Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 293-299

GIACOMINO BATTIONI (*)

Su la nozione di «potenza» nel Calcolo delle differenze finite. (**)

1. - Introduzione.

1.1. – La potenza x^α, dove la base x è una variabile indipendente e l'esponente α è fissato comunque, è una funzione (della x) che interviene nel Calcolo infinitesimale con le sue ben note proprietà (cfr. n. **2**). Quale è la funzione che nel Calcolo delle differenze finite è da ritenere l'analoga della potenza x^α ?

La presente Nota si propone di dare una logica risposta a tale domanda (cfr. nn. **3**, **4**; **5**, **6**, **7**). Questa risposta contribuisce, fra l'altro, a porre meglio in luce le intime e molteplici analogie fra i due Calcoli sopra nominati.

1.2. – Detto n un intero positivo, alla potenza

$$x^n \equiv \underset{1}{x} \cdot \underset{2}{x} \cdot \underset{3}{x} \cdot \underset{\dots}{\dots} \cdot \underset{n}{x}$$

si fa già corrispondere, nel Calcolo delle differenze con un tratto $h \neq 0$, il prodotto

$$x^{n|h} \equiv x\,(x-h)(x-2h)\dots(x-(n-1)h), \tag{1}$$

dove il simbolo del primo membro sembra sia stato introdotto dal KRAMP.

Questa scelta del prodotto (1) è sufficientemente giustificata dai due fatti seguenti:

1°) Si ha, manifestamente, $x^{n|0} = x^n$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1962-63. – Ricevuto il 10-IX-1963.

2°) Essendo D_x il derivatore rispetto ad x, ed essendo $D_{x,h}$ l'operatore di formazione del rapporto incrementale, definito da: $D_{x,h}\, f(x) \equiv \{ f(x+h) - f(x) \}/h$ (operatore che nel Calcolo delle differenze, con tratto $h \neq 0$, è da ritenere corrispondente a D_x), come si ha

$$D_x\, x^n = n\, x^{n-1},$$

così risulta, in completo parallelismo,

$$D_{x,h}\, x^{n|h} = n\, x^{(n-1)|h}, \tag{2}$$

ciò che si verifica facilmente.

1.3. – Sia ora α un numero qualsiasi.

L'ente corrispondente alla potenza x^α, nel Calcolo delle differenze finite, in base alla (1) sarà allora da rappresentarsi con il simbolo

$$x^{\alpha|h}, \tag{3}$$

che si chiamerà *potenza della x, di esponente α e tratto h.*

Ma qual'è il significato da attribuire al simbolo (3), dato che non ha senso sostituire nel secondo membro di (1) l'intero positivo n con un numero α qualsiasi?

In ciò che segue sono giunto a questa conclusione:

$$x^{\alpha|h} \equiv \frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x-\alpha)!}\, h^\alpha, \tag{4}$$

dove si è posto $z! \equiv \Gamma(z+1)$.

2. - Richiamo di alcune proprietà della potenza x^α.

Osservo dapprima che per la potenza x^α (con x variabile ed α fissato comunque) vale la relazione

$$D_x\, x^\alpha = \alpha\, x^{\alpha-1},$$

la quale si può anche scrivere

$$D_x\, x^\alpha = (\alpha/x)\, x^\alpha.$$

La potenza x^α è dunque una funzione $y(x, \alpha)$ che soddisfa alle proprietà seguenti:

$$\mathrm{D}_x\, y(x, \alpha) = (\alpha/x)\, y(x, \alpha), \qquad y(x, \alpha - 1) = (1/x)\, y(x, \alpha), \qquad y(x, n) = x^n.$$

Tali proprietà non individuano esattamente x^α, in quanto da esse segue

$$y(x, \alpha) = \pi_0(\alpha)\, x^\alpha, \tag{5}$$

dove $\pi_0(\alpha)$ è un'arbitraria funzione periodica della α di periodo 1, con $\pi_0(n) = 1$. Quindi x^α si ottiene dal secondo membro di (5) facendo $\pi_0(\alpha) \equiv 1$.

3. - Proprietà da imporre alla potenza $x^{\alpha|h}$.

Riprendo ora (cfr. n. **1.3**) il simbolo $x^{\alpha|h}$ della potenza di base x, esponente α e tratto h, essendo x una variabile indipendente e α, h fissati comunque (con $h \neq 0$).

