Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 201-210

GIUSEPPE VAROLI (*)

Sulle funzioni esponenziale e circolari, di passo h, nel Calcolo delle differenze finite. (**)

1. - Introduzione.

Nelle applicazioni della Matematica spesso le grandezze a cui i problemi fanno riferimento variano nel discreto. In questi casi, anzichè introdurre ipotesi più o meno valide per ridurre i problemi al continuo e poter utilizzare gli strumenti del calcolo infinitesimale, è spesso più conforme alla natura stessa dei problemi far ricorso al Calcolo delle differenze finite.

Sotto questo punto di vista ci sembra pertanto non privo di interesse l'argomento trattato in questa Nota, argomento che non ci risulta sia stato finora considerato.

2. - Premessa.

Poniamo

(1) $$\Delta_{(h)} f(x) = f(x+h) - f(x) ,$$

(2) $$\mathrm{R}_{(h)} f(x) = \frac{1}{h} \Delta_{(h)} f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} ,$$

e chiamiamo *passo* l'incremento h e *operatore incrementale di passo* h l'operatore $\mathrm{R}_{(h)}$ di formazione del rapporto incrementale.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica Finanziaria, Università, Bologna, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno accademico 1963-64. — Ricevuto il 30-V-1964.

Diremo *potenza n-esima di passo h*, e la rappresenteremo con $x^{n;h}$, il noto prodotto

$$x^{n;h} = x(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h) \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)\,. \tag{3}$$

È

$$\lim_{h\to 0} x^{n;h} = x^{n;0} = x^n$$

e per convenzione

$$x^{0;h} = 1\,.$$

Applicando successivamente s volte l'operatore (2) a (3) si ottiene

$$\mathrm{R}^s_{(h)}\, x^{n;h} = \begin{cases} n^{s;1}\, x^{(n-s);h} & \text{per } s = 1, 2, \dots, n-1 \\ n^{n;1} = n! & \text{per } s = n \\ 0 & \text{per } s = n+1, n+2, \dots, \end{cases}$$

cioè nei confronti di (3) l'operatore (2) si comporta nello stesso modo dell'operatore d/dx nei confronti di x^n.

Relativamente alla potenza n-esima di passo h di un binomio vale la nota formula di VANDERMONDE:

$$(x+y)^{n;h} = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^{(n-s);h}\, y^{s;h}\,.$$

3. - Funzione esponenziale di passo h.

3.1. - È

$$\mathrm{R}_{(h)}\, a^x = a^x \frac{a^h - 1}{h} \qquad (0 < a \neq 1); \tag{4}$$

volendo che sia

$$\frac{a^h - 1}{h} = \alpha, \tag{5}$$

con α costante qualsiasi, deve prendersi

$$a = (1 + \alpha h)^{1/h} = \{(1 + \alpha h)^{1/\alpha h}\}^{\alpha} \qquad (-1 < h \neq 0)\,.$$

Poniamo

$$e_{(\alpha h)} = (1 + \alpha h)^{1/\alpha h}$$

e diciamo

$$e^{\alpha x}_{(\alpha h)} = (1 + \alpha h)^{x/h} \tag{6}$$

funzione esponenziale di passo h e base $a = e^{\alpha}_{(\alpha h)}$.

Risulta

$$\lim_{h\to 0} e^{\alpha x}_{(\alpha h)} = \{\lim_{h\to 0} (1 + \alpha h)^{1/\alpha h}\}^{\alpha x} = e^{\alpha x}, \tag{7}$$

$$\mathrm{R}_{(h)}\, e^{\alpha x}_{(\alpha h)} = \alpha(1 + \alpha h)^{x/h} = \alpha\, e^{\alpha x}_{(\alpha h)}\,, \tag{8}$$

cioè nei confronti di (6) l'operatore (2) si comporta nello stesso modo dell'operatore $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ nei confronti di $e^{\alpha x}$.

