Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 41-48

MICHELE BATTEZZATI (*)

Limitazioni del gradiente di soluzioni di equazioni ellittiche in due variabili. (**)

Nella presente Nota si considera l'equazione lineare, del secondo ordine, uniformemente ellittica, a coefficienti misurabili e limitati in un insieme aperto e limitato Ω del piano.

Si considerano due classi di soluzioni della equazione: 1°) soluzioni di classe $C^2(\Omega)$; 2°) soluzioni di classe $C^2(\Omega)$ e $C^{0,\lambda}(\partial\Omega)$. Si provano limitazioni del gradiente per le soluzioni di queste due classi. In particolare il gradiente di quelle della seconda classe risulta limitato da una quantità proporzionale alla distanza dalla frontiera di Ω elevata a $\lambda - 1$. A questi risultati è premessa una limitazione che precisa numericamente una disuguaglianza già nota (1).

1. – Consideriamo l'equazione

$$a_{11}\, u_{xx} + 2\, a_{12}\, u_{xy} + a_{22}\, u_{yy} = f \tag{1}$$

con a_{ij} $(i, j = 1, 2)$, f funzioni misurabili limitate nel cerchio S: $|\, z - z_0 \,| < r$ del piano complesso $z\ (= x + iy)$. Le funzioni a_{ij} soddisfano inoltre la seguente ipotesi:

$$a_{11} + a_{22} = 1 + \alpha, \qquad \alpha\,|\,\lambda\,|^2 \leqslant a_{11}\,\lambda_1^2 + 2\,a_{12}\,\lambda_1\,\lambda_2 + a_{22}\,\lambda_2^2\,. \tag{2}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università (Via L. B. Alberti 4), Genova, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N. 23 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1963-64. – Ricevuto il 7-VII-1964.

(1) C. PUCCI, *Limitazione per il gradiente di una soluzione di una equazione di tipo ellittico*, Matematiche (Catania) 16 (1961), 51-54.

È stato dimostrato (²) che ogni funzione di classe $C^{(2)}$ soluzione in S della (1) verifica la limitazione:

$$|\nabla u(z_0)| < h_\alpha \{ r^{-1} \sup_{z,z'\in S} | u(z) - u(z') | + r \sup_{z\in S} | f(z) | \}, \tag{3}$$

ove h_α è una costante dipendente unicamente da α. Per precisare numericamente questo risultato dimostriamo il seguente teorema:

I. *Ogni soluzione della* (1) *in* S *di classe* $C^{(2)}$ *soddisfa la diseguaglianza*:

$$| \nabla u(z_0) | < (18/\alpha^2) \{ (r^{-1} \sup_{z,z'\in S} | u(z) - u(z') |)^{1/2} + (r \sup_{z\in S} | f(z) |)^{1/2} \}^2 . \tag{4}$$

Dimostrazione.

Premettiamo il seguente lemma:

II. – *Se le due forme quadratiche simmetriche*:

$$\sum_{i,j=1,2} a_{ij}\, \lambda_i\, \lambda_j, \qquad \sum_{i,j=1,2} \bar{a}_{ij}\, \lambda_i\, \lambda_j,$$

soddisfano l'ipotesi (2), *allora la forma quadratica simmetrica*

$$\sum_{i,j=1\dots3} \alpha_{ij}\, \lambda_i\, \lambda_j, \tag{5}$$

ove:

$$\alpha_{ij} = a_{ij}/a_{11} \ (i,\ j=1,\ 2), \qquad \alpha_{13} = \bar{a}_{12}/\bar{a}_{11}, \qquad \alpha_{33} = \bar{a}_{22}/\bar{a}_{11}, \qquad \alpha_{23} = \alpha_{12}\, \alpha_{13}, \tag{6}$$

ha radici caratteristiche limitate inferiormente e superiormente da costanti positive $\bar{\alpha}$, $\bar{\bar{\alpha}}$, *dipendenti solo da* α. *Inoltre*:

$$\alpha/(2+\alpha) < \bar{\alpha} < \alpha . \tag{7}$$

L'equazione caratteristica della forma (5) è

$$\varrho^3 - \left(1 + \frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{11}}\right) \varrho^2 + \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{11}} + \frac{a_{22}\bar{a}_{22}}{a_{11}\bar{a}_{11}} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} - \frac{\bar{a}_{12}^2}{\bar{a}_{11}^2} - \frac{a_{12}^2\bar{a}_{12}}{a_{11}^2\bar{a}_{11}^2}\right) \varrho - \\ - \left(\frac{a_{22}}{a_{11}} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}\right) \left(\frac{\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{11}} - \frac{\bar{a}_{11}^2}{\bar{a}_{11}^2}\right) = 0 . \tag{8}$$

(²) Loc. cit. in (¹).

