1} (v_h + j_h)/n_h \} \geq n_h + \sigma''_h. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la disuguaglianza a destra in (5.1), notiamo che, posto $m = (1 + \mu)n_h$, la condizione imposta ad m si può scrivere $\mu > K \cdot (v_h + j_h)/n_h$; d'altronde, perchè sia $m - j_h^* \geq m''$ deve essere $\mu - j_h^*/n_h \geq \mu''$, cioè $1 + \mu - j_h^*/n_h \geq (1 + \mu + \mu^2/2)^{1/2}$, da cui, con facili calcoli, si ottiene

$$\mu \geq (1 + 2j_h^{*2}/n_h^2)^{1/2} - 1 + 2j_h^*/n_h;$$

perchè questa disuguaglianza sussista, basta che sia

$$\mu \geq (2 + \tau)j_h^*/n_h = 2(2 + \tau)(1 - \Delta)j_h/n_h + 5\Delta^{-1}(2 + \tau)/n_h$$

con $\tau > 0$ e $h \geq h_1(\{j_s\}, \tau)$, e questa relazione è verificata pur di prendere $\tau \leq \tau_0(\Delta) = 2\Delta(2 - \Delta)/(1 - \Delta)^2$ e $h \geq h_0(\{j_s\}, \Delta)$. Infatti, si ha

$$\begin{aligned} \mu &> K \cdot (v_h + j_h)/n_h > Kj_h/n_h = \\ &= 2(2 + \tau)(1 - \Delta)j_h/n_h + \{K - 2(2 + \tau)(1 - \Delta)\}j_h/n_h, \end{aligned}$$

ed essendo $K - 2(2 + \tau)(1 - \Delta) \geq K - 4/(1 - \Delta) > 0$ per $\tau \leq \tau_0(\Delta)$, segue l'asserto per $h \geq h_0(\{j_s\}, \Delta)$.

2) La dimostrazione del Lemma, nel dare la costruzione effettiva del sistema $\{\varrho\}_m$ a partire dal sistema dei $\bar{\varrho}$, porrà in evidenza che $\{\varrho\}_m$ è costruito seguendo le intenzioni segnalate nelle osservazioni preliminari: questa costruzione condurrebbe a un lemma in una forma più raffinata ma meno semplice di quella qui enunciata, per noi sufficiente nell'applicazione successiva.

5.3. - Dimostrazione del lemma.

Dimostriamo la parte del Lemma relativa al caso $m \in I_h'' \equiv (n_h, (1 + \theta)n_h)$; il caso $m \in I_h'$ si dimostra in modo analogo. Per $m \in I_h''$, l'andamento della funzione $\lambda(x)$ è illustrato dalla fig. 2 (n. 5.1).

5.3.1. - Sistemazione dei nodi nell'intervallo (n_h, m) .

Sia $n_h < m \leq n_h + K \cdot (v_h + j_h)$.

Poichè è $\lambda(x) \geq 1$ per $n_h < x \leq m''$, $\lambda(x) < 1$ per $m'' < x \leq m$, è evidente che la configurazione: « pieno » l'intervallo (n_h, m'') , « vuoto » l'intervallo (m'', m) , è favorevole ai fini della maggiorazione, poichè il contributo che essa porta al prodotto $\prod \lambda(\varrho)$ supera quello corrispondente ai nodi $\bar{\varrho}$ contenuti nello stesso intervallo $n_h < x \leq m$.

Sia ora $n_h + K \cdot (v_h + j_h) < m \leq (1 + \theta)n_h$.

La costruzione che verrà eseguita conduce alla formazione dell'« intervallo vuoto » adiacente a m e dell'« intervallo pieno » adiacente a n_h .

a) L'« intervallo vuoto » $(m - j_h^*, m)$.

Consideriamo il sistema di intervalli $J_{h,i}$ della suddivisione di I_h , aventi al-

meno un punto in comune con l'intervallo $n_h < x \leq m$. Sia $m \in J_{h,v_0}$; possono darsi due casi: m estremo destro di J_{h,v_0} , oppure m interno a J_{h,v_0} .

Nel primo caso (m estremo destro di J_{h,v_0}), consideriamo il sistema dei nodi \bar{q} presenti nell'intervallo (n_h, m) , esclusi gli eventuali nodi in soprannumero ⁽¹⁹⁾: detti per un momento $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_t, \dots$ i nodi di tale sistema, numerati a partire da m verso sinistra, si può stabilire una limitazione per la posizione di \bar{q}_t . Sia $\bar{q}_t \in J_{h,v}$ ($v \leq v_0$) e, entro $J_{h,v}$, \bar{q}_t sia lo z -esimo a partire dall'estremo destro: allora risultano verificate le seguenti relazioni (in conseguenza della legge secondo la quale la successione dei \bar{q} è stata costruita nel § 4), riguardanti la posizione di \bar{q}_t e il suo numero d'ordine t ,

$$(5.2) \quad \bar{q}_t \geq m - \sum_{w=v+1}^{v_0} j_{h,w} - (1 - \Delta)j_{h,v} - z - 1,$$

$$(5.3) \quad t \geq \sum_{w=v+1}^{v_0} \Delta j_{h,w} + z + \tau \quad (-2 \leq \tau \leq 2).$$

Fissato il punto $m - j_h^*$ (con j_h^* da determinare opportunamente), consideriamo i nodi $q = r/\Delta$ con r intero, a partire da $m - j_h^*$ verso sinistra e numeriamoli: q_1, q_2, q_3, \dots . Tenuto conto di (5.3), si ha

$$(5.4) \quad q_t \leq m - j_h^* - (t-1)/\Delta,$$

$$q_t \leq m - j_h^* - \sum_{w=v+1}^{v_0} j_{h,w} - (z + \tau - 1)/\Delta.$$

Poichè $\lambda(x)$ è decrescente nell'intervallo $n_h < x \leq m$, ci proponiamo di determinare j_h^* in modo che per ogni t risulti $q_t \leq \bar{q}_t$. A questo scopo, basta che sia (per (5.2) e (5.4))

$$(1 - \Delta)j_{h,v} + z + 1 \leq j_h^* + (z + \tau - 1)/\Delta,$$

ed essendo $z \geq 1$, $\tau \geq -2$, $j_{h,v} \leq j_h$, basta assumere

$$j_h^* \geq (1 - \Delta)j_h + 2(1 + \Delta)/\Delta$$

e, a maggior ragione, basta $j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta$.

⁽¹⁹⁾ Negli intervalli $J_{h,l}$ che contengano un numero $v_{h,l}$ di nodi $v_{h,l} > \Delta j_{h,l}$, possiamo considerare come nodi in soprannumero i $v_{h,l} - [\Delta j_{h,l}]$ nodi più a destra in $J_{h,l}$.

Nel caso in cui m sia interno a J_{h,v_0} , si procede in modo analogo. Denotiamo per un momento con m_1 l'estremo sinistro di J_{h,v_0} e con $a(m)$ il numero dei nodi $\bar{\varrho} \in J_{h,v_0}$ tali che $m_1 \leq \bar{\varrho} \leq m$.

