

GIACOMINO BATTIONI (\*)

**Su la nozione di « potenza »  
nel Calcolo delle differenze finite. (\*\*)**

**1. - Introduzione.**

1.1. - La potenza  $x^\alpha$ , dove la base  $x$  è una variabile indipendente e l'esponente  $\alpha$  è fissato comunque, è una funzione (della  $x$ ) che interviene nel Calcolo infinitesimale con le sue ben note proprietà (cfr. n. 2). Quale è la funzione che nel Calcolo delle differenze finite è da ritenere l'analoga della potenza  $x^\alpha$  ?

La presente Nota si propone di dare una *l o g i c a* risposta a tale domanda (cfr. nn. 3, 4; 5, 6, 7). Questa risposta contribuisce, fra l'altro, a porre meglio in luce le intime e molteplici analogie fra i due Calcoli sopra nominati.

1.2. - Detto  $n$  un intero positivo, alla potenza

$$x^n \equiv x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x$$

1    2    3    ...     $n$

si fa già corrispondere, nel Calcolo delle differenze con un tratto  $h \neq 0$ , il prodotto

$$(1) \quad x^{n|h} \equiv x(x-h)(x-2h) \dots (x-(n-1)h),$$

dove il simbolo del primo membro sembra sia stato introdotto dal KRAMP.

Questa scelta del prodotto (1) è sufficientemente giustificata dai due fatti seguenti:

1°) Si ha, manifestamente,  $x^{n|0} = x^n$ .

(\*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(\*\*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1962-63. - Ricevuto il 10-IX-1963.

2°) Essendo  $D_x$  il derivatore rispetto ad  $x$ , ed essendo  $D_{x,h}$  l'operatore di formazione del rapporto incrementale, definito da:  $D_{x,h} f(x) \equiv \{f(x+h) - f(x)\}/h$  (operatore che nel Calcolo delle differenze, con tratto  $h \neq 0$ , è da ritenere corrispondente a  $D_x$ ), come si ha

$$D_x x^n = n x^{n-1},$$

così risulta, in completo parallelismo,

$$(2) \quad D_{x,h} x^{nh} = n x^{(n-1)h},$$

ciò che si verifica facilmente.

**1.3.** - Sia ora  $\alpha$  un numero qualsiasi.

L'ente corrispondente alla potenza  $x^\alpha$ , nel Calcolo delle differenze finite, in base alla (1) sarà allora da rappresentarsi con il simbolo

$$(3) \quad x^{\alpha h},$$

che si chiamerà *potenza della  $x$ , di esponente  $\alpha$  e tratto  $h$* .

Ma qual'è il significato da attribuire al simbolo (3), dato che non ha senso sostituire nel secondo membro di (1) l'intero positivo  $n$  con un numero  $\alpha$  qualsiasi?

In ciò che segue sono giunto a questa conclusione:

$$(4) \quad x^{\alpha h} \equiv \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} h^\alpha,$$

dove si è posto  $z! \equiv \Gamma(z+1)$ .

## 2. - Richiamo di alcune proprietà della potenza $x^\alpha$ .

Osservo dapprima che per la potenza  $x^\alpha$  (con  $x$  variabile ed  $\alpha$  fissato comunque) vale la relazione

$$D_x x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1},$$

la quale si può anche scrivere

$$D_x x^\alpha = (\alpha/x) x^\alpha.$$

La potenza  $x^\alpha$  è dunque una funzione  $y(x, \alpha)$  che soddisfa alle proprietà seguenti:

$$D_x y(x, \alpha) = (\alpha/x) y(x, \alpha), \quad y(x, \alpha - 1) = (1/x) y(x, \alpha), \quad y(x, n) = x^n.$$

Tali proprietà non individuano esattamente  $x^\alpha$ , in quanto da esse segue

$$(5) \quad y(x, \alpha) = \pi_0(\alpha) x^\alpha,$$

dove  $\pi_0(\alpha)$  è un'arbitraria funzione periodica della  $\alpha$  di periodo 1, con  $\pi_0(n) = 1$ . Quindi  $x^\alpha$  si ottiene dal secondo membro di (5) facendo  $\pi_0(\alpha) \equiv 1$ .