3.2. – Se, in particolare, nella (5) si pone $\alpha = 1$, risulta

$$a = (1 + h)^{1/h} \qquad (-1 < h \neq 0)$$

e la (6) diviene [1]

$$e^{x}_{(h)} = (1 + h)^{x/h}. \tag{6'}$$

---

[1] Si può osservare che per $-\infty < x < +\infty$ risulta

$$e^{x}_{(h)} > 0, \qquad e^{0}_{(h)} = 1\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^{x}_{(h)} = e^{x}_{(h)}\, \frac{\log(1+h)}{h} > 0, \qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\, e^{x}_{(h)} = e^{x}_{(h)} \left[\frac{\log(1+h)}{h}\right]^2 > 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x}_{(h)} = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{x}_{(h)} = 0\,.$$

Dunque la (6′), al variare del passo h $(-1 < h \neq 0)$, rappresenta una famiglia di curve che hanno andamenti del tutto analoghi a quello di e^{x}.

Chiamiamo la (6′) *funzione esponenziale naturale di passo h* (2).

3.3. – Sviluppando (6) in serie di potenze (*serie binomiale*), si ha

$$(1 + \alpha h)^{x/h} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x/h}{n} \alpha^n h^n , \tag{9}$$

convergente per $0 < |h| < \dfrac{1}{|\alpha|}$ e per qualunque x.

Tenendo conto di (3), risulta

$$\binom{x/h}{n} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{x}{h}\left(\frac{x}{h} - 1\right)\left(\frac{x}{h} - 2\right)\ldots\left(\frac{x}{h} - (n-1)\right) = \frac{1}{n!\, h^n} x^{n;h} ,$$

quindi la (9) diviene

$$(1 + \alpha h)^{x/h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha^n x^{n;h} . \tag{9′}$$

3.4. – Da (9′), per $\alpha = 1$, si ottiene

$$(1 + h)^{x/h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n;h} \qquad (0 < |h| < 1) . \tag{9″}$$

Chiamiamo la (9″) *serie esponenziale di passo h*, infatti da essa, passando al limite per $h \to 0$, si ottiene

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n .$$

---

(2) È interessante notare l'analogia che presenta la legge di capitalizzazione composta esponenziale

$$(1 + i)^t$$

(i = tasso di interesse, t = tempo), valida anche per $-1 < i < 0$, secondo un'estensione considerata in un nostro precedente lavoro (cfr. G. Varoli, *Sull'introduzione e il significato di « tasso negativo » in Matematica Finanziaria*, Pubblicazione n. 2 dell'Istituto di Matematica Finanziaria dell'Università di Bologna, 1960), con la (6′), ove si consideri $h = i$ e genericamente $x/h = t$.

4. - Funzioni circolari di passo h.

4.1. – Diciamo rispettivamente *seno, coseno, tangente, di passo h*, le funzioni così definite:

$$\operatorname{sen}_{(h)} x = \frac{1}{2i}\left\{ (1 + ih)^{x/h} - (1 - ih)^{x/h} \right\}, \tag{10}$$

$$\cos_{(h)} x = \frac{1}{2}\left\{ (1 + ih)^{x/h} + (1 - ih)^{x/h} \right\}, \tag{11}$$

$$\operatorname{tg}_{(h)} x = \frac{\operatorname{sen}_{(h)} x}{\cos_{(h)} x} = \frac{1}{i}\,\frac{(1 + ih)^{x/h} - (1 - ih)^{x/h}}{(1 + ih)^{x/h} + (1 - ih)^{x/h}}, \tag{12}$$

($0 < |h| < 1$, $i =$ unità immaginaria).

