Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 177-188

CARLO SILLI (*)

Studio sul punto materiale orientato. (**)

1. - Introduzione.

U. CISOTTI in una sua Nota [1] (1), prendendo spunto da una considerazione fatta da P. APPELL [2], definisce il punto materiale orientato come limite di un corpo rigido sferico omogeneo al tendere a zero del suo raggio e ne studia alcune proprietà. Egli in sostanza ammette che durante il moto il punto materiale possa anche ruotare su sè stesso cambiando orientazione. In questo modo distingue il punto materiale orientato (caratterizzato oltre che dalla sua posizione e massa dal momento d'inerzia rispetto a un asse) dall'ordinario punto materiale della meccanica che è caratterizzato solamente dalla sua massa e dalla sua posizione.

Anche G. GOTUSSO in un suo lavoro [3], riguardante i problemi con massa variabile in meccanica classica, accenna a questo concetto sia pure in forma in parte diversa.

Rileggendo questi lavori di CISOTTI e GOTUSSO e un lavoro di T. MANACORDA [4] sul moto di un corpo di massa variabile in meccanica classica mi è parso interessante introdurre il punto materiale orientato come limite di un corpo rigido di massa variabile che, per espulsione di materia, si contrae attorno al suo centro di massa senza che la massa stessa tenda a zero, non facendo però nello studio, e in particolar modo nella sua prima parte, alcuna ipotesi restrittiva sulla struttura geometrica del corpo stesso e mai alcuna ipotesi restrittiva sulla sua densità.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università, Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 17-IV-1964.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

Scopo dunque del presente lavoro è quello di dedurre uno schema di punto materiale orientato da quello di corpo rigido con massa variabile determinandone la sua direzione associata.

2. - Posizione del problema.

La seconda equazione cardinale della dinamica per un corpo rigido S, con massa variabile, con centro di riduzione dei momenti nel centro di massa G e col momento $\boldsymbol{M}_G$ delle forze esterne indipendente dalle forze di distacco identicamente nullo, è [4]:

$$\sigma_G \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \wedge \sigma_G \boldsymbol{\omega} = -\boldsymbol{\mu}_G , \tag{1}$$

con σ_G omografia d'inerzia del sistema riferita a G e data da:

$$\sigma_G = -\int_S \varrho[(P - G) \wedge]^2 \, \mathrm{d}S,$$

e $\boldsymbol{\mu}_G$ dato da [4]

$$\boldsymbol{\mu}_G = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{S-S_1} \varrho(P - G) \wedge (\boldsymbol{v} - \dot{P}) \, \mathrm{d}S,$$

con $\dot{P}$ velocità del punto P prima del distacco e $\boldsymbol{v}$ velocità immediatamente dopo il distacco.

Si può quindi osservare che il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ è legato alla legge con cui la massa viene espulsa da S nell'intervallo di tempo $(0, T)$ in cui noi supponiamo che avvenga la contrazione del corpo S attorno al suo centro di massa.

Rimanendo, nella prima parte del nostro studio, nelle ipotesi più generali sulla forma del corpo S e sulla sua densità, supponendo però che durante il processo di espulsione di materia la terna principale centrale di inerzia del corpo non cambi di orientamento col tempo nel corpo, ci proponiamo di studiare, subordinatamente all'ipotesi che $\boldsymbol{\mu}_G$ abbia direzione fissa nel corpo, se per il corpo S di massa variabile ci possano essere delle rotazioni di direzione fissa nel corpo e nello spazio e di modulo eventualmente variabile e quali condizioni queste rotazioni richiedano sul momento $\boldsymbol{\mu}_G$ e sugli elementi d'inerzia durante il processo di espulsione di materia e al limite quando, avendo fatto tendere a zero i momenti d'inerzia, senza che la massa tenda a zero, si ottiene uno schema di punto materiale orientato.

Successivamente, lavorando in modo analogo a CISOTTI [1]; e non facendo alcuna ipotesi su $\boldsymbol{\omega}$, supponendo cioè che i tre momenti d'inerzia siano uguali fra di loro in ogni istante, ci proponiamo di studiare il comportamento del vettore $\boldsymbol{\omega}$ stesso, nel corpo e nello spazio, sotto ipotesi diverse per il suo valore iniziale, durante il processo di espulsione di materia e al limite quando gli elementi d'inerzia tendono a zero.