### 3. - Proprietà da imporre alla potenza $x^{\alpha|h}$ .

Riprendo ora (cfr. n. 1.3) il simbolo  $x^{\alpha|h}$  della potenza di base  $x$ , esponente  $\alpha$  e tratto  $h$ , essendo  $x$  una variabile indipendente e  $\alpha, h$  fissati comunque (con  $h \neq 0$ ).

A generalizzazione della (2) impongo che sia

$$(6) \quad D_{x,h} x^{\alpha|h} = \alpha x^{(\alpha-1)|h} \quad \text{per ogni } \alpha.$$

Inoltre, poichè dalla (1) segue

$$x^{(n-1)|h} = \frac{1}{x - (n-1)h} x^{n|h},$$

impongo pure che sia

$$x^{(\alpha-1)|h} = \frac{1}{x - (\alpha-1)h} x^{\alpha|h} \quad \text{per ogni } \alpha;$$

onde la (6) può scriversi

$$D_{x,h} x^{\alpha|h} = \frac{\alpha}{x - (\alpha-1)h} x^{\alpha|h} \quad \text{per ogni } \alpha.$$

La potenza  $x^{\alpha|h}$  è dunque una funzione  $Y(x, \alpha, h)$  che soddisfa alle proprietà seguenti:

$$(7) \quad D_{x,h} Y(x, \alpha, h) = \frac{\alpha}{x - (\alpha-1)h} Y(x, \alpha, h),$$

$$(8) \quad Y(x, \alpha-1, h) = \frac{1}{x - (\alpha-1)h} Y(x, \alpha, h),$$

$$(9) \quad Y(x, n, h) = x(x-h)(x-2h) \dots (x-(n-1)h).$$

#### 4. - Risoluzione dell'equazione (7).

Risolvero ora l'equazione (7) nella funzione incognita  $Y(x, \alpha, h)$ , ossia l'equazione

$$\{ Y(x + h, \alpha, h) - Y(x, \alpha, h) \} / h = \frac{\alpha}{x - \alpha h + h} Y(x, \alpha, h).$$

Di qui si ricava

$$Y(x + h, \alpha, h) = \frac{x + h}{x - \alpha h + h} Y(x, \alpha, h),$$

da cui, prendendo i logaritmi in ambo i membri,

$$\log Y(x + h, \alpha, h) = \log \frac{x + h}{x - \alpha h + h} + \log Y(x, \alpha, h),$$

cioè

$$\log Y(x + h, \alpha, h) - \log Y(x, \alpha, h) = \log \frac{x + h}{x - \alpha h + h},$$

od anche, dividendo ambo i membri per  $h$ ,

$$(10) \quad D_{x,h} \log Y(x, \alpha, h) = h^{-1} \log \frac{x + h}{x - \alpha h + h}.$$

Osservo ora che per il secondo membro di (10) si ha

$$(11) \quad h^{-1} \log \frac{x + h}{x - \alpha h + h} = D_{x,h} \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!}.$$

Invero, sviluppando il secondo membro di (11) si ottiene

$$h^{-1} \left\{ \log \frac{\{h^{-1}(x+h)\}!}{\{h^{-1}(x+h) - \alpha\}!} - \log \frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x - \alpha)!} \right\} = h^{-1} \log \frac{(h^{-1}x+1)!(h^{-1}x - \alpha)!}{(h^{-1}x - \alpha + 1)!(h^{-1}x)!}$$

e applicando la nota identità  $(z+1)! = z!(z+1)$  il secondo membro di (11) risulta uguale a

$$h^{-1} \log \frac{h^{-1}x + 1}{h^{-1}x - \alpha + 1},$$

che è proprio il primo membro di (11).