Da (10), tenendo conto di (7) con $\alpha = i$, segue

$$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen}_{(h)} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{sen} x,$$

ed analogamente da (11), (12):

$$\lim_{h \to 0} \cos_{(h)} x = \cos x, \qquad \lim_{h \to 0} \operatorname{tg}_{(h)} x = \operatorname{tg} x.$$

Nei confronti di (10), (11) l'operatore (2) si comporta nello stesso modo dell'operatore d/dx nei confronti di $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

Infatti, tenendo conto di (8), risulta

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{(h)} \operatorname{sen}_{(h)} x &= \frac{1}{2i}\left\{ \mathrm{R}_{(h)}(1 + ih)^{x/h} - \mathrm{R}_{(h)}(1 - ih)^{x/h} \right\} = \\ &= \frac{1}{2i}\left\{ i(1 + ih)^{x/h} + i(1 - ih)^{x/h} \right\} = \cos_{(h)} x \end{aligned} \tag{13}$$

ed analogamente

$$\mathrm{R}_{(h)} \cos_{(h)} x = - \operatorname{sen}_{(h)} x. \tag{14}$$

Per quanto riguarda invece (12) risulta:

$$\mathrm{R}_{(h)}\,\mathrm{tg}_{(h)}\,x = \mathrm{R}_{(h)}\,\frac{\mathrm{sen}_{(h)}x}{\cos_{(h)}x} = \frac{1}{h}\left\{\frac{\mathrm{sen}_{(h)}(x+h)}{\cos_{(h)}(x+h)} - \frac{\mathrm{sen}_{(h)}x}{\cos_{(h)}x}\right\} =$$

$$(15) \qquad = \frac{\cos_{(h)} x\,(\mathrm{sen}_{(h)}\,x + h\cos_{(h)}\,x) - \mathrm{sen}_{(h)}\,x\,(\cos_{(h)}\,x - h\,\mathrm{sen}_{(h)}\,x)}{h\cos_{(h)}\,x\cdot\cos_{(h)}\,(x+h).} =$$

$$= \frac{\mathrm{sen}^2_{(h)}\,x + \cos^2_{(h)}\,x}{\cos_{(h)}\,x\cdot\cos_{(h)}\,(x+h)},$$

tenendo conto che è [3]

$$\mathrm{sen}_{(h)}\,(x+h) = \frac{1}{2i}\left\{(1+ih)^{(x+h)/h} - (1-ih)^{(x+h)/h}\right\} =$$

$$(16) \qquad = \frac{1}{2i}\left\{(1+ih)^{x/h} - (1-ih)^{x/h} + ih[(1+ih)^{x/h} + (1-ih)^{x/h}]\right\} =$$

$$= \mathrm{sen}_{(h)}\,x + h\cos_{(h)}\,x\,,$$

$$\cos_{(h)}\,(x+h) = \frac{1}{2}\left\{(1+ih)^{(x+h)/h} + (1-ih)^{(x+h)/h}\right\} =$$

$$(17) \qquad = \frac{1}{2}\left\{(1+ih)^{x/h} + (1-ih)^{x/h} + ih\,[(1+ih)^{x/h} - (1-ih)^{x/h}]\right\} =$$

$$= \cos_{(h)}\,x - h\,\mathrm{sen}_{(h)}\,x\,.$$

È poi

$$(18) \qquad \mathrm{sen}^2_{(h)}\,x + \cos^2_{(h)}\,x = (1+h^2)^{x/h}\,,$$

quindi la (15) assume anche la forma

$$(15') \qquad \mathrm{R}_{(h)}\,\mathrm{tg}_{(h)}\,x = \frac{(1+h^2)^{x/h}}{\cos_{(h)}\,x\cdot\cos_{(h)}\,(x+h)}\,.$$

---

(3) Le (16), (17), dimostrate qui direttamente, non sono che un caso particolare delle (26), essendo $\mathrm{sen}_{(h)}\,h = h$, $\cos_{(h)}\,h = 1$.

Poichè

$$\lim_{h\to 0}(1+h^2)^{x/h} = \left\{\lim_{h\to 0}(1+h^2)^{1/h^2}\right\}^{\lim_{h\to 0} hx} = e^0 = 1\,,$$

la (18), per $h \to 0$, diviene

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

e il secondo membro della (15′) risulta $1/\cos^2_{(h)} x$, cioè proprio $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg} x$.