Per $t > a(m)$ si può riprendere il calcolo precedente e si ha

$$\bar{\varrho}_t \geq m_1 - \sum_{w=v+1}^{v_0-1} j_{h,w} - (1-\Delta)j_{h,v} - z - 1,$$

dove $v < v_0 - 1$ (se $v = v_0 - 1$ si intende $\sum_w j_{h,w} = 0$). Il numero d'ordine t di $\bar{\varrho}_t$ risulta

$$t \geq a(m) + \sum_{w=v+1}^{v_0-1} \Delta j_{h,w} + z + \tau \quad (-2 \leq \tau \leq 2).$$

Come nel caso precedente, collochiamo i nodi ϱ nei posti r/Δ , con r intero, a partire da $m - j_h^*$ verso sinistra, e numeriamoli: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$ (da $m - j_h^*$ verso sinistra). Risulta

$$\begin{aligned} \varrho_t &\leq m - j_h^* - (t-1)/\Delta \\ &\leq m - j_h^* - a(m)/\Delta - \sum_{w=v+1}^{v_0-1} j_{h,w} - (z + \tau - 1)/\Delta. \end{aligned}$$

Per avere $\varrho_t \leq \bar{\varrho}_t$ (per ogni t), basta che sia

$$\begin{aligned} m_1 - \sum_{\dots} j_{h,w} - (1-\Delta)j_{h,v} - z - 1 &\geq \\ \geq m - j_h^* - a(m)/\Delta - \sum_{\dots} j_{h,w} - (z + \tau - 1)/\Delta, \end{aligned}$$

e, tenuto conto che è $a(m) \geq 0$, $m - m_1 \leq (1-\Delta)j_h + \tau'$ ($-1 \leq \tau' \leq 1$), $j_{h,v} \leq j_h$, basta assumere

$$j_h^* \geq 2(1-\Delta)j_h + 1 + 2(1+\Delta)/\Delta$$

e quindi possiamo assumere $j_h^* = 2(1-\Delta)j_h + 5/\Delta$.

Per $1 \leq t \leq a(m)$, si presentano due possibilità:

$m - j_h^* \leq m_1$ oppure $m_1 < m - j_h^* < m$. Nel primo caso, è garantita la disuguaglianza $\lambda(\bar{\varrho}_t) \leq \lambda(\varrho_t)$, perchè si ha $\varrho_t \leq m - j_h^* \leq m_1 < \bar{\varrho}_t$; nel secondo caso risulta

$$\bar{\varrho}_t \geq m_1 + a(m) - t, \quad \varrho_t \leq m - j_h^* - (t-1)/\Delta,$$

e per avere $\varrho_t \leq \bar{\varrho}_t$ basta che sia

$$j_h^* \geq m - m_1 - (1 - \Delta)t/\Delta - a(m) + 1/\Delta,$$

ed essendo $t \geq 1$ basta

$$j_h^* \geq m - m_1 - a(m) + 1.$$

Diciamo $b(m)$ il numero dei nodi $\bar{\varrho} \in J_{h, v_0}$ tali che $\bar{\varrho} > m$: allora si ha

$$a(m) + b(m) \geq \Delta j_{h, v_0} + \tau'' \quad (-1 \leq \tau'' \leq 1),$$

$$m - m_1 \leq j_{h, v_0} - b(m).$$

Perchè risulti $\varrho_t \leq \bar{\varrho}_t$ basta dunque che sia

$$j_h^* \geq j_h - b(m) - a(m) + 1$$

e, a maggior ragione, basta

$$j_h^* \geq (1 - \Delta)j_h + 2.$$

Si può quindi assumere anche in questo caso $j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta$.

b) L'« intervallo pieno » $(n_h + 1/2, n_h + \sigma_h'')$.

Il passaggio dai nodi $\bar{\varrho}$ dell'intervallo (n_h, m) ai nodi $\varrho = r/\Delta < m - j_h^*$ (a partire da $m - j_h^*$ verso sinistra) ha condotto alla formazione dell'« intervallo vuoto » di nodi alla sinistra di m , avente ampiezza j_h^* ; per poter adattare tutti i $\bar{\varrho}$, compresi i nodi in soprannumero, dell'intervallo (n_h, m) restando nell'intervallo stesso, occorrerà fare un « intervallo pieno » (nel quale vi è un nodo in ogni $t - 1/2$ con t intero), $(n_h, n_h + \sigma_h'')$. Questo intervallo dovrà raccogliere: 1°) tutti i v_h'' nodi in soprannumero competenti a I_h'' ; 2°) i nodi $\bar{\varrho}$ in esso presenti; 3°) quei ϱ provenienti dai $\bar{\varrho}$ che la presenza dell'« intervallo vuoto » e la distribuzione « dosata » r/Δ spinge di necessità verso sinistra; 4°) ogni ϱ che per opportunità si voglia aggiungere, sempre rispettando la condizione $n + \sigma_h'' \leq m''$, la quale garantisce $\lambda(\varrho) \geq 1$.

Ci proponiamo qui di stabilire una espressione possibile di σ_h'' , che risulti indipendente da m ($n_h + K \cdot (v_h + j_h) < m \leq (1 + \theta)n_h$).

Diciamo $\sigma_h''(m)$ l'ampiezza dell'« intervallo pieno » destinato a raccogliere i nodi segnalati in 1°), 2°), 3°); tenendo conto del fatto che i nodi in soprannumero in (n_h, m) sono al più v_h'' , e che i nodi ϱ in $(n_h + \sigma_h''(m), m - j_h^*)$ sono

distribuiti con regolarità a distanza $1/\Delta$, si trova che $\sigma_h''(m)$ verifica la seguente relazione

$$\begin{aligned} \sigma_h''(m) - 1/2 + \Delta \{ (m - j_h^*) - (n_h + \sigma_h''(m)) \} + \tau &\leq \\ &\leq v_h'' + \Delta (m - n_h) + \min \{ m - m_1, \Delta j_{h,v_0} \} + \tau_1 + \tau_2, \end{aligned}$$

dove $-2 \leq \tau \leq 2$, $-2 \leq \tau_1 \leq 0$, $-1 \leq \tau_2 \leq 1$, e j_h^* , v_0 , m_1 hanno lo stesso significato come nella precedente parte a). Essendo

$$\min \{ m - m_1, \Delta j_{h,v_0} \} \leq v_h'' + \Delta (m - n_h) + \Delta (1 - \Delta) j_h + \tau_1 + \tau_2,$$

si ottiene

$$(1 - \Delta) \sigma_h''(m) \leq v_h'' + 3\Delta(1 - \Delta) j_h + 3(2 + \Delta).$$

Con l'aggiunta di nuovi nodi ϱ si può ampliare l'ampiezza $\sigma_h''(m)$ dell'« intervallo pieno », fino ad avere

$$\sigma_h'' = (v_h'' + j_h)/(1 - \Delta), \quad h \geq h_1(\{j_s\}, \Delta).$$

L'osservazione 1) dopo l'enunciato del Lemma in 5.1 garantisce che è $n_h + \sigma_h'' \leq m''$.