La (10) si può allora scrivere

$$D_{x,h} \log Y(x, \alpha, h) = D_{x,h} \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!},$$

da cui

$$\log Y(x, \alpha, h) = \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} + \log \pi(x, \alpha, h),$$

essendo  $\pi(x, \alpha, h)$  un'arbitraria funzione periodica della  $x$ , con il periodo  $h$ . Infine si ottiene:

$$(12) \quad Y(x, \alpha, h) = \pi(x, \alpha, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!},$$

dove  $\pi(x, \alpha, h)$  è la funzione sopra precisata.

### 5. - Risoluzione del sistema delle (7) e (8).

Imponendo ora che la funzione (12) soddisfi anche la (8), ed eseguendo le semplici riduzioni, si ottiene la condizione

$$h \pi(x, \alpha - 1, h) = \pi(x, \alpha, h),$$

la quale è un'equazione alle differenze nella incognita  $\pi(x, \alpha, h)$ . Risolvendo tale equazione [e si può procedere in modo analogo a quanto si è fatto per la (7)], risulta

$$\pi(x, \alpha, h) = \bar{\pi}(x, \alpha, h) h^\alpha,$$

dove  $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$  è un'arbitraria funzione periodica della  $x$  con il periodo  $h$  e della  $\alpha$  con il periodo 1.

Onde risulta:

$$(13) \quad Y(x, \alpha, h) = \bar{\pi}(x, \alpha, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} h^\alpha,$$

dove  $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$  è la funzione sopra precisata.

### 6. - Risoluzione del sistema delle (7), (8) e (9).

Infine, imponendo alla funzione (13) di soddisfare la (9), si dovrà avere

$$(14) \quad \bar{\pi}(x, n, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - n)!} h^n = x(x-h)(x-2h) \dots (x-(n-1)h).$$

Ma è

$$\begin{aligned} (h^{-1}x)! &= (h^{-1}x - n + n)! = \\ &= (h^{-1}x - n)! (h^{-1}x - n + 1)(h^{-1}x - n + 2) \dots (h^{-1}x - n + n), \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x - n)!} h^n &= h^{-1}x (h^{-1}x - 1)(h^{-1}x - 2) \dots (h^{-1}x - n + 1) h^n = \\ &= x(x - h)(x - 2h) \dots (x - (n - 1)h). \end{aligned}$$

La (14) ci dà allora

$$\bar{\pi}(x, n, h) = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Si conclude quindi che la soluzione generale del sistema delle (7), (8) e (9) è

$$(15) \quad Y(x, \alpha, h) = \bar{\pi}(x, \alpha, h) \frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x - \alpha)!} h^\alpha,$$

dove  $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$  è un'arbitraria funzione periodica della  $x$  con il periodo  $h$ , della  $\alpha$  con il periodo 1, e uguale a 1 per  $\alpha = n$ .

### 7. - Conclusione.

La formula (15) ora ottenuta è da mettere in parallelismo con la (5) relativa alla potenza  $x^\alpha$ . Per ottenere ora l'espressione da indicare col simbolo  $x^{\alpha|h}$  (cfr. n. 1.3) basterà in (15) porre

$$(16) \quad \bar{\pi}(x, \alpha, h) \equiv 1,$$

in completa analogia con quanto si deve fare su (5) per ottenere  $x^\alpha$ . Si ha così per  $x^{\alpha|h}$  l'espressione annunciata nell'Introduzione.

### 8. - Osservazioni.

1<sup>a</sup>) Per meglio sentire la scelta fatta con la posizione (16), giova notare che « sono effettivamente infinite le funzioni  $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$  periodiche della  $x$  con il periodo  $h$ , della  $\alpha$  con il periodo 1, e uguali ad 1 per  $\alpha = n$  ». Ad esempio, sono tali le funzioni

$$1 + c \operatorname{sen}(2\pi\alpha) \operatorname{sen}(2\pi h^{-1}x),$$

dove  $c$  è una costante arbitraria.