Si può notare che vale anche la relazione

$$\cos^2_{(h)} x = \frac{(1+h^2)^{x/h}}{1+\operatorname{tg}^2_{(h)} x}\,,$$

che si dimostra facilmente tenendo conto della (18).

4.2. – In base alle definizioni (10), (11), (12) è facile vedere che risulta

$$(19)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_{(-h)}(-x) = -\operatorname{sen}_{(h)} x \\ \cos_{(-h)}(-x) = \cos_{(h)} x \\ \operatorname{tg}_{(-h)}(-x) = -\operatorname{tg}_{(h)} x \end{cases}$$

e cambiando nelle (19) il passo h in $-h$ si ottiene

$$(20)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_{(h)}(-x) = -\operatorname{sen}_{(-h)} x \\ \cos_{(h)}(-x) = \cos_{(-h)} x \\ \operatorname{tg}_{(h)}(-x) = -\operatorname{tg}_{(-h)} x\,. \end{cases}$$

Risulta pure

$$(21)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_{(h)}(-x) = -(1+h^2)^{-x/h}\operatorname{sen}_{(h)} x \\ \cos_{(h)}(-x) = (1+h^2)^{-x/h}\cos_{(h)} x \\ \operatorname{tg}_{(h)}(-x) = -\operatorname{tg}_{(\ )} x \end{cases}$$

e, dal confronto fra le (20), (21),

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}_{(-h)} x &= (1+h^2)^{-x/h} \operatorname{sen}_{(h)} x \\ \cos_{(-h)} x &= (1+h^2)^{-x/h} \cos_{(h)} x \\ \operatorname{tg}_{(-h)} x &= \operatorname{tg}_{(h)} x\,. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Si può notare che $\operatorname{tg}_{(h)} x$, per l'ultima delle (21), risulta *funzione dispari della* x e, per l'ultima delle (22), *funzione pari del passo* h.

4.3. – Tenendo conto di (9′) risulta

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}_{(h)} x &= \frac{(1+ih)^{x/h}-(1-ih)^{x/h}}{2i} = \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\, i^n x^{n;h} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,(-i)^n x^{n;h}\right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\, x^{(2n+1);h} \qquad (0<|h|<1) \end{aligned} \tag{23}$$

ed analogamente

$$\cos_{(h)} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n;h} \qquad (0<|h|<1)\,. \tag{24}$$

Dalle definizioni (10), (11) segue la relazione

$$\cos_{(h)} x + i \operatorname{sen}_{(h)} x = (1+ih)^{x/h}\,, \tag{25}$$

che si può chiamare *formula di Eulero* per le funzioni circolari di passo h, in quanto, tenendo conto di (7), da essa, per $h \to 0$, si ottiene

$$\cos x + i \operatorname{sen} x = e^{ix}.$$

4.4. – Per le funzioni circolari di passo h valgono *formule di addizione* in tutto identiche a quelle delle funzioni circolari:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{sen}_{(h)}(x+y) &= \operatorname{sen}_{(h)} x\cdot\cos_{(h)} y + \operatorname{sen}_{(h)} y\cdot\cos_{(h)} x \\ \cos_{(h)}(x+y) &= \cos_{(h)} x\cdot\cos_{(h)} y - \operatorname{sen}_{(h)} x\cdot\operatorname{sen}_{(h)} y \\ \operatorname{tg}_{(h)}(x+y) &= \frac{\operatorname{tg}_{(h)} x + \operatorname{tg}_{(h)} y}{1-\operatorname{tg}_{(h)} x\cdot\operatorname{tg}_{(h)} y}\,, \end{aligned}\right. \tag{26}$$

la cui dimostrazione non presenta alcuna difficoltà.