5.3.2. - Sistemazione dei nodi nell'intervallo $(m, (1 + \theta)n_h)$.

Si procede in modo analogo al n. 5.3.1.

Numeriamo, a partire da m verso destra, i nodi $\bar{\varrho}$, esclusi gli eventuali nodi in soprannumero (già considerati per formare l'« intervallo pieno »), e siano $\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \bar{\varrho}_3, \dots$. Fissato il punto $m + j_h^* \geq m + (1 - \Delta)j_h$ (j_h^* da determinare convenientemente) collochiamo i nodi suddetti nei posti $r/\Delta \geq m + j_h^*$, numerandoli da $m + j_h^*$ verso destra: $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \dots$. Ci proponiamo di scegliere j_h^* in modo da avere, per ogni t , $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$.

Distinguiamo i due casi: m è l'estremo sinistro dell'intervallo J_{h,v_0} , oppure $m \in J_{h,v_0}$.

Nel primo caso, se $\bar{\varrho}_t \in J_{h,v}$ ed è lo z -esimo nodo in $J_{h,v}$ (contato da sinistra verso destra), si ha, per $v > v_0$,

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_t &\leq m + \sum_{w=v_0}^{v-1} j_{h,w} + (1 - \Delta)j_{h,v} + z + 1, \\ t &\geq \Delta \sum_{w=v_0}^{v-1} j_{h,w} + z + \tau & (-2 \leq \tau \leq 2), \\ \varrho_t &\geq m + j_h^* + (t - 1)/\Delta, \end{aligned}$$

e si vede facilmente che per avere $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$ basta che risulti

$$(5.5) \quad j_h^* \geq (1 - \Delta)j_h + (1 + \Delta)/\Delta;$$

per $v = v_0$, risulta $t = z$ e

$$\bar{\varrho}_t \leq m + (1 - \Delta)j_{h,v_0} + z + 1,$$

$$\varrho_t \geq m + j_h^* + (t - 1)/\Delta,$$

e perchè sia $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$ basta ancora

$$(5.5)' \quad j_h^* \geq (1 - \Delta)j_h + (1 + \Delta)/\Delta.$$

Nel secondo caso ($m \in J_{h,v_0}$), denotiamo per un momento con m_1 l'estremo destro di J_{h,v_0} e con $a(m)$ il numero dei nodi $\bar{\varrho}$ (esclusi gli eventuali nodi in sovrannumero) contenuti in $m < x \leq m_1$. Allora, per $\bar{\varrho}_t \in J_{h,v}$ con $v > v_0$ si ha $t > a(m)$ e

$$\bar{\varrho}_t \leq m_1 + \sum_{w=v_0+1}^{v-1} j_{h,w} + (1 - \Delta)j_{h,v} + z + 1,$$

intendendo $\sum_w j_{h,w} = 0$ se $v = v_0 + 1$; inoltre

$$t \geq a(m) + \Delta \sum_{w=v_0}^{v-1} j_{h,w} + z + \tau \quad (-2 \leq \tau \leq 2),$$

$$\varrho_t \geq m + j_h^* + (t - 1)/\Delta,$$

e per avere $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$ basta assumere

$$(5.6) \quad j_h^* \geq 2(1 - \Delta)j_h + (2\Delta + 3)/\Delta.$$

Per $v = v_0$, è $1 \leq t \leq a(m)$ e risulta:

$$\text{se } m + j_h^* \geq m_1: \quad \bar{\varrho}_t \leq m_1 \leq m + j_h^* < \varrho_t;$$

$$\text{se } m < m + j_h^* < m_1: \quad \begin{cases} \bar{\varrho}_t \leq m_1 - a(m) + t + 1 \\ \varrho_t \geq m + j_h^* + (t - 1)/\Delta, \end{cases}$$

e, tenuto conto che $m_1 - m \leq (1 - \Delta)j_h + 1$, per avere $q_i \geq \bar{q}_i$ basta che sia

$$(5.7) \quad j_h^* \geq (1 - \Delta)j_h + (4\Delta - 1)/\Delta.$$

Da (5.5), (5.5)', (5.6), (5.7) segue che basta assumere

$$(5.8) \quad j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta.$$

I nodi q che con questa disposizione cadano in punti $u/\Delta \geq (1 + \theta)n_h$ (cioè i nodi q che non abbiano trovato posto entro l'intervallo $m < x \leq (1 + \theta)n_h$) si collocano sovrapposti nel punto m'' (si tenga conto che è $\lambda(m'') = 1$).

5.3.3. - Sistemazione dei nodi nell'intervallo $((1 + \theta)n_h, +\infty)$.

Per la legge con la quale è stata costruita la successione dei nodi \bar{q} , negli intervalli $(1 + \theta)n_k < x < (1 - \theta)n_{k+1}$, i nodi \bar{q} sono già collocati nei punti r/Δ (r intero). Fissiamo pertanto l'attenzione sui tratti I_k ($k \neq h$). L'andamento della funzione $\lambda(x)$ suggerisce di passare dai nodi \bar{q} ai nodi q operando spostamenti verso destra.

Gli eventuali ν_k nodi in soprannumero in I_k vengono collocati tutti nel punto $(1 + \theta)n_k$. I rimanenti nodi $\bar{q} \in I_k$ verranno collocati ancora in I_k , nei punti r/Δ con $(1 - \theta)n_k + j_k^* \leq r/\Delta \leq (1 + \theta)n_k$: quei nodi \bar{q} che non potessero rientrare in questo intervallo verranno collocati nel punto m'' ($\lambda(m'') = 1$).

Si tratta di determinare j_k^* in modo tale che, numerati i \bar{q} (esclusi quelli in soprannumero) a partire da $(1 - \theta)n_k$ verso destra: $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \dots, \bar{q}_t, \dots$, e i nodi q da $(1 - \theta)n_k + j_k^*$ verso destra: $q_1, q_2, \dots, q_t, \dots$, risulti $\bar{q}_t \leq q_t$.