2<sup>a</sup>) Notiamo ancora che, ponendo

$$\bar{\pi}(x, \alpha, h) \equiv (-1)^\alpha \frac{\operatorname{sen}(\pi h^{-1} x)}{\operatorname{sen}(\pi h^{-1} x - \pi \alpha)}$$

e tenendo presenti le note identità  $z!(-z)! = \pi z / \operatorname{sen}(\pi z)$ ,  $z! = (z-1)!z$ , si ha da (15) l'espressione

$$\frac{(-h^{-1}x + \alpha - 1)!}{(-h^{-1}x - 1)!} (-h)^\alpha,$$

alquanto meno semplice di quella assunta a definizione di  $x^{\alpha h}$ .

#### Riferimenti.

- G. BOOLE, *Calculus of finite differences*, edited by J. F. MOULTON, fourth edition, Chelsea Publishing Co., New York (cfr. Cap. II, n. 2).
- N. E. NÖRLUND, *Differenzenrechnung*, J. Springer, Berlin 1924.
- C. JORDAN, *Calculus of finite differences*, Chelsea Publishing Co., New York 1950 (cfr. §§ 16, 17).
- L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of finite differences*, Mac Millan, London 1951 (cfr. n. 2. 11).
- A. MAMBRIANI, *Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali*, Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 3 (1942), 563-571 (cfr. n. 1).

#### S u m m a r y .

*It is logically established what function is to be considered, in the Calculus of finite differences, as the analogous of the power  $x^\alpha$ .*

\* \* \*



# Indice del Volume

«Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1963)».

---

	pp.
G. CAPRIZ: <i>On Some Dynamical Problems Arising in the Theory of Lubrication. Part II.</i> . . .	1-21
A. BRESSAN: <i>Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale.</i> .	23-40
D. ROUX: <i>Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. II. - Ordine <math>q</math> diverso dal reciproco di un intero naturale.</i> . . .	41-56
A. BRESSAN: <i>Termo-magneto-fluido-dinamica in Relatività generale. Gas perfetti.</i> . . .	57-81
G. B. RIZZA: <i>Strutture di Finsler di tipo quasi Hermitiano.</i>	83-106
G. CARICATO: <i>Un criterio di stazionarietà per le varietà d'universo a simmetria spaziale sferica.</i> . . .	107-113
E. COHEN: <i>Some Analogues of Certain Arithmetical Functions.</i>	115-125
M. G. GALLI: <i>Sopra alcune proprietà del campo elettromagnetico generato dal moto iperbolico.</i> . . .	127-136
B. MANFREDI: <i>Sulla riducibilità dei problemi termoelastici a problemi isotermi.</i> . . .	137-148

	pp.
T. PATI and Z. U. AHMAD } :	149-158
<i>A New Proof of a Theorem on the Absolute Sum- mability Factors of Fourier Series. . . .</i>	
K. K. GOROWARA :	159-165
<i>A Problem in Rectilinear Congruences Using Tensor Calculus. . . .</i>	
A. C. GARIBALDI :	167-189
<i>Vibrazioni forzate di particolari sistemi non lineari, in due gradi di libertà. . . .</i>	
D. ROUX :	191-210
<i>Sul divario fra l'ordine e l'ordine inferiore delle funzioni intere. . . .</i>	
D. R. HENNEY :	211-220
<i>The Structure of Contours for non-degenerate Sur- faces defined on a 2-dimensional Manifold. . .</i>	
L. CUPELLO :	221-253
<i>Sulla condizione di Hölder in forma integrale.</i>	
L. TOSCANO :	255-269
<i>Sui polinomi ultrasferici a parametri complemen- tari rispetto all'unità. . . .</i>	
G. CARICATO :	271-274
<i>Sul significato fisico del parametro affine per le geodetiche di lunghezza nulla di una <math>V_4</math> einstei- niana. . . .</i>	
R. S. L. SRIVASTAVA and O. P. JONEJA } :	275-279
<i>On the Zeros of Entire Functions. . . .</i>	
L. TANZI CATTABIANCHI :	281-291
<i>Numeri e polinomi di Bernoulli parametrizzati.</i>	
G. BATTIONI :	293-299
<i>Su la nozione di «potenza» nel Calcolo delle diffe- renze finite. . . .</i>	
Indice del Volume «Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1963)»	301-302