Dalle (26), applicando le (21), si deducono subito le *formule di sottrazione:*

$$
(27)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_{(h)}(x-y) = (1+h^2)^{-y/h}(\operatorname{sen}_{(h)} x\cdot\cos_{(h)} y - \operatorname{sen}_{(h)} y\cdot\cos_{(h)} x) \\ \cos_{(h)}(x-y) = (1+h^2)^{-y/h}(\cos_{(h)} x\cdot\cos_{(h)} y + \operatorname{sen}_{(h)} x\cdot\operatorname{sen}_{(h)} y) \\ \operatorname{tg}_{(h)}(x-y) = \dfrac{\operatorname{tg}_{(h)} x - \operatorname{tg}_{(h)} y}{1+\operatorname{tg}_{(h)} x\cdot\operatorname{tg}_{(h)} y}\,. \end{cases}
$$

Dalle (26) si ottengono poi in modo immediato le *formule di duplicazione:*

$$
(28)\qquad \begin{cases} \operatorname{sen}_{(h)} 2x = 2\operatorname{sen}_{(h)} x\cdot\cos_{(h)} x \\ \cos_{(h)} 2x = \cos^2_{(h)} x - \operatorname{sen}^2_{(h)} x \\ \operatorname{tg}_{(h)} 2x = \dfrac{2\operatorname{tg}_{(h)} x}{1-\operatorname{tg}^2_{(h)} x}\,. \end{cases}
$$

4.5. – Formule generali di moltiplicazione si possono poi dedurre da (25). Infatti, essendo m un intero >0, si ottiene

$$
(29)\qquad (\cos_{(h)} x + i\operatorname{sen}_{(h)} x)^m = (1+ih)^{mx/h}
$$

ed anche, cambiando in (25) x in mx:

$$
(30)\qquad \cos_{(h)} mx + i\operatorname{sen}_{(h)} mx = (1+ih)^{mx/h}\,.
$$

Da (29), (30), per confronto, segue la relazione

$$
(31)\qquad (\cos_{(h)} x + i\operatorname{sen}_{(h)} x)^m = \cos_{(h)} mx + i\operatorname{sen}_{(h)} mx\,,
$$

che può chiamarsi *formula di De Moivre per le funzioni circolari di passo h.*

Da (31) discendono facilmente le *formule generali di moltiplicazione* che, formalmente, sono in tutto identiche a quelle per le funzioni circolari, e precisamente:

$$\cos_{(h)} mx = \sum_{s=0}^{[m/2]} (-1)^s \binom{m}{2s} \cos_{(h)}^{m-2s} x \cdot \operatorname{sen}_{(h)}^{2s} x \,, \tag{32}$$

$$\operatorname{sen}_{(h)} mx = \sum_{s=1}^{[(m+1)/2]} (-1)^{s+1} \binom{m}{2s-1} \cos_{(h)}^{m-2s+1} x \cdot \operatorname{sen}_{(h)}^{2s-1} x \,, \tag{33}$$

con $[m/2]$ massimo intero contenuto in $m/2$.

Da (32), (33), per $m = 2$, si ottengono ovviamente le (28) [4].

---

[4] Considerazioni e sviluppi analoghi a quelli delle funzioni circolari di passo h si possono fare per le *funzioni iperboliche di passo* h: $\operatorname{senh}_{(h)} x$, $\cosh_{(h)} x$, $\operatorname{tgh}_{(h)} x$, così definite:

$$\operatorname{senh}_{(h)} x = \frac{1}{2} \left\{(1+h)^{x/h} - (1-h)^{x/h}\right\} , \qquad \cosh_{(h)} x = \frac{1}{2} \left\{ (1+h)^{x/h} + (1-h)^{x/h}\right\},$$

$$\operatorname{tgh}_{(h)} x = \frac{\operatorname{senh}_{(h)} x}{\cosh_{(h)} x} = \frac{(1+h)^{x/h} - (1-h)^{x/h}}{(1+h)^{x/h} + (1-h)^{x/h}} .$$

* * *