3. - Caso di $\boldsymbol{\mu}_G$ di direzione invariabile in S e della rotazione uniforme.

a) Facciamo l'ipotesi che il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ abbia direzione fissa nel corpo, che sia cioè dato da

$$\boldsymbol{\mu}_G = \mu_G \cdot \boldsymbol{u},$$

con $\boldsymbol{u}$ versore solidale con S, e inoltre che la terna principale centrale di inerzia non cambi orientamento col tempo durante il processo di contrazione di S attorno a G.

Se il moto è una rotazione uniforme dovrà essere:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = 0 .$$

In conseguenza proiettando la (1) sulla terna principale si ha:

$$(B - C)qr = \mu_x, \qquad (C - A)rp = \mu_y, \qquad (A - B)pq = \mu_z, \tag{2}$$

con:

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma,$$

e con α, β, γ e ω costanti.

Supponiamo innanzi tutto che sia $A \neq B \neq C$; dalle (2) si ricava allora che affinchè si abbiano rotazioni uniformi i rapporti

$$\frac{\mu_x}{B - C} = C_1, \qquad \frac{\mu_y}{C - A} = C_2, \qquad \frac{\mu_z}{A - B} = C_3, \tag{3}$$

devono risultare costanti, il valore di C_i essendo determinato dal valore di $\boldsymbol{\omega}$.

Viceversa, supposte valide le (3), andiamo a vedere se esistono determinazioni costanti di p, q, r che soddisfano la (1).

Si avrà:

$$qr = C_1, \quad rp = C_2, \quad pq = C_3 .$$

Ora una almeno delle tre costanti deve essere diversa da zero; sia tale, per esempio, C_1. Si ha

$$q \neq 0, \quad r = C_1/q \neq 0 ,$$

da cui

$$p/q = C_2/C_1 , \quad pq = C_3 .$$

Se anche C_2 è diversa da zero, anche C_3 sarà tale e si ha:

$$q^2 = \frac{C_1 C_3}{C_2} . \tag{4}$$

Affinchè quest'ultima ammetta soluzioni reali è necessario che sia:

$$\frac{C_1 C_3}{C_2} = \frac{C - A}{A - B} \frac{\mu_x}{B - C} \frac{\mu_z}{\mu_y} > 0 . \tag{5}$$

Se, ad esempio, si sono scelti gli assi in modo che risulti, durante il processo di espulsione, $A < B < C$ è necessario che sia $\frac{\mu_x \mu_z}{\mu_y} > 0$.

Soddisfatta la (5) si ottengono per q due determinazioni, una positiva e una negativa, $q = \pm q_0$. In conseguenza si ottiene per le determinazioni costanti di p e r:

$$p = \pm (C_2/C_1) q_0, \quad r = \pm C_1/q_0 .$$

È chiaro che la indeterminazione del segno corrisponde a due vettori direttamente opposti e non ha quindi alcun interesse.

Sia ora $C_2 = 0$, se ne ricava $p = 0$ e quindi la condizione necessaria $C_3 = 0$. Questo equivale a porre $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}$ e quindi a supporre $\boldsymbol{\mu}_G$ parallelo a un asse principale.

b) Sempre nelle ipotesi dichiarate supponiamo dunque che il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ sia parallelo a un asse principale, ad esempio sia:

$$\boldsymbol{\mu}_G = \mu_G \, \boldsymbol{i} ,$$

dove, senza ledere le generalità del problema, possiamo supporre $\mu > 0$.

Si ha dalla (2) in questo caso

$$(B - C)qr = \mu_G, \qquad rp = 0, \qquad pq = 0,$$

da cui:

$$p = 0, \qquad q \neq 0, \qquad r \neq 0,$$

e anche:

$$\alpha = 0, \qquad \beta^2 + \gamma^2 = 1, \qquad \beta^2\gamma^2 = \frac{\mu_G^2}{(B - C)^2\omega^4}.$$

Dalle precedenti si ricava che affinchè la rotazione risulti uniforme, durante il processo di espulsione, attorno a un asse principale, il rapporto:

$$\mu_G/(B - C)$$

deve risultare costante. Inoltre la rotazione stessa deve avvenire attorno a un asse ortogonale al vettore $\boldsymbol{\mu}_G$ di coseni direttori β e γ essendo β^2 e γ^2 le radici dell'equazione di secondo grado

$$Z^2 - Z + K^2 = 0,$$

con

$$K = \frac{\mu_G}{|(B - C)|\,\omega^2}.$$

I coseni direttori β e γ saranno reali e distinti per $K^2 \leqslant 1/4$ cioè per

$$\frac{2\mu_G}{|B - C|} \leqslant \omega^2.$$

Se $K^2 = 1/4$ si ha per β e γ:

$$\beta = \gamma = \pm 1/\sqrt{2},$$

e il vettore $\boldsymbol{\omega}$ giace quindi su una delle due bisettrici degli assi y e z.