A generalizzazione della (2) impongo che sia

$$\mathrm{D}_{x,h}\, x^{\alpha|h} = \alpha\, x^{(\alpha-1)|h} \quad \text{per ogni } \alpha. \tag{6}$$

Inoltre, poichè dalla (1) segue

$$x^{(n-1)|h} = \frac{1}{x - (n-1)h}\, x^{n|h},$$

impongo pure che sia

$$x^{(\alpha-1)|h} = \frac{1}{x - (\alpha-1)h}\, x^{\alpha|h} \quad \text{per ogni } \alpha;$$

onde la (6) può scriversi

$$\mathrm{D}_{x,h}\, x^{\alpha|h} = \frac{\alpha}{x - (\alpha-1)h}\, x^{\alpha|h} \quad \text{per ogni } \alpha.$$

La potenza $x^{\alpha|h}$ è dunque una funzione $Y(x, \alpha, h)$ che soddisfa alle proprietà seguenti:

$$\mathrm{D}_{x,h}\, Y(x, \alpha, h) = \frac{\alpha}{x - (\alpha-1)h}\, Y(x, \alpha, h), \tag{7}$$

$$Y(x, \alpha - 1, h) = \frac{1}{x - (\alpha-1)h}\, Y(x, \alpha, h), \tag{8}$$

$$Y(x, n, h) = x\,(x-h)\,(x-2h)\,\ldots\,(x-(n-1)h). \tag{9}$$

4. - Risoluzione dell'equazione (7).

Risolvo ora l'equazione (7) nella funzione incognita $Y(x, \alpha, h)$, ossia l'equazione

$$\{ Y(x+h, \alpha, h) - Y(x, \alpha, h) \}/h = \frac{\alpha}{x - \alpha h + h} Y(x, \alpha, h) .$$

Di qui si ricava

$$Y(x+h, \alpha, h) = \frac{x+h}{x - \alpha h + h} Y(x, \alpha, h) ,$$

da cui, prendendo i logaritmi in ambo i membri,

$$\log Y(x+h, \alpha, h) = \log \frac{x+h}{x - \alpha h + h} + \log Y(x, \alpha, h) ,$$

cioè

$$\log Y(x+h, \alpha, h) - \log Y(x, \alpha, h) = \log \frac{x+h}{x - \alpha h + h} ,$$

od anche, dividendo ambo i membri per h,

$$\mathrm{D}_{x,h} \log Y(x, \alpha, h) = h^{-1} \log \frac{x+h}{x - \alpha h + h} . \tag{10}$$

Osservo ora che per il secondo membro di (10) si ha

$$h^{-1} \log \frac{x+h}{x - \alpha h + h} = \mathrm{D}_{x,h} \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} . \tag{11}$$

Invero, sviluppando il secondo membro di (11) si ottiene

$$h^{-1} \left\{ \log \frac{\{h^{-1}(x+h)\}!}{\{h^{-1}(x+h) - \alpha\}!} - \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} \right\} = h^{-1} \log \frac{(h^{-1} x + 1)!\,(h^{-1} x - \alpha)!}{(h^{-1} x - \alpha + 1)!\,(h^{-1} x)!}$$

e applicando la nota identità $(z+1)! = z!\,(z+1)$ il secondo membro di (11) risulta uguale a

$$h^{-1} \log \frac{h^{-1} x + 1}{h^{-1} x - \alpha + 1} ,$$

che è proprio il primo membro di (11).

La (10) si può allora scrivere

$$D_{x,h} \log Y(x, \alpha, h) = D_{x,h} \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!},$$

da cui

$$\log Y(x, \alpha, h) = \log \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} + \log \pi(x, \alpha, h),$$

essendo $\pi(x, \alpha, h)$ un'arbitraria funzione periodica della x, con il periodo h. Infine si ottiene:

$$Y(x, \alpha, h) = \pi(x, \alpha, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!}, \tag{12}$$

dove $\pi(x, \alpha, h)$ è la funzione sopra precisata.

5. - Risoluzione del sistema delle (7) **e** (8).

Imponendo ora che la funzione (12) soddisfi anche la (8), ed eseguendo le semplici riduzioni, si ottiene la condizione

$$h \; \pi(x, \alpha - 1, h) = \pi(x, \alpha, h),$$

la quale è un'equazione alle differenze nella incognita $\pi(x, \alpha, h)$. Risolvendo tale equazione [e si può procedere in modo analogo a quanto si è fatto per la (7)], risulta

$$\pi(x, \alpha, h) = \bar{\pi}(x, \alpha, h) \, h^{\alpha},$$

dove $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$ è un'arbitraria funzione periodica della x con il periodo h e della α con il periodo 1.

