Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 281-291

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Numeri e polinomi di Bernoulli parametrizzati. (**)

1. - Introduzione.

Le classiche definizioni dei numeri e dei polinomi di BERNOULLI sono qui generalizzate mediante l'introduzione di due parametri h e ω: per $h = 1$ e $\omega = 0$ si hanno gli ordinari numeri e polinomi di BERNOULLI. Tali nuovi numeri e polinomi vengono chiamati *numeri e polinomi di Bernoulli parametrizzati.*

È ben noto che l'equazione alle differenze finite

$$y(x+1) - y(x) = n\, x^{n-1} \tag{1}$$

(con n intero non negativo) ha come soluzione il polinomio di BERNOULLI

$$B_n(x) = \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} B_r\, x^{n-r}, \tag{2}$$

dove i B_r ($r = 0, 1, 2, \ldots$) sono i numeri di BERNOULLI.

Se, anzichè la (1), consideriamo più generalmente l'equazione (contenente un parametro h non nullo)

$$\frac{y(x+h) - y(x)}{h} = n\, x^{n-1},$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1963-64. – Ricevuto il 14-XII-1963.

si trova che tale equazione ha come soluzione il polinomio

$$\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} h^r B_r \, x^{n-r} ,$$

ottenuto semplicemente da (2) sostituendo B_r con $h^r B_r$.

Tenendo poi presente che nel Calcolo delle differenze finite la potenza x^n trova la sua naturale generalizzazione nel prodotto (contenente un parametro ω)

$$x^{n|\omega} = x(x-\omega)(x-2\omega) \dots (x-(n-1)\omega), \tag{3}$$

viene spontaneo di generalizzare ulteriormente la (1) nella seguente equazione (contenente i due parametri h e ω)

$$\frac{y(x+h)-y(x)}{h} = n \, x^{(n-1)|\omega} , \tag{4}$$

intendendo che il secondo membro sia zero per $n=0$ e sia 1 per $n=1$.

La (4) *risulta avere come soluzione* (cfr. n. 2) *un polinomio di grado n in x, i cui coefficienti sono polinomi nei parametri h e ω.* Tale polinomio, che indico col simbolo $B_{n;h,\omega}(x)$, ha l'espressione

$$B_{n;h,\omega}(x) = \sum_0^n{}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega} \; x^{(n-r)|\omega} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots) \tag{5}$$

dove le quantità $B_{r;h,\omega}$ (indipendenti da x) sono definite in modo ricorrente da

$$\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega} \; h^{(n-r)|\omega} - B_{n;h,\omega} = h \, \varepsilon_{n-1} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \dots), \tag{6}$$

essendo

$$\dots = \varepsilon_{-2} = \varepsilon_{-1} = 0, \qquad \varepsilon_0 = 1, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = 0 \text{ [1]} .$$

In particolare, per $h=1$, $\omega=0$ si ha

$$B_{n;1,0} = B_n, \qquad B_{n;1,0}(x) = B_n(x).$$

---

[1] Circa l'uso del simbolo ε_m, cfr. A. MAMBRIANI: [3], I, n. 2, o anche [4], n. 2.

Altro caso particolare degno di rilievo si presenta (cfr. n. 5) per $h=0$, $\omega=1$, e risulta

$$B_{n;0,1}=B_n^{(n)}(1), \qquad B_{n;0,1}(x)=B_n^{(n)}(x+1)\,,$$

dove i $B_n^{(\nu)}(x)$ sono i polinomi di BERNOULLI di ordine ν (²): in questo caso la (4) diventa

$$y'(x)=n\,x(x-1)(x-2)\,...\,(x-n+2)\,,$$

che è l'equazione differenziale dei particolari polinomi parametrizzati $B_{n;0,1}(x)$.

Di questi numeri $B_{n;h,\omega}$ e corrispondenti polinomi parametrizzati si calcolano le espressioni per i primi valori di n e si stabiliscono alcune proprietà; si generalizzano poi alcune note formule.

2. - Risoluzione dell'equazione alle differenze finite dei polinomi di Bernoulli parametrizzati.

Tenendo presente l'espressione (2) degli ordinari polinomi di BERNOULLI, cerchiamo di soddisfare all'equazione (4) mediante polinomi della forma

$$\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} a_r\, x^{(n-r)|\omega}, \tag{7}$$

nei quali le quantità a_r siano indipendenti dalla variabile x.

Per determinare la successione $\{a_r\}$:

1°) sostituiamo il polinomio (7) nell'equazione (4), con che si ottiene

$$\frac{1}{h}\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} a_r\,\left\{(x+h)^{(n-r)|\omega}-x^{(n-r)|\omega}\right\}=n\,x^{(n-1)|\omega};$$

2°) facciamo in questa $x=0$, ciò che dà

$$\frac{1}{h}\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} a_r\,\left\{h^{(n-r)|\omega}-\varepsilon_{n-r}\right\}=\varepsilon_{n-1}\,,$$

ossia

$$\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} a_r\, h^{(n-r)|\omega}-a_n=h\varepsilon_{n-1} \qquad (n=0,\,1,\,2,\,...)\,. \tag{8}$$

Si vede facilmente che le (8) individuano univocamente la successione degli a_r (che risultano quindi indipendenti dalla x).