c) Sia ora, sempre nelle ipotesi di cui al punto a):

$$A = B \neq C.$$

Se vogliamo che il moto sia una rotazione uniforme dovrà essere, per le (2), $\mu_z = 0$, e si può anche assumere $\mu_y = 0$. Si ottiene perciò:

$$rp = 0, \qquad rq \neq 0,$$

e da questa si ha ancora (come al punto b)):

$$\alpha = 0, \qquad \beta\gamma = \frac{\mu_G}{(B - C)\omega^2}, \qquad \beta^2 + \gamma^2 = 1 .$$

Invece se il momento μ_G è parallelo all'asse di simmetria non si può soddisfare alla terza delle (2) con valori finiti di p e q.

Se ne ha quindi che le relazioni (3), e quindi le condizioni che ne discendono per le componenti di $\boldsymbol{\omega}$, per $\boldsymbol{\mu}$ e per i tre momenti d'inerzia, sono caratteristiche delle rotazioni uniformi attorno a un asse di direzione fissa durante tutto il processo di espulsione di materia e al limite quando il corpo si contrae in un punto, pur rimanendo di massa non nulla.

Se le equazioni (3) continuano a valere anche al tendere a zero dei momenti d'inerzia, si ottiene uno schema di punto materiale orientato come limite di un corpo rigido di massa variabile che per espulsione di materia si contrae attorno al suo centro di massa la cui direzione associata è quella determinata dai tre coseni direttori α, β, γ e la cui velocità di rotazione limite è uguale al valore costante della velocità di rotazione che il corpo S ha durante il suo processo di espulsione di materia.

4. - Caso di ω variabile soltanto in modulo.

Ferma restando l'ipotesi del paragrafo precedente che il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ abbia direzione invariabile nel corpo, supponiamo ora che il vettore $\boldsymbol{\omega}$, pur mantenendo fissa la sua direzione durante il processo di espulsione di materia, possa essere in modulo variabile.

Esaminiamo solo il caso in cui il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ sia parallelo a un asse principale.

Supposto, ad esempio, che detto momento sia parallelo all'asse y della terna principale si ha per la (1) rispetto a questa terna:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} A\dot{\omega}\alpha - (B - C)\omega^2\beta\gamma &= 0 \\ B\dot{\omega}\beta - (C - A)\omega^2\alpha\gamma &= \mu_G \\ C\dot{\omega}\gamma - (A - B)\omega^2\alpha\beta &= 0, \end{aligned} \right.$$

con α, β e γ costanti.

Dalla prima e dalla terza delle precedenti si ha:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\dot\omega}{\omega^2} = \dfrac{(B-C)\beta\gamma}{A\alpha} \\[2ex] \dfrac{\dot\omega}{\omega^2} = \dfrac{(A-B)\alpha\beta}{C\gamma} \,. \end{cases}$$

E da questa, per β diverso da zero [2], si hanno per i tre coseni direttori le due relazioni:

$$(8)\qquad \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{B-C}{A-B}\,\frac{C}{A}\,, \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1\,.$$

La prima richiede che l'espressione

$$(9)\qquad \frac{B-C}{A} : \frac{A-B}{C} = h^2$$

sia costante e inoltre che sia:

$$(10)\qquad \frac{B-C}{A-B} > 0\,,$$

cioè $A > B > C$ (oppure $A < B < C$).

Supposto che valgano le prime di queste disuguaglianze dalla (8_1) si ottiene:

$$(11)\qquad \alpha^2 = h^2\gamma^2,$$

e dalla (8_2):

$$(12)\qquad (1 + h^2)\gamma^2 + \beta^2 = 1,$$

da cui, per γ, si ha la limitazione

$$(13)\qquad \gamma^2 < \frac{1}{1+h^2}\,.$$

---

[2] Per $\beta = 0$ si torna al caso studiato nel paragrafo precedente essendo $\dot\omega = 0$.

Scelto allora un valore di γ soddisfacente a questa limitazione, la (11) fornisce il valore corrispondente di α, mentre dalla (12) si ottiene β.