Onde risulta:

$$Y(x, \alpha, h) = \bar{\pi}(x, \alpha, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - \alpha)!} h^{\alpha}, \tag{13}$$

dove $\bar{\pi}(x, \alpha, h)$ è la funzione sopra precisata.

6. - Risoluzione del sistema delle (7), (8) **e** (9).

Infine, imponendo alla funzione (13) di soddisfare la (9), si dovrà avere

$$\bar{\pi}(x, n, h) \frac{(h^{-1} x)!}{(h^{-1} x - n)!} h^{n} = x (x - h)(x - 2h) \dots (x - (n-1)h). \tag{14}$$

Ma è

$$(h^{-1}x)! = (h^{-1}x - n + n)! =$$

$$= (h^{-1}x - n)!\,(h^{-1}x - n + 1)(h^{-1}x - n + 2)\ldots(h^{-1}x - n + n),$$

onde

$$\frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x - n)!}\,h^n = h^{-1}x\,(h^{-1}x - 1)(h^{-1}x - 2)\ldots(h^{-1}x - n + 1)\,h^n =$$

$$= x\,(x - h)(x - 2h)\ldots(x - (n-1)h)\,.$$

La (14) ci dà allora

$$\bar{\pi}(x,\ n,\ h) = 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ldots).$$

Si conclude quindi che la soluzione generale del sistema delle (7), (8) e (9) è

$$Y(x,\ \alpha,\ h) = \bar{\pi}(x,\ \alpha,\ h)\,\frac{(h^{-1}x)!}{(h^{-1}x - \alpha)!}\,h^{\alpha}\,, \tag{15}$$

dove $\bar{\pi}(x,\ \alpha,\ h)$ è un'arbitraria funzione periodica della x con il periodo h, della α con il periodo 1, e uguale a 1 per $\alpha = n$.

7. - Conclusione.

La formula (15) ora ottenuta è da mettere in parallelismo con la (5) relativa alla potenza x^{α}. Per ottenere ora l'espressione da indicare col simbolo $x^{\alpha|h}$ (cfr. n. **1.3**) basterà in (15) porre

$$\bar{\pi}(x,\ \alpha,\ h) \equiv 1\,, \tag{16}$$

in completa analogia con quanto si deve fare su (5) per ottenere x^{α}. Si ha così per $x^{\alpha|h}$ l'espressione annunciata nell'Introduzione.

8. - Osservazioni.

1ª) Per meglio sentire la scelta fatta con la posizione (16), giova notare che « sono effettivamente infinite le funzioni $\bar{\pi}(x,\ \alpha,\ h)$ periodiche della x con il periodo h, della α con il periodo 1, e uguali ad 1 per $\alpha = n$ ». Ad esempio, sono tali le funzioni

$$1 + c\,\mathrm{sen}\,(2\pi\alpha)\,\mathrm{sen}\,(2\pi h^{-1}x)\,,$$

dove c è una costante arbitraria.

2[a]) Notiamo ancora che, ponendo

$$\bar{\pi}(x,\ \alpha,\ h) \equiv (-1)^{\alpha} \frac{\operatorname{sen}(\pi h^{-1} x)}{\operatorname{sen}(\pi h^{-1} x - \pi\alpha)}$$

e tenendo presenti le note identità $z!\,(-z)! = \pi z/\operatorname{sen}(\pi z)$, $z! = (z-1)!\,z$, si ha da (15) l'espressione

$$\frac{(-h^{-1}x + \alpha - 1)!}{(-h^{-1}x - 1)!}(-h)^{\alpha},$$

alquanto meno semplice di quella assunta a definizione di $x^{\alpha|h}$.

Riferimenti.

G. Boole, *Calculus of finite differences*, edited by J. F. Moulton, fourt edition, Chelsea Publishing Co., New York (cfr. Cap. II, n. **2**).

N. E. Nörlund, *Differenzenrechnung*, J. Springer, Berlin 1924.

C. Jordan, *Calculus of finite differences*, Chelsea Publishing Co., New York 1950 (cfr. §§ **16**, **17**).

L. M. Milne-Thomson, *The Calculus of finite differences*, Mac Millan, London 1951 (cfr. n. **2**. **11**).

A. Mambriani, *Equazioni lineari e omogenee alle differenze finite aventi soluzioni polinomiali*, Atti Accad. Italia, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 3 (1942), 563-571 (cfr. n. **1**).

Summary.

It is logically established what function is to be considered, in the Calculus of finite differences, as the analogous of the power x^{α}.

* * *

Indice del Volume

«Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1963)».

* * *