(²) Cfr. N. E. NÖRLUND [1], p. 129; L. M. MILNE-THOMSON [5], p. 127.

Pertanto l'equazione (4) ha come soluzione il polinomio della forma (7) con le quantità a_r date dalle (8). Tali quantità, dipendenti dai parametri h e ω, sono precisamente i numeri di BERNOULLI parametrizzati, che sono quindi definiti proprio dalla (6). Conseguentemente il polinomio (7), soluzione dell'equazione (4), è esattamente il polinomio di BERNOULLI parametrizzato $B_{n;h,\omega}(x)$, che è quindi definito dalla (5). Risulta poi, dalla (5) stessa,

$$B_{n;h,\omega}(0) = B_{n;h,\omega}\,.$$

Osserviamo, in particolare, che la (6) per $h = 1$ e $\omega = 0$ diventa

$$\sum_0^n {}_r \binom{n}{r} B_r - B_n = \varepsilon_{n-1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)\,,$$

la quale definisce gli ordinari numeri B_n di BERNOULLI.

3. - I primi numeri e polinomi di Bernoulli parametrizzati.

Per il calcolo dei successivi $B_{n;h,\omega}$ è utile notare che la (6) ci dà $B_{0;h,\omega} = 1$ e

$$B_{n;h,\omega} = -\frac{1}{n+1} \sum_0^{n-1} {}_r \binom{n+1}{r} B_{r;h,\omega} \cdot (h-\omega)^{(n-r)|\omega} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{6'}$$

Si ottengono (con calcoli che diventano via via piuttosto laboriosi) per i primi sette $B_{n;h,\omega}$ le espressioni:

$$\left\{\begin{aligned}
B_{0;h,\omega} &= 1\\
B_{1;h,\omega} &= -\frac{1}{2}(h-\omega)\\
B_{2;h,\omega} &= \frac{1}{6}(h^2-\omega^2)\\
B_{3;h,\omega} &= -\frac{1}{4}\,\omega\,(h^2-\omega^2)\\
B_{4;h,\omega} &= -\frac{1}{30}(h^2-\omega^2)(h^2-19\omega^2)\\
B_{5;h,\omega} &= \frac{1}{4}\,\omega\,(h^2-\omega^2)(h^2-9\omega^2)\\
B_{6;h,\omega} &= \frac{1}{84}(h^2-\omega^2)(2\,h^4-145\,h^2\,\omega^2+863\,\omega)\,.
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Applicando poi successivamente la (5), si trovano per i primi cinque polinomi $B_{n;h,\omega}(x)$ le espressioni:

$$
(10)\quad \begin{cases}
B_{0;h,\omega}(x) = 1 \\
B_{1;h,\omega}(x) = x - \frac{1}{2}(h-\omega) \\
B_{2;h,\omega}(x) = x^2 - h\,x + \frac{1}{6}(h^2 - \omega^2) \\
B_{3;h,\omega}(x) = x^3 - \frac{3}{2}(h+\omega)\,x^2 + \frac{1}{2}h\,(h+3\omega)\,x - \frac{1}{4}\omega\,(h^2-\omega^2) \\
B_{4;h,\omega}(x) = x^4 - 2(h+2\omega)\,x^3 + (h^2 + 6h\omega + 4\omega^2)\,x^2 - \\
\qquad - 2h\omega\,(h+2\omega)\,x - \frac{1}{30}(h^2-\omega^2)(h^2 - 19\,\omega^2)\,.
\end{cases}
$$

Osserviamo, in particolare, che per $h = 1$ e $\omega = 0$ si hanno, dalle (9), i primi sette numeri di BERNOULLI:

$$B_0 = 1\,,\quad B_1 = -\frac{1}{2}\,,\quad B_2 = \frac{1}{6}\,,\quad B_3 = 0\,,\quad B_4 = -\frac{1}{30}\,,\quad B_5 = 0\,,\quad B_6 = \frac{1}{42};$$

mentre, dalle (10), si hanno i primi cinque polinomi di BERNOULLI:

$$B_0(x) = 1\,,\quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}\,,\quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}\,,$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x = x\,(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}\,.$$

4. - Funzioni generatrici dei numeri e dei polinomi di Bernoulli parametrizzati.

Come è noto, la funzione generatrice ([3]) dei numeri B_n di BERNOULLI è data da

$$(11)\qquad \frac{t}{e^t - 1}\,.$$

([3]) Ricordiamo che, data una successione a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, si chiama *funzione generatrice* degli a_n la funzione somma della serie (supposta convergente) $\sum_0^\infty{}_n\, a_n\, t^n/n!$.