Osserviamo che per la regola dei segni di CARTESIO l'equazione ha radici positive e che per le limitazioni (2) dei coefficienti le radici della (8) sono limitate inferiormente e superiormente. Inoltre, la minima delle radici è senz'altro maggiore della radice della parte lineare dell'equazione, se questa è minore di 1. Perciò ne segue:

$$\bar{\alpha} > \min \frac{\left(\frac{a_{22}}{a_{11}} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2}\right)\left(\frac{\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{11}} - \frac{\bar{a}_{12}^2}{\bar{a}_{12}^2}\right)}{\frac{a_{22}}{a_{11}} - \frac{a_{12}^2}{a_{11}^2} + \frac{\bar{a}_{22}}{\bar{a}_{11}} - \frac{\bar{a}_{12}^2}{\bar{a}_{11}^2} + \frac{a_{22}\bar{a}_{11}}{a_{11}\bar{a}_{11}} - \frac{a_{12}^2\bar{a}_{12}^2}{a_{11}^2\bar{a}_{11}^2}} =$$

$$= \min \frac{1}{(1+\alpha)\left(\frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} + \frac{1}{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}^2}\right) - 1} = \frac{\alpha}{2+\alpha},$$

relazioni ottenute tenendo presenti le (2). Osserviamo che:

$$\sum_{i,j=1\ldots 3} \alpha_{ij}\, \lambda_i\, \lambda_j = \alpha\, |\, \lambda\, |^2,$$

per $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $a_{11} = 1$, $a_{22} = \alpha$. Perciò la (7) è provata.

Essendo le ipotesi sull'equazione invarianti per rotazione e traslazioni possiamo scegliere il riferimento in modo che il punto z_0 coincida con l'origine e che l'asse y si sovrapponga in direzione e verso con il gradiente. Pertanto è sufficiente provare la limitazione per la derivata rispetto ad y.

Sia perciò T l'insieme dei punti (x_1, x_2, x_3) dello spazio euclideo a tre dimensioni tali che:

$$x_1^2 + x_2^2 < r^2, \qquad x_1^2 + x_3^2 < r^2, \qquad x_2 < x_3 . \tag{9}$$

Definiamo in T la funzione

$$v(x_1, x_2, x_3) = u(x_1, x_3) - u(x_1, x_2)$$

che soddisfa all'equazione:

$$Lv = \sum_{i,j=1\ldots 3} \alpha_{ij}\, v_{x_i x_j} = \frac{\bar{f}}{\bar{a}_{11}} - \frac{f}{a_{11}}, \tag{10}$$

ove si sono definite in T le funzioni:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{ij}(x_1, x_2), & f &= f(x_1, x_2), \\ \bar{a}_{ij} &= a_{ij}(x_1, x_3), & \bar{f} &= f(x_1, x_3) . \end{aligned} \tag{11}$$

Poniamo

$$\varrho^2 = x_1^2 + \{ x_2 - (r/q) \}^2 + \{ x_3 + (r/q) \}^2 \qquad (q > 0), \tag{12}$$

$$w = (2r^2/q^2)^{-p} - (\varrho^2)^{-p} \qquad (p > 0). \tag{13}$$

Sussistono le seguenti diseguaglianze:

$$\varrho^2 \geqslant 2r^2/q^2 \quad \text{in } T, \quad \varrho^2 \geqslant \{ 1 + (2/q^2) \} r^2 \quad \text{su } \partial T,\ x_2 \neq x_3 , \tag{14}$$

da cui segue:

$$w \geqslant 0 \quad \text{in } T, \quad w \geqslant [(2/q^2)^{-p} - \{ 1 + (2/q^2) \}^{-p}] r^{-2p} \quad \text{su } \partial T,\ x_2 \neq x_3 . \tag{15}$$