Distinguiamo i due casi: $\bar{q}_t \in J_{k,-v} \subseteq I'_k$, $\bar{q}_t \in J_{k,v} \subseteq I''_k$. Nel primo caso, se \bar{q}_t è lo z -esimo in $J_{k,-v}$ contato da sinistra verso destra, si ha:

$$\bar{q}_t \leq n_k - \sum_{w=-1}^{-(v-1)} j_{k,w} - \Delta j_{k,-v} + z + 1,$$

$$t = \Delta \theta n_k - \sum_{w=-1}^{-(v-1)} \Delta j_{k,w} - \Delta j_{k,-v} + z + \tau \quad (-2 \leq \tau \leq 2),$$

$$q_t \geq (1 - \theta)n_k + j_k^* + (t - 1)/\Delta,$$

e per avere $\bar{q}_t \leq q_t$ basta che sia

$$j_k^* \geq (1 - \Delta)j_{k,-v} - (1 - \Delta)z/\Delta + 2/\Delta + 1$$

e, a maggior ragione, basta

$$(5.9) \quad j_k^* \geq (1 - \Delta)j_k + (2 + \Delta)/\Delta.$$

Con questa scelta di j_k^* risulta garantita la relazione $\bar{\varrho}_t \leq \varrho_t$ anche per ogni $\varrho_t \in I_k''$. Infatti, nel secondo caso, se $\bar{\varrho}_t \in J_{k,v} \subseteq I_k''$ ed è lo z -esimo in $J_{k,v}$ a partire da sinistra, si ha

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_t &\leq n_k + \sum_{w=1}^{v-1} j_{k,w} + (1 - \Delta)j_k + z + 1, \\ t &= \Delta \sum_{w=1}^{v-1} j_{k,w} + z + \tau \quad (-2 \leq \tau \leq 2), \\ \varrho_t &\geq n_k + (1 - \Delta)j_k + \sum_{w=1}^{v-1} j_{k,w} + z/\Delta + 1, \end{aligned}$$

ed è garantito $\bar{\varrho}_t \leq \varrho_t$ per $v > 1$; quando sia $v = 1$, è $t = z$ e inoltre

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_t &\leq n_k + (1 - \Delta)j_k + z + 1, \\ \varrho_t &\geq n_k + (1 - \Delta)j_k + z/\Delta + 1 \end{aligned}$$

e la proprietà è ancora vera.

Tenuto conto di (5.9), si può assumere

$$(5.10) \quad j_k^* = 2(1 - \Delta)j_k$$

per $k > h$, e $h \geq h_1(\{j_s\}, \Delta)$ abbastanza grande.

5.3.4. - Sistemazione dei nodi nell'intervallo $((1 - \theta)n_h, n_h)$.

L'andamento della funzione $\lambda(x)$ per $(1 - \theta)n_h < x < n_h$, suggerisce di eseguire sui nodi $\bar{\varrho}$ di questo intervallo degli spostamenti verso destra: tale adattamento condurrà alla formazione di un « intervallo pieno » $(n_h - \sigma_h', n_h - 1/2)$ di nodi ϱ (un nodo in ogni punto $t - 1/2$, con t intero), che, come quello analogo costruito in I_h'' , dovrà raccogliere, oltre ai nodi $\bar{\varrho}$ già in esso presenti e collocati al più uno per ogni intervallo unitario, e a tutti i v_h' nodi in soprannumero presenti in I_h' , anche tutti quei nodi che la distribuzione regolare nei punti r/Δ spinge necessariamente verso destra.

Denotiamo con $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t$, i nodi $\bar{\varrho} \in I_h'$ numerati a partire da n_h verso sinistra; con σ_h' l'ampiezza dell'« intervallo pieno »; con $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_t, \dots$ i nodi ϱ numerati da n_h verso sinistra.

Se è $t < \sigma'_h$ risulta evidentemente verificato $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$.

Se è $t \geq \sigma'_h$, sia $\bar{\varrho}_t \in J_{h,v}$, $\bar{\varrho}_t$ lo z -esimo nodo in $J_{h,v}$ contato da destra verso sinistra. Risulta

$$\bar{\varrho}_t \leq n_h - \sum_{w=1}^{-(v-1)} j_{h,w} - z + 1,$$

$$t \leq \Delta \sum_{w=1}^{-(v-1)} j_{h,w} + z + 2 + v'_h,$$

$$\varrho_t \geq n_h - \sigma'_h - (t - \sigma'_h)/\Delta - 1/\Delta,$$

e per avere $\varrho_t \geq \bar{\varrho}_t$ basta che sia

$$\sigma'_h \geq v'_h/(1 - \Delta) + z + (3 + \Delta)/(1 - \Delta),$$

ed essendo $1 \leq z \leq j_{h,v} \leq j_h$, basta che sia

$$(5.11) \quad \sigma'_h \geq v'_h/(1 - \Delta) + j_h + (3 + \Delta)/(1 - \Delta).$$

Così operando, si ottiene « vuoto » di nodi ϱ un intervallo $((1 - \theta)n_h, (1 - \theta)n_h + \alpha)$, la cui ampiezza α , non supera j_h/Δ . Poichè in questo intervallo è $\lambda(x) > 1$, si possono introdurre nuovi nodi nei posti r/Δ , con $(1 - \theta)n_h < r/\Delta < (1 - \theta)n_h + \alpha$, e il prodotto $\prod \lambda(\varrho)$ risulta ulteriormente aumentato.

Introducendo nuovi nodi $t - 1/2$ negli intervalli unitari privi di nodi ϱ , si può ampliare l'« intervallo pieno » fino ad avere

$$\sigma'_h = (v'_h + j_h)/(1 - \Delta),$$

che verifica (5.11) per $h \geq h_2(\{j_s\}, \Delta)$.

5.3.5. - Sistemazione dei nodi nell'intervallo $(0, (1 - \theta)n_h)$.

Negli intervalli $(1 + \theta)n_k < x < (1 - \theta)n_{k+1}$, i nodi ϱ sono già nei punti r/Δ (r intero). In ciascun I_k , $k < h$, si procede come per $k > h$: si otterrà « vuoto » di nodi ϱ l'intervallo $(1 - \theta)n_k \leq x \leq (1 - \theta)n_k + 2(1 - \Delta)j_k$; gli eventuali v_k ($\leq v_k$) nodi in soprannumero in I_k e i nodi, al più $[2\Delta(1 - \Delta)j_k] + 1 < j_k$, che nella nuova disposizione non trovino posto entro I_k si collocheranno sovrapposti in $(1 + \theta)n_k$.

Il lemma risulta così dimostrato.

§ 6. - La dimostrazione del lemma principale.

6.1. - Un lemma di collegamento fra somme e integrali.

Lemma. Sia $f(x) > 0$, definita nell'intervallo $\alpha \leq x \leq \beta$ e ivi monotona; sia $\Delta > 0$. Posto

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx, \quad S(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \leq \xi + n/\Delta \leq \beta} f(\xi + n/\Delta)$$

con n intero relativo, risulta

$$S(\alpha, \beta) = \Delta \cdot I(\alpha, \beta) + \gamma \cdot f(\beta), \quad |\gamma| \leq 1$$

se $f(x)$ è monotona non decrescente;

$$S(\alpha, \beta) = \Delta \cdot I(\alpha, \beta) + \gamma \cdot f(\alpha), \quad |\gamma| \leq 1$$

se $f(x)$ è monotona non crescente.