Soddisfatta la (8_1), si ha da una qualunque delle (7) per ω:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}\int_0^t \frac{B-A}{C}\,dt + \frac{1}{\omega_0}, \tag{14}$$

e per μ_G si ha:

$$\frac{\mu_G}{\omega^2} = \frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\frac{B(A-B)}{C} - (C-A)\alpha\gamma\,. \tag{15}$$

Se ne ha dunque che nel caso di $\boldsymbol{\omega}$ non più costante in modulo, ma di direzione invariabile nel corpo e nello spazio, durante il processo di contrazione di S attorno al suo centro di massa, se i momenti d'inerzia soddisfano la (9) e la (10), e inoltre se per i tre coseni direttori sono verificate le (8) e la (13), il modulo del vettore $\boldsymbol{\omega}$ e quello del momento $\boldsymbol{\mu}_G$ sono dati rispettivamente dalla (14) e dalla (15) in funzione dei momenti d'inerzia del sistema e dei tre coseni direttori di ω.

Qualora, dunque, la rotazione sia di direzione invariabile e in modulo non necessariamente costante e il momento $\boldsymbol{\mu}_G$ sia dato dalla (15), e valgano la (9) e la (10) per gli elementi di inerzia, le (8) e la (13) per i coseni direttori di $\boldsymbol{\omega}$, allora facendo tendere a zero i momenti d'inerzia si ottiene ancora, come si cercava, il punto materiale orientato come limite di un corpo rigido di massa variabile la cui direzione associata è quella individuata dai tre coseni direttori α, β, γ fissa nel corpo e nello spazio.

Osservazione. Si consideri per i tre coseni direttori α, β e γ la determinazione:

$$\alpha = \gamma = 0, \qquad \beta = 1.$$

Si ha per questa dalle (6):

$$B\dot{\omega} = \mu_G,$$

e da questa per la velocità angolare ω:

$$\omega = \int_0^t \frac{\mu_G}{B(t)}\,dt + c\,.$$

Se ne ha dunque, in questo caso particolare, lo schema del punto materiale orientato la cui direzione associata, fissa nel corpo e nello spazio, è quella stessa del momento $\boldsymbol{\mu}_G$.

5. - Caso di $A = B = C$.

Lavorando in modo analogo a CISOTTI [1] noi supponiamo ora che per il corpo S sia:

$$A = B = C\,,$$

e non facendo alcuna ipotesi sul vettore $\boldsymbol{\omega}$ ci proponiamo di studiare il suo comportamento nel corpo S e nello spazio sotto diverse ipotesi per il suo valore iniziale, durante il processo di espulsione di materia e in particolar modo al limite quando i momenti d'inerzia tendono a zero senza che la massa stessa tenda a zero.

Dall'equazione di moto (1) si ha in questo caso:

$$\sigma_G\, \dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\mu}_G\,,$$

e da questa, per le ipotesi fatte,

$$A(t)\dot{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\mu}_G\,. \tag{16}$$

a) Si abbia ora per $\boldsymbol{\mu}_G$:

$$\boldsymbol{\mu}_G = -f(t)\,\boldsymbol{i}\,, \tag{17}$$

con $f(t)$ funzione continua definita in $(0,\ T)$, estremo destro al più escluso, ivi continua e tale che

$$\lim_{t\to T} f(t)$$

sia determinato e finito.

Il momento d'inerzia $A(t)$ del corpo S al tempo t sia una funzione definita in $(0,\ T)$, ivi continua e tale che

$$\lim_{t\to T} A(t) = 0\,.$$

Dalla (16) e dalla (17) si ha:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}(t) = \frac{f(t)}{A(t)}\,\boldsymbol{i}\,. \tag{18}$$

Considerata una terna $T_1(x, y, z)$ solidale con S principale e centrale di inerzia dalla (18) si ha:

$$\dot{p} = \frac{f(t)}{A(t)}\,, \quad \dot{q} = 0\,, \quad \dot{r} = 0\,, \tag{18'}$$

e da queste si ha:

$$p(t) = p_0 + \int_0^t \frac{f(\tau)}{A(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \qquad q(t) = q_0, \qquad r(t) = r_0\,. \tag{18''}$$