Inoltre, per la (7),

$$Lw \leqslant 2^{-p}\, p\, r^{-2(p+1)} \{ 1 + (1/q) \}^{-2(p+1)} \{ -2(p+1)(\alpha/3) + 1 + (2/\alpha) \};$$

perciò posto:

$$1 + p = \{ (1/2) + (1/\alpha) + (\varepsilon/2\alpha) \} (3/\alpha) , \tag{16}$$

risulta

$$Lw < -2^{-p}\, p\, r^{-2(p+1)} \{ 1 + (1/q) \}^{-2(p+1)} (\varepsilon/\alpha) .$$

Definiamo:

$$\tau = \frac{2^p (r/q)^{2p} \sup\limits_S | u(z) - u(z') |}{1 - \{1 + (q^2/2)\}^{-p}} + \frac{2^{p+1} r^{2(p+1)} \{1 + (1/q)\}^{2(p+1)} \sup\limits_S | f(z) |}{\varepsilon p} \tag{17}$$

da cui risulta, per le diseguaglianze precedenti,

$$L(v - \tau w) > 0 \quad \text{in } T, \qquad v \leqslant \tau w \quad \text{su } \partial T ,$$

perciò è

$$v \leqslant \tau w \quad \text{in } T .$$

Ne segue:

$$u_y(0) \leqslant \tau\, w_{x_3}(0,\ 0,\ 0) = \tau\, 2^{-p}\, p(q/r)^{2p+1} =$$

$$= h\, r^{-1} \sup_S |\, u(z) - u(z') \,| + k\, r \sup_S |\, f(z) \,|\,,$$

con

$$h = \frac{p\, q}{1 - \{ 1 + (q^2/2) \}^{-p}}\,, \qquad k = \frac{2}{\varepsilon p q}\,(1 + q)^{2(p+1)}; \tag{18}$$

eseguiamo la sostituzione $q = 2l/(p+1)$ quindi sviluppiamo il denominatore di h in serie fino al terzo termine. Supponiamo quindi $l < 1$ (se non vogliamo fare k troppo grande), ottenendo

$$h < \frac{1}{l}\, \frac{p+1}{1 - \{l^2/(p+1)\}} < \frac{9}{7}\, \frac{p+1}{l}\,, \tag{19}$$

$$k = \frac{p+1}{\varepsilon\, l} \left[\left(1 + \frac{2l}{p+1} \right)^{(p+1)/2l} \right]^{4l} < \frac{(p+1)e^{4l}}{\varepsilon\, l}\,, \tag{20}$$

e quindi, per la (16),

$$u_y(0) < \frac{3}{2l\alpha^2} \left\{ \frac{27}{7}\, r^{-1} \sup_S |\, u(z) - u(z') \,| + e^{4l}\, r \sup_S |\, f(z) \,| + \right.$$

$$\left. + (9/7)\varepsilon r^{-1} \sup_S |\, u(z) - u(z') \,| + \left(\frac{3e^{4l}}{\varepsilon} \right) r \sup_S |\, f(z) \,| \right\}.$$

Annullando la derivata del secondo membro rispetto a ε otteniamo

$$\varepsilon = e^{2l} r \sqrt{\frac{7 \sup |\, f(z) \,|}{3 \sup |\, u(z) - u(z') \,|}}\,,$$

e quindi

$$u_y(0) < \frac{3}{2l\alpha^2} \{ (27/7) r^{-1} \sup_S |\, u(z) - u(z') \,| + e^{4l} r \sup_S |\, f(z) \,| +$$

$$+ 2e^{2l} \sqrt{(27/7) \sup_S |\, u(z) - u(z') \,| \sup_S |\, f(z) \,|} \} =$$

$$= \frac{3}{2l\alpha^2} \{ \sqrt{(27/7) r^{-1} \sup_S |\, u(z) - u(z') \,|} + e^{2l} \sqrt{\sup_S |\, f(z) \,|} \}^2$$

da cui si deduce la (4) ponendo $l = (1/2) \log 2$.

2. – Il procedimento del numero precedente non è direttamente estendibile al caso che nell'equazione figurino i termini contenenti le derivate prime. È però possibile trattare anche questo caso con un metodo simile a quello usato per ottenere le maggiorazioni di SCHAUDER-CACCIOPPOLI.

Indichiamo pertanto con $d(z)$ la distanza del punto $z = x + iy$ di Ω dalla frontiera di Ω .