Dimostrazione. Le due relazioni si dimostrano in maniera analoga: qui dimostriamo la prima. Quando nell'intervallo $\alpha \leq x \leq \beta$ non sia contenuto alcun valore $\xi + n/\Delta$, detta relazione è vera, poichè si ha

$$S(\alpha, \beta) = 0, \quad \beta - \alpha < 1/\Delta,$$

$$I(\alpha, \beta) \leq (\beta - \alpha)f(\beta) < f(\beta)/\Delta,$$

e quindi risulta $0 = \Delta \cdot I(\alpha, \beta) + \gamma \cdot f(\beta)$, $|\gamma| \leq 1$. Quando in $\alpha \leq x \leq \beta$ siano contenuti valori $\xi + n/\Delta$, denotiamoli con $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. Dalle disuguaglianze

$$I(\xi_{r-1}, \xi_r) \leq f(\xi_r)/\Delta \leq I(\xi_r, \xi_{r+1})$$

(nella parte a sinistra e nella parte a destra rispettivamente sono esclusi i valori $r = 1$ e $r = N$ dell'indice, che vanno considerati a parte), si deduce

$$S(\alpha, \beta)/\Delta \leq I(\xi_1, \xi_N) + f(\beta)/\Delta \leq I(\alpha, \beta) + f(\beta)/\Delta,$$

$$S(\alpha, \beta)/\Delta \geq I(\alpha, \beta) - I(\xi_N, \beta) \geq I(\alpha, \beta) - f(\beta)/\Delta,$$

e segue l'asserto.

Osservazione. È evidente che per $f(x) < 0$ monotona, valgono le relazioni analoghe:

$$S(\alpha, \beta) = \Delta I(\alpha, \beta) + \gamma f(\alpha) \quad \text{se } f(x) \text{ è non decrescente,}$$

$$S(\alpha, \beta) = \Delta I(\alpha, \beta) + \gamma f(\beta) \quad \text{se } f(x) \text{ è non crescente,}$$

con $|\gamma| \leq 1$.

6.2. - Il procedimento dimostrativo del lemma principale.

Per dimostrare il Lemma principale (n. 3.3) si tratta di stabilire una valutazione dal disopra del rapporto $|\bar{g}(m)/\bar{g}(n_h)|$ relativo alla funzione intera $\bar{g}(z)$ avente come zeri i nodi $\bar{\varrho}$ della successione costruita nel § 4. Il lemma stabilito nel § 5 fornisce una successione $\{\varrho\}_m$ di nodi ϱ , i quali, interpretati come zeri nella funzione intera $g(z; m) = \prod_{\varrho} (1 - z^2/\varrho^2)$, conducono al prodotto $\prod_{\varrho} \lambda(\varrho)$ che, per il modo come è stato costituito il sistema dei nodi ϱ , verifica la disuguaglianza

$$\prod_{\varrho} \lambda(\varrho) = \left| \frac{g(m; m)}{g(n_h; m)} \right| \geq \prod_{\bar{\varrho}} \lambda(\bar{\varrho}) = \left| \frac{\bar{g}(m)}{\bar{g}(n_h)} \right|;$$

ci basterà pertanto stabilire una maggiorazione del prodotto $\prod_{\varrho} \lambda(\varrho)$.

Verrà presa in considerazione l'espressione

$$\log \prod_{\varrho} \lambda(\varrho) = \sum_{\varrho} \log \lambda(\varrho) = \sum_{\varrho} A(\varrho) = \sum_{\varrho} \log \left| \frac{\varrho^2 - m^2}{\varrho^2 - n_h^2} \right|,$$

e, sfruttando la regolarità di distribuzione dei nodi ϱ (fatta eccezione per gli intervalli segnalati nel Lemma del § 5), si applicherà il lemma di collegamento fra somme e integrali, con le opportune modificazioni dovute alla presenza dei tratti eccezionali.

6.3. - La dimostrazione nel caso $n_h < m \leq (1 + \theta) n_h$.

6.3.1. - Poniamo

$$S'_{\Delta}(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \leq r/\Delta \leq \beta} A(r/\Delta) \quad (0 < \Delta < 1; r > 0 \text{ intero}),$$

$$S'_1(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \leq r+1/2 \leq \beta} A(r+1/2),$$

$$S_{\Delta}(\alpha, \beta) = \sum_{\alpha \leq \varrho \leq \beta} A(\varrho),$$

$$I(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} A(x) dx$$

(in S_{Δ} si tiene conto anche della presenza degli «intervalli pieni», degli «intervalli vuoti» e delle «sovrapposizioni» secondo il Lemma del § 5).

Un semplice calcolo mostra che è

$$(6.1) \quad I(\alpha, \beta) = m \log \left| \frac{(m + \beta)(m - \alpha)}{(m - \beta)(m + \alpha)} \right| + n_h \log \left| \frac{(n_h - \beta)(n_h + \alpha)}{(n_h + \beta)(n_h - \alpha)} \right| + \\ + \beta \log \left| \frac{m^2 - \beta^2}{n_h^2 - \beta^2} \right| + \alpha \log \left| \frac{n_h^2 - \alpha^2}{m^2 - \alpha^2} \right|,$$

e risulta

$$(6.2) \quad I(0, +\infty) = 0.$$

Consideriamo la sequenza di numeri: $0, n_h - \tau'_h, n_h - 1/2, n_h + 1/2, n_h + \tau''_h, m - \xi''_h, m - 1/2, m + 1/2, m + \zeta''_h$, e i seguenti intervalli non sovrappoventisi $(0, n_h - \tau'_h), (n_h - \tau'_h, n_h - 1/2), (n_h - 1/2, n_h + 1/2), (n_h + 1/2, n_h + \tau''_h), (n_h + \tau''_h, m - \xi''_h), (m - \xi''_h, m - 1/2), (m - 1/2, m + 1/2), (m + 1/2, m + \zeta''_h), (m + \zeta''_h, +\infty)$.

Allora si ha, per il lemma del n. 6.1,

$$S'_{\Delta}(0, +\infty) \leq \Delta \cdot \{ I(0, n_h - \tau'_h) + I(n_h - \tau'_h, n_h - 1/2) + \\ + I(n_h + 1/2, n_h + \tau''_h) + I(n_h + \tau''_h, m - \xi''_h) + I(m - \xi''_h, m - 1/2) + \\ + I(m + 1/2, m + \zeta''_h) + I(m + \zeta''_h, +\infty) \} + \Sigma_0,$$

dove si è posto

$$\Sigma_0 = \Delta(n_h - \tau'_h) + \Delta(n_h - 1/2) + \Delta(n_h + 1/2) + \Delta(n_h + \tau''_h) - \\ - \Delta(m - \xi''_h) - \Delta(m - 1/2) - \Delta(m + 1/2) - \Delta(m + \zeta''_h),$$

e da (6.2) segue

$$S'_{\Delta}(0, +\infty) \leq -\Delta \cdot \{ I(n_h - 1/2, n_h + 1/2) + I(m - 1/2, m + 1/2) \} + \Sigma_0.$$