Con riferimento ad una terna cartesiana ortogonale $T_2(\Omega;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ e fissa si ha ora per la derivata assoluta del versore $\boldsymbol{i}$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}_0 \wedge \boldsymbol{i}\,, \tag{19}$$

con

$$\boldsymbol{\omega}_0 = p_0\,\boldsymbol{i} + q_0\,\boldsymbol{j} + r_0\,\boldsymbol{k}\,. \tag{19'}$$

b) Supposto che inizialmente $\boldsymbol{\omega}$ sia parallelo al momento $\boldsymbol{\mu}_G$ si ha, dalla precedente, per il versore $\boldsymbol{i}$ rispetto alla terna fissa $T_2(\Omega;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$:

$$\boldsymbol{i} = \text{costante.}$$

Supposto ora, come risulta lecito per questo risultato, che l'asse x della terna mobile coincida con l'asse ξ della terna fissa, il moto del corpo S al tempo t, nelle ipotesi dichiarate per il corpo S stesso e per il momento $\boldsymbol{\mu}_G$, è una rotazione attorno all'asse fisso ξ con velocità angolare data da

$$p(t) = p_0 + \int_0^t \frac{f(\tau)}{A(\tau)}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Risultato questo che, nell'ipotesi particolare fatta per la velocità angolare iniziale, si può dedurre anche dall'osservazione fatta al termine del paragrafo precedente come caso particolare di un corpo rigido di massa variabile la cui velocità angolare, durante il processo di espulsione di materia, cambia in modulo ma non in direzione.

Passando al limite per $t \to T$, per le ipotesi fatte sulle due funzioni $f(t)$ e $A(t)$ (e supposto che $\lim_{t \to T} p(t)$ esista) si ottiene il punto materiale orientato la cui direzione associata è quella del momento $\boldsymbol{\mu}_G$ e la cui velocità angolare limite è data da

$$\lim_{t \to T} p(t) .$$

c) Supposto ora che la velocità angolare iniziale $\boldsymbol{\omega}_0$ non sia parallela al momento $\boldsymbol{\mu}_G$ è sempre possibile scegliere la terna principale $T_1(x, y, z)$ di S in modo che risulti:

$$q(0) = q_0 \neq 0, \qquad r(0) = 0 .$$

Da questa e dalle (18″) si ha per le componenti di $\boldsymbol{\omega}$:

$$(20) \qquad p(t) = p_0 + \int_0^t \frac{f(\tau)}{A(\tau)}\,\mathrm{d}\tau, \qquad q(t) = q_0, \qquad r(t) = 0 .$$

Se le due funzioni $f(t)$ e $A(t)$ sono tali da rendere determinato il limite

$$\lim_{t \to T} \int_0^t \frac{f(\tau)}{A(\tau)}\,\mathrm{d}\tau + p_0 = \overline{p},$$

allora, passando al limite per $t \to T$, si ha ancora il punto materiale orientato come limite di un corpo rigido di massa variabile che per espulsione di materia si contrae attorno al suo centro di massa e che ha, rispetto alla terna mobile, e anche rispetto alla terna fissa, una direzione limite associata che è individuata, rispetto alla terna mobile, dai tre coseni direttori:

$$(21) \qquad \overline{\alpha} = \frac{\overline{p}}{\sqrt{\overline{p}^2 + q_0^2}}, \qquad \overline{\beta} = \frac{q_0}{\sqrt{\overline{p}^2 + q_0^2}}, \qquad \overline{\gamma} = 0 ,$$

dove $\overline{p}$ è dato dal limite di cui sopra.

È importante osservare come in quest'ultimo caso studiato, dei tre momenti d'inerzia uguali, la direzione associata al punto materiale orientato è esclusivamente determinata, rispetto ad ambedue le terne, dalle condizioni iniziali assunte per $\boldsymbol{\omega}$ e dalle ipotesi fatte sulle due funzioni $f(t)$ e $A(t)$.

Bibliografia.

[1] U CISOTTI, *Punto materiale orientato*, Rend. R. Accad. d'Italia (7) 4 (1942-43), 469-472.

[2] P. APPELL, *Traité de Mécanique Rationelle*, Vol. I, Gauthier-Villars, Paris 1926 (cfr. pag. 92).

[3] G. GOTUSSO, *Problemi con massa variabile in meccanica classica*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Cl. Sci. Mat. Nat. **93** (1959), 3-28.

[4] T. MANACORDA, *Il moto di un corpo con massa variabile*, Riv. Mat. Univ. Parma 3 (1952), 361-373.

Summary.

In this paper the material orientated point is introduced as a limit of a variable mass rigid body which, expelling material, contracts around its mass centre.

* * *