III. – *Siano* a_{ij}, b_i, c, f $(i, j = 1, 2)$ *funzioni misurabili in un insieme aperto connesso* Ω *del piano* $z = x + iy$ *non coincidente con tutto il piano, e verifichino le* (2). *Sia inoltre in* Ω

$$a_{11}\, u_{xx} + 2\, a_{12}\, u_{xy} + a_{22}\, u_{yy} + b_1\, u_x + b_2\, u_y + c\, u = f \tag{21}$$

con u *di classe* $C^{(2)}(\Omega)$. *Allora, è verificata la diseguaglianza:*

$$\|\nabla u \cdot d\|_0 < h_\alpha \{ \| u \|_0 (1 + \|b \cdot d\|_0 + \|c \cdot d^2\|_0) + \|f \cdot d^2\|_0 \} \quad (^3) \tag{22}$$

ove h_α *dipende solo da* α *e* $b = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

D i m o s t r a z i o n e. Detta $\varphi(z)$ una funzione definita in Ω, definiamo $\varphi^\sigma(z) = \max\limits_{|z'-z| \leq \sigma d(z)} \varphi(z')$, $0 \leqslant \sigma < 1$. Scritta quindi la (21) nella forma:

$$a_{11}\, u_{xx} + 2\, a_{12}\, u_{xy} + a_{22} u_{yy} = f - (b_1 u_x + b_2 u_y + cu) ,$$

dalla (3) otteniamo:

$$d(z)\, | \nabla u(z) | < h_\alpha \{ 2\sigma^{-1} \|u\|_0 + \sigma d(z)^2 [f^\sigma(z) + b^\sigma(z)(\nabla u(z))^\sigma + c^\sigma(z) \|u\|_0] \}$$

e quindi prendendo l'estremo superiore di entrambi i membri in Ω

$$\|\nabla u \cdot d\|_0 < h_\alpha \{ 2\sigma^{-1} \|u\|_0 + \sigma [\|f^\sigma \cdot d^2\|_0 + \|b^\sigma \cdot d\|_0 \|(\nabla u)^\sigma \cdot d\|_0 + \|c^\sigma \cdot d^2\|_0 \|u\|_0] \}.$$

Si prova facilmente che:

$$\| \varphi^\sigma \cdot d^n \|_0 \leqslant \{ 1/(1 - \sigma)^n \} \| \varphi \cdot d^n \|_0 \qquad (n > 0) \tag{23}$$

per ogni funzione φ definita in Ω. Segue:

$$\|\nabla u \cdot d\|_0 < h_\alpha \{ 2\sigma^{-1} \|u\|_0 + [\sigma/(1 - \sigma)^2](\|f \cdot d^2\|_0 + \|b \cdot d\|_0 \cdot \|\nabla u \cdot d\|_0 + \\ + \|c \cdot d^2\|_0 \cdot \|u\|_0) \} ;$$

---

(3) Indichiamo con $\| \varphi \|_0$ l'estremo superiore di una funzione φ in Ω.

prendendo $\sigma < \frac{1}{2}$ si ha $1/(1-\sigma)^2 < 4$ perciò:

$$\| \nabla u \|_0 \, (1 - 4h_\alpha \sigma \, \| b \cdot d \|_0) < h_\alpha \left\{ 2\sigma^{-1} \| u \|_0 + 4\sigma(\| f \cdot d^2 \|_0 + \| c \cdot d^2 \|_0 \cdot \| u \|_0) \right\}.$$

Fissiamo $\sigma^{-1} = 2 + 8h_\alpha \| h \cdot d \|_0$. Si ha immediatamente il teorema.

3. – Nel caso che la soluzione $u(x, y)$ sia hölderiana sulla frontiera con esponente $\lambda < 1$, si dimostra che $|\operatorname{grad} u| < \text{cost.}\, d^{\lambda - 1}$. La dimostrazione di ciò si fonda sul teorema I e su di una valutazione della regolarità della soluzione in prossimità della frontiera (4). Una tecnica analoga a quella del teorema precedente permette di trattare l'equazione completa.