Tenendo conto della presenza degli «intervalli pieni», degli «intervalli vuoti» e delle «sovrapposizioni» di nodi, si ottiene per la somma $S_{\Delta}(0, +\infty)$

la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(0, +\infty) &\leq S'_{\Delta}(0, +\infty) + \\ &+ \{ S'_1(n_h - \tau'_h, n_h + \tau''_h) - S'_{\Delta}(n_h - \tau'_h, n_h - 1/2) - S'_{\Delta}(n_h + 1/2, n_h + \tau''_h) \} - \\ &- \{ S'_{\Delta}(m - \xi''_h, m - 1/2) + S'_{\Delta}(m + 1/2, m + \zeta''_h) \} - \\ &- \sum_{k \neq h} S'_{\Delta}((1 - \theta)n_k, (1 - \theta)n_k + j_k^*) + \Sigma_1 + \Sigma_2, \end{aligned}$$

dov'è posto

$$\Sigma_1 = \sum_{k \neq h} A((1 - \theta)n_k + j_k^*),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{k < h} (v_k + \Delta j_k^* + 1) A((1 + \theta)n_k) + \sum_{k > h} v_k A((1 + \theta)n_k),$$

e quindi

$$\begin{aligned} (6.3) \quad \sum_{0 \leq \varrho < +\infty} A(\varrho) &\leq (1 - \Delta)I(n_h - \tau'_h, n_h + \tau''_h) - \Delta I(m - \xi''_h, m + \zeta''_h) - \\ &- I(n_h - 1/2, n_h + 1/2) - \Delta \sum_{k \neq h} I((1 - \theta)n_k, (1 - \theta)n_k + j_k^*) + \\ &+ \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, \end{aligned}$$

dove Σ_1, Σ_2 hanno il significato già detto e

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &= 3A(n_h - 1/2) + 3A(n_h + 1/2) + A(n_h - \tau'_h) + A(n_h + \tau''_h) - \\ &- 2A(m - 1/2) - 2A(m + 1/2) - A(m - \xi''_h) - A(m + \zeta''_h). \end{aligned}$$

Quando si pensi la successione $\{n_h\}$ abbastanza diradata, in modo che per essa risultino verificate le ipotesi $n_{h-1}/n_h \rightarrow 0$, (3.5), (3.6) del lemma, si può scrivere in luogo di (6.3) la seguente maggiorazione di $\sum_{\varrho} A(\varrho)$

$$(6.3)' \quad \sum_{0 \leq \varrho < +\infty} A(\varrho) \leq (1 - \Delta)I(n_h - \tau'_h, n_h + \tau''_h) - \Delta I(m - \xi''_h, m + \zeta''_h) + T_h,$$

dove $T_h = O(\log n_h)$.

Il passaggio da (6.3) a (6.3)' viene eseguito nel n. 6.3.2. seguente.

6.3.2. - Valutazione di T_h .

Un semplice calcolo fornisce

$$(6.4) \quad I(n_h - 1/2, n_h + 1/2) = O(\log(m - n_h)) = O(\log n_h),$$

$$(6.5) \quad \sum_3 = O(\log(m - n_h)) = O(\log n_h).$$

Valutiamo $\sum_1 + \sum_2$. Tenendo conto dell'andamento della funzione $A(x) = \log \lambda(x)$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_1 + \sum_2 &\leq \sum_{k < h} (v_k + \Delta j_k^* + 2) A((1 + \theta)n_k) + \sum_{k > h} (v_k + 1) |A((1 - \theta)n_k)| \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

Per $k < h$, posto $m = (1 + \mu)n_h$, risulta

$$\begin{aligned} A((1 + \theta)n_k) &= 2 \log(1 + \mu) + \log \left\{ 1 - \frac{(1 + \theta)^2 n_k^2}{(1 + \mu)^2 n_h^2} \right\} - \log \left\{ 1 - (1 + \mu)^2 \frac{n_k^2}{n_h^2} \right\} \\ &\leq 2 \log(1 + \theta) + c_0(\theta) \cdot \frac{n_k^2}{n_h^2} \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ (1 + \theta)^{4s} \left[\frac{n_k}{n_h} \right]^{2s} \right\}, \end{aligned}$$

con $c_0(\theta)$ costante positiva. Essendo $\sum_{s=0}^{\infty} \{ \dots \} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \{ (1 + \theta)^{2s} n_{h-1}/n_h \}^{2s}$ convergente, anche $\sum_{s=0}^{\infty} \{ \dots \}$ converge, e diciamone $S(h)$ la somma; poichè $n_{h-1}/n_h \rightarrow 0$, $S(h)$ si mantiene limitata al crescere di h , e sia $S(h) \leq S$. Ne segue

$$A((1 + \theta)n_k) \leq 2 \log(1 + \theta) + c_1(\theta)(n_{h-1}/n_h)^2 \leq c_2(\theta)$$

e quindi

$$A_1 = O\left(\sum_{k < h} (v_k + j_k^*)\right).$$

Essendo $j_k^* = 2(1 - \Delta)j_k$ (per il Lemma al § 5), per (3.5) e (3.6) risulta

$$(6.6) \quad A_1 = O\left(\sum_{k < h} (v_k + j_k)\right) = O(\log n_h).$$

Per $k > h$ si ha analogamente

$$|A((1 - \theta)n_k)| \leq c_3(\theta) \cdot \frac{n_h^2}{n_k^2} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{n_h}{n_k} \right]^{2s} \leq c_3(\theta) \frac{n_h^2}{n_k^2} \sum_{s=0}^{\infty} \left[\frac{n_h}{n_{h+1}} \right]^{2s};$$

la serie $\sum (n_h/n_{h+1})^{2s}$ è convergente, e la sua somma $S'(h)$ si mantiene limitata al crescere di h . Si ha pertanto

$$|A((1-\theta)n_k)| \leq c_4(\theta)n_h^2/n_k^2,$$

e risulta

$$(6.7) \quad A_2 \leq c_4(\theta) \cdot n_h^2 \sum_{k>h} (n_k + 1)/n_k^2 = O(\log n_h)$$

per (3.5). Da (6.6) e (6.7) segue

$$(6.8) \quad \sum_1 + \sum_2 = O(\log n_h).$$

Diamo ora una valutazione della somma di integrali $\sum_{k \neq h} I((1-\theta)n_k, (1-\theta)n_k + j_k^*)$. Tenendo presente l'andamento di $A(x)$, è evidente che per $k < h$ si ha

$$I((1-\theta)n_k, (1-\theta)n_k + j_k^*) \leq j_k^* A((1+\theta)n_k) \leq c_2(\theta)j_k^* \leq 2c_2(\theta)j_k,$$

e quindi da (3.5) segue

$$(6.9) \quad \sum_{k<h} I(\dots) \leq 2c_2(\theta) \cdot \sum_{k<h} j_k = O(\log n_h).$$

Per $k > h$ è

$$|I((1-\theta)n_k, (1-\theta)n_k + j_k^*)| \leq j_k^* |A((1-\theta)n_k)|,$$

$$|A((1-\theta)n_k)| \leq c_4(\theta)n_h^2/n_k^2, \quad j_k^* = 2(1-\Delta)j_k < 2j_k,$$

e pertanto

$$\sum_{k>h} |I(\dots)| \leq 2c_4(\theta)n_h^2 \sum_{k>h} (j_k/n_k^2),$$

e da (3.6) segue

$$(6.10) \quad \sum_{k>h} |I(\dots)| = O(\log n_h).$$

Per (6.9) e (6.10) risulta

$$(6.11) \quad \left| \sum_{k \neq h} I((1-\theta)n_k, (1-\theta)n_k + j_k^*) \right| = O(\log n_h).$$

Le valutazioni contenute in (6.4), (6.5), (6.8), (6.11) giustificano il passaggio da (6.3) a (6.3)'.
 3

6.3.3. - Valutazione di due integrali.

Prendiamo in esame (6.3)' e procediamo alla valutazione dei due integrali $I(n_h - \tau_h', n_h + \tau_h'')$, $I(m - \xi_h'', m + \zeta_h'')$ che figurano nel secondo membro, tenendo presente che $\tau_h', \tau_h'', \xi_h'', \zeta_h''$ possono assumere espressioni diverse a seconda che sia $n_h < m \leq n_h + K \cdot (v_h + j_h)$ oppure $n_h + K \cdot (v_h + j_h) < m \leq (1 + \theta)n_h$, con $K > 4/(1 - \Delta)$.

1°) Si consideri $I(n_h - \tau_h', n_h + \tau_h'')$. Riprendendo le notazioni usate nel Lemma del § 5, e posto $m = (1 + \mu)n_h$, $m'' = (1 + \mu'')n_h$ ($\lambda(m'') = 1$), si ha

$$\tau_h' = \sigma_h', \quad \tau_h'' = \min \{ m'' - n_h, \sigma_h'' \},$$

e precisamente

$$\tau_h'' = \begin{cases} m'' - n_h = \mu'' n_h & \text{per } 0 < \mu \leq K \cdot (v_h + j_h)/n_h \\ \sigma_h'' & \text{per } K \cdot (v_h + j_h)/n_h < \mu \leq \theta. \end{cases}$$

Applicando (6.1) si ottiene (omettiamo gli indici h)

$$(6.12) \quad \frac{1}{n} I(n - \tau', n + \tau'') = \left[2 + \mu + \frac{\tau''}{n} \right] \log \left[2 + \mu + \frac{\tau''}{n} \right] - \left[2 + \mu - \frac{\tau'}{n} \right] \log \left[2 + \mu - \frac{\tau'}{n} \right] + \\ + \left[2 - \frac{\tau'}{n} \right] \log \left[2 - \frac{\tau'}{n} \right] - \left[2 + \frac{\tau''}{n} \right] \log \left[2 + \frac{\tau''}{n} \right] + \left[\mu + \frac{\tau'}{n} \right] \log \left[\mu + \frac{\tau'}{n} \right] - \\ - \left[\mu - \frac{\tau''}{n} \right] \log \left[\mu - \frac{\tau''}{n} \right] - \frac{\tau'}{n} \log \frac{\tau'}{n} - \frac{\tau''}{n} \log \frac{\tau''}{n} + O \left[\frac{\log n}{n} \right].$$

2°) Consideriamo ora $I(m - \xi_h'', m + \zeta_h'')$. Con le notazioni usate nel § 5, si ha

$$\xi_h'' = \begin{cases} m - m'' = (\mu - \mu'')n_h & \text{per } 0 < \mu \leq K \cdot (v_h + j_h)/n_h \\ j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta & \text{per } K \cdot (v_h + j_h)/n_h < \mu \leq \theta, \end{cases}$$

$$\zeta_h'' = j_h^* = 2(1 - \Delta)j_h + 5/\Delta.$$

In dipendenza del valore di m si avrà quindi da (6.1) l'uno o l'altro dei seguenti integrali:

$$(6.13) \quad \frac{1}{n} I(m'', m + j^*) = \left[2 + 2\mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[2 + 2\mu + \frac{j^*}{n} \right] - \\ - (2 + \mu + \mu'') \log (2 + \mu + \mu'') - \left[2 + \mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[(2 + \mu + \frac{j^*}{n}) + (2 + \mu'') \log (2 + \mu'') + \right. \\ \left. + (\mu - \mu'') \log (\mu - \mu'') - \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] + \frac{j^*}{n} \log \frac{j^*}{n} + \mu'' \log \mu'' + O \left[\frac{\log n}{n} \right], \right.$$

$$(6.14) \quad \frac{1}{n} I(m - j^*, m + j^*) = \left[2 + 2\mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[2 + 2\mu + \frac{j^*}{n} \right] - \\ - \left[2 + 2\mu - \frac{j^*}{n} \right] \log \left[2 + 2\mu - \frac{j^*}{n} \right] + \\ + \left[2 + \mu - \frac{j^*}{n} \right] \log \left[2 + \mu - \frac{j^*}{n} \right] - \left[2 + \mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[2 + \mu + \frac{j^*}{n} \right] + \\ + \left[\mu - \frac{j^*}{n} \right] \log \left[\mu - \frac{j^*}{n} \right] - \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] + 2 \frac{j^*}{n} \log \frac{j^*}{n} + O \left[\frac{\log n}{n} \right].$$

(Per brevità si sono tralasciati gli indici h).

6.3.4. - *Maggiorazione della somma* $\sum_q A(q)$.

1°) Sia $1/n_h \leq \mu \leq K \cdot (v_h + j_h)/n_h$, con $K > 4/(1 - \Delta)$.

L'espressione che figura nel secondo membro di (6.3)' richiede in questo caso la valutazione della seguente espressione integrale: $(1 - \Delta)I(n_h - \sigma'_h, m'') - \Delta I(m'', m + j_h^*)$. Tenendo conto di (6.12) e (6.13), si trova

$$(1/n_h) \{ I(n_h - \sigma'_h, m'') - \Delta I(m'', m + j_h^*) \} = \\ = (1 - \Delta) \left\{ \left[\mu + \frac{\sigma'}{n} \right] \log \left[\mu + \frac{\sigma'}{n} \right] - (\mu - \mu'') \log (\mu - \mu'') - \frac{\sigma'}{n} \log \frac{\sigma'}{n} - \mu'' \log \mu'' \right\} - \\ - \Delta \left\{ (\mu - \mu'') \log (\mu - \mu'') - \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] \log \left[\mu + \frac{j^*}{n} \right] + \frac{j^*}{n} \log \frac{j^*}{n} + \mu'' \log \mu'' \right\} + \\ + O \left[\mu + \frac{\sigma' + \log n}{n} \right],$$

e di qui segue

$$(6.15) \quad \frac{1}{n_h} \sum_{\varrho} A(\varrho) = O \left[\mu + \frac{\sigma'_h + \log n_h}{n_h} \right] = O \left[\frac{v_h + j_h + \log n_h}{n_h} \right]$$

quando si tenga presente che per l'espressione di σ'_h (assegnata dal Lemma al § 5) risulta

$$\sigma'_h = (v'_h + j_h)/(1 - \Delta) \leq (v_h + j_h)/(1 - \Delta).$$

$$2^{\circ}) \quad \text{Sia } K \cdot (v_h + j_h)/n_h < \mu \leq \theta \quad (K > 4/(1 - \Delta)).$$