IV. – *Sia Ω un insieme aperto limitato connesso la cui frontiera sia dotata di una retta tangente variabile con continuità, tranne che in un numero finito di punti, nei quali esistano semirette tangenti destra e sinistra. Supponiamo inoltre che questi punti siano di convessità per Ω* (5). *Sia*:

$$a_{11} u_{xx} + 2\, a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c\, u = f \tag{24}$$

in Ω, ove a_{ij}, b_i, c, f $(i, j = 1, 2)$ sono funzioni misurabili in Ω soddisfacenti la (2), *e $u(x, y)$ una funzione di classe $C^2(\Omega)$, $C^0(\overline{\Omega})$. Detta $\vec{n}(z_0)$ la normale interna in z_0 a $\partial\Omega$ ove la tangente esiste, e la bisettrice dell'angolo formato dalle semirette tangenti destra e sinistra negli altri punti, supponiamo inoltre*:

$$\| d \cdot b \|_0, \quad \| c \cdot d^{2-\lambda} \|_0 \leqslant K \qquad (0 < \lambda < 1), \tag{25}$$

$$d(z)\, \vec{b}(z) \cdot \vec{n}(z_0) < (\alpha/8)(1-\lambda), \qquad z \in \Omega, \; z_0 \in \partial\Omega, \; |z - z_0| < \delta, \tag{26}$$

ove $\vec{b} = (b_1, b_2)$ *e* $\delta > 0$

$$| u(z_0) - u(z_1) | < h \, | z_0 - z_1 |^\lambda \qquad (z_0, \; z \in \partial\Omega)\,. \tag{27}$$

---

(4) C. Pucci, *Regolarità alla frontiera di soluzioni di equazioni ellittiche*, in corso di pubblicazione su « Annali di Matematica pura ed applicata ».

(5) Cioè esista una retta passante per quei punti tale che, in un intorno di essi, Ω si trovi tutto da una parte rispetto alla retta. Per ipotesi più generali in cui è valido il teorema vedere la pubblicazione citata in (4).

In tali ipotesi sussiste la limitazione:

$$\|\nabla u\cdot d^{1-\lambda}\|_0 < \tau\{h + \|f\cdot d^{2-\lambda}\|_0 + \|u\|_0\}, \tag{28}$$

ove τ *è una costante dipendente solo da* α, λ, K *e* Ω.

Dimostrazione. Nelle ipotesi del teorema IV sussiste la diseguaglianza

$$|u(z) - u(z_0)| \leqslant \tau'(h + \|f\cdot d^{2-\lambda}\|_0 + \|u\|_0)\,|z - z_0|^\lambda, \quad z\in\Omega,\ z_0\in\partial\Omega \tag{29}$$

ove τ' è una costante dipendente solo da α, λ, K, Ω [6].

Osserviamo che per la (29) risulta, detti z', z'' due punti situati entro il cerchio di centro z e raggio $\sigma d(z)\left(0<\sigma<\frac{1}{2}\right)$, e z_0 il punto di $\partial\Omega$ più prossimo a z:

$$\begin{aligned}|u(z') - u(z'')| &\leqslant |u(z) - u(z_0)| + |u(z_0) - u(z'')| \leqslant \\ &\leqslant 2\tau'(h + \|f\cdot d^{2-\lambda}\|_0 + \|u\|_0)\ d(z)^\lambda(1+\sigma)^\lambda.\end{aligned} \tag{30}$$

Applicando la (9) al cerchio suddetto, e tenendo presente la (30):

$$\begin{aligned}|\nabla u(z)| \leqslant h_\alpha\{&2\tau'(h + \|fd^{2-\lambda}\|_0 + \|u\|_0)\ (1+\sigma)^{\lambda-1}\sigma\ d(z)^{\lambda-1} + \\ &+ \sigma\, d(z)\,[f^\sigma(z) + b^\sigma(z)(\nabla u(z))^\sigma + c^\sigma(z)\,\|u\|_0]\}.\end{aligned} \tag{31}$$

Moltiplicando entrambi i termini per $d(z)^{1-\lambda}$, prendendo i relativi estremi superiori in Ω, e usando delle (23), (25):

$$\begin{aligned}\|\nabla u\cdot d^{1-\lambda}\|_0 \leqslant h_\alpha\{&4\sigma^{-1}\tau'(h + \|f\cdot d^{2-\lambda}\|_0 + \|u\|_0) + \\ &+ 4\sigma(\|f\cdot d^{2-\lambda}\| + K\|\nabla u\cdot d^{1-\lambda}\|_0 + K\|u\|_0).\end{aligned}$$

Fissando nella diseguaglianza precedente σ opportuno in dipendenza di K e h_α si ottiene la (28).

---

[6] Vedere la pubblicazione citata in [4].

* * *