L'espressione integrale nel secondo membro di (6.3)' assume in questo caso la forma: $(1 - \Delta)I(n_h - \sigma'_h, n_h + \sigma''_h) - \Delta I(m - j^*, m + j^*)$. Usando (6.12) e (6.14), dopo alcuni calcoli, si perviene al risultato seguente, nel quale poniamo $m - n_h = u (= \mu n_h)$ e sostituiamo a σ'_h e σ''_h le loro espressioni date dal Lemma del § 5,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{\varrho} A(\varrho) &= (1 - \Delta) \left\{ \frac{\sigma'}{n} \log \frac{u}{\sigma'} + \frac{\sigma''}{n} \log \frac{u}{\sigma''} + 4\Delta \frac{j}{n} \log \frac{u}{j} \right\} + O \left[\frac{\sigma' + \sigma'' + \log n}{n} \right] = \\ &= \frac{1}{n} \left\{ (v' + j) \log \frac{u}{v' + j} + (v'' + j) \log \frac{u}{v'' + j} + 4\Delta(1 - \Delta)j \log \frac{u}{j} \right\} + \\ &\quad + O \left[\frac{v' + v'' + j + \log n}{n} \right], \end{aligned}$$

da cui segue (essendo $v'_h + v''_h = v_h \leq v_h$)

$$(6.16) \quad \frac{1}{n_h} \sum_{\varrho} A(\varrho) \leq \frac{v_h}{n_h} \log \frac{u}{v_h} + c(\Delta) \frac{j_h}{n_h} \log \frac{u}{j_h} + O \left[\frac{v_h + j_h + \log n_h}{n_h} \right]$$

con $c(\Delta) = 2(1 - \Delta)(1 + 2\Delta)$. (Risulta $0 < c(\Delta) \leq 9/4$; $9/4 = c(1/4)$).

Osservazione. La (6.15) mostra che si può ritenere valida (6.16) anche per $1/n_h \leq \mu \leq K \cdot (v_h + j_h)/n_h$.

6.3.5. - *Maggiorazione del rapporto* $|\bar{g}(m)/\bar{g}(n_h)|$.

Risulta, per la (6.16),

$$\begin{aligned} \left| \frac{\bar{g}(m)}{\bar{g}(n_h)} \right| &= \prod_{\varrho} \lambda(\bar{\varrho}) \leq \prod_{\varrho} \lambda(\varrho) \leq \\ &\leq \exp \left\{ v_h \log \frac{u}{v_h} + 2(1-\Delta)(1+2\Delta)j_h \log \frac{u}{l_h} + O(v_h + j_h + \log n_h) \right\} \end{aligned}$$

e il lemma principale risulta così dimostrato nel caso $n_h < m \leq (1+\theta)n_h$.

6.4. - **La dimostrazione nel caso** $(1-\theta)n_h \leq m < n_h$.

Con procedimento analogo a quello seguito nel precedente n. 6.3, si perviene alla stessa espressione maggiorante del rapporto $|\bar{g}(m)/\bar{g}(n_h)|$.

Bibliografia.

- [1] L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, *Ergebn. d. Math.*, N. F., H. 3, Springer, Berlin 1955.
- [2] M. CUGIANI, *Variazioni di segno condizionate, tratto ridotto e teorema di Fabry-Pólya*, *Riv. Mat. Univ. Parma* 8 (1957), 99-132.
- [3] M. CUGIANI, *Sulla densità massimale delle successioni e sui teoremi di Fabry e Pólya-Bieberbach*, *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend. A.* 93 (1959), 273-286.
- [4] E. LANDAU, *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Springer, Berlin (1929).
- [5] G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken, und Singularitäten von Potenzreihen*, *Math. Z.* 29 (1929), 549-640.
- [6] G. RICCI, *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 38 (1955), 1-31.
- [7] G. RICCI, *Fluttuazione relativa e punti singolari delle serie di potenze*, *Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett., Rend. A.* 88 (1955), 3-24.
- [8] G. RICCI, *Complementi alla Memoria «Variazioni di segno...»* (Pronto per la pubblicazione).

Indice.

§ 1. - <i>Introduzione</i>	pag. 233
1.1. - Considerazioni preliminari	» 233
1.2. - Posizione del problema	» 236
§ 2. - <i>I risultati</i>	» 237
2.1. - Il teorema principale	» 237
2.2. - La « soglia di sensibilità » della funzione condizionatrice	» 240
2.3. - Due aspetti limiti del teorema principale	» 242
2.4. - Alcuni esempi di confronto fra i teoremi dati	» 244
2.5. - Forme semplici per la funzione condizionatrice	» 246
2.6. - Il tratto ridotto	» 249
2.7. - Confronto del teorema principale con risultati noti	» 251
§ 3. - <i>La dimostrazione del teorema principale</i>	» 254
3.1. - La funzione intera « ribaltatrice »	» 254
3.2. - Passaggio dalla funzione $\bar{g}(z)$ alla funzione $g(z; m)$	» 256
3.3. - Maggiorazione del rapporto $ g(m; m)/g(n_h; m $. Lemma principale	» 256
3.4. - Alcuni lemmi noti	» 257
3.5. - La funzione condizionatrice	» 258
3.6. - La parte conclusiva della dimostrazione	» 258
§ 4. - <i>La funzione ribaltatrice $\bar{g}(z)$</i>	» 261
4.1. - Sistemazione preliminare degli intervalli $J_{h,i} \subseteq I_h$	» 261
4.2. - Costruzione della successione $\{\bar{q}_i\}$	» 261
4.3. - Densità della successione $\{\bar{q}_i\}$	» 263
§ 5. - <i>Un lemma sull'adattamento della successione dei nodi</i>	» 265
5.1. - Preliminari	» 265
5.2. - Il lemma	» 266
5.3. - Dimostrazione del lemma	» 269
§ 6. - <i>La dimostrazione del lemma principale</i>	» 278
6.1. - Un lemma di collegamento fra somme e integrali	» 278
6.2. - Il procedimento dimostrativo del lemma principale	» 279
6.3. - La dimostrazione nel caso $n_h < m \leq (1 + \theta)n_h$	» 279
6.4. - La dimostrazione nel caso $(1 - \theta)n_h \leq m < n_h$	» 287
<i>Bibliografia</i>	» 287

* * *

Avvertenza. Gli autori dichiarano che, qualora si debba distinguere il contributo apportato da ciascuno di essi al presente lavoro, i §§ 1, 2, 3, contenenti lo scopo e i risultati della ricerca, non possono essere suddivisi per l'attribuzione. Dei rimanenti §§ 4, 5, 6: il § 4 e il § 6 sono prevalentemente dovuti a F. Skof, il § 5 prevalentemente a L. Tanzi Cattabianchi.