Determiniamo ora la funzione generatrice dei $B_{n;h,\omega}$. Partendo dalla (6), abbiamo

$$\sum_0^\infty {}_n \left\{ \sum_0^n {}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega} \; h^{(n-r)|\omega} \right\} \frac{t^n}{n!} - \sum_0^\infty {}_n B_{n;h,\omega} \frac{t^n}{n!} = h\,t\,,$$

ossia, tenendo presente che nel primo membro il primo termine è un prodotto di serie secondo CAUCHY,

$$\left\{ \sum_0^\infty {}_n B_{n;h,\omega} \frac{t^n}{n!} \right\} \left\{ \sum_0^\infty {}_n h^{n|\omega} \frac{t^n}{n!} - 1 \right\} = h\,t\,. \tag{12}$$

È poi

$$\sum_0^\infty {}_n h^{n|\omega} \frac{t^n}{n!} = (1 + \omega\,t)^{h/\omega} \qquad (\,|\,\omega\,t\,| < 1)\,,$$

come segue dal notare che si ha

$$h^{n|\omega} \frac{t^n}{n!} = h(h - \omega)(h - 2\omega) \ldots (h - (n-1)\omega) \frac{t^n}{n!} = \binom{h/\omega}{n} (\omega\,t)^n\,,$$

onde la (12) ci dà

$$\sum_0^\infty {}_n B_{n;h,\omega} \frac{t^n}{n!} = \frac{h\,t}{(1 + \omega\,t)^{h/\omega} - 1} \qquad (\,|\,\omega\,t\,| < 1), \tag{13}$$

dove il secondo membro è quindi la *funzione generatrice dei* $B_{n;h,\omega}$.

Osserviamo che per $h = 1$ e $\omega \to 0$ il secondo membro della (13) diventa la (11): infatti

$$(1 + \omega\,t)^{1/\omega} = \{ (1 + \omega\,t)^{1/(\omega t)} \}^t \to e\,.$$

Analogamente, partendo dalla (5), si trova che la *funzione generatrice dei polinomi* $B_{n;h,\omega}(x)$ è data da

$$\frac{h\,t\,(1 + \omega\,t)^{x/\omega}}{(1 + \omega\,t)^{h/\omega} - 1}\,;$$

tale funzione per $h = 1$ e $\omega \to 0$ diventa

$$\frac{t\,e^{xt}}{e^t - 1}$$

(la nota funzione generatrice dei classici polinomi di BERNOULLI).

5. - Il caso particolare notevole $h = 0$, $\omega = 1$.

Osserviamo che la (6) si può anche scrivere nella forma

$$\sum_0^n{}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega} \frac{(h-\omega)^{(n-r)|\omega}}{n-r+1} = \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da questa si ha, per $h = 0$,

$$\sum_0^n{}_r \frac{B_{r;0,\omega}}{r!} \frac{(-\omega)^{n-r}}{n-r+1} = \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ossia, dividendo ambo i membri per ω^n,

(14) $$\sum_0^n{}_r \frac{B_{r;0,\omega}}{r!\,\omega^r} \frac{(-1)^{n-r}}{n-r+1} = \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Ponendo qui $\omega = 1$, risulta

(15) $$\sum_0^n{}_r \frac{B_{r;0,1}}{r!} \frac{(-1)^{n-r}}{n-r+1} = \varepsilon_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il confronto di (14) con (15) porta a concludere che è necessariamente $B_{r;0,\omega}/\omega^r = B_{r;0,1}$, ossia, mutando r in n,

(16) $$B_{n;0,\omega} = \omega^n B_{n;0,1}$$

e ciò in analogia con

$$B_{n;h,0} = h^n B_{n;1,0} = h^n B_n .$$

Questa analogia suggerisce di porre

$$B_{n;0,1} = \overline{B}_n ,$$

onde (16) diventa

(16′) $$B_{n;0,\omega} = \omega^n \overline{B}_n .$$

Per i primi numeri $\overline{B}_n$ si hanno i valori:

$$\overline{B}_0 = 1, \quad \overline{B}_1 = \frac{1}{2}, \quad \overline{B}_2 = -\frac{1}{6}, \quad \overline{B}_3 = \frac{1}{4}, \quad \overline{B}_4 = -\frac{19}{30}, \quad \overline{B}_5 = \frac{9}{4}, \quad \overline{B}_6 = -\frac{863}{42}.$$

Osserviamo che la funzione generatrice dei $\overline{B}_n$ è

$$t/\log(1+t),$$

che si ottiene dalla funzione generatrice dei $B_{n;\,h,\omega}$, ossia dal secondo membro di (13), ponendo $\omega=1$ e passando al limite per $h\to 0$. D'altra parte risulta [4]

$$\frac{t}{\log(1+t)}=\sum_0^\infty{}_n\, B_n^{(n)}(1)\,\frac{t^n}{n!},$$

dove i $B_n^{(\nu)}(x)$ sono i noti polinomi di Bernoulli di ordine ν. Ne segue

$$\overline{B}_n=B_n^{(n)}(1). \tag{17}$$

Se poi, corrispondentemente ai numeri $\overline{B}_n$, consideriamo i polinomi di Bernoulli parametrizzati (di parametri $h=0$ e $\omega=1$) e poniamo

$$B_{n;0,1}(x)=\overline{B}_n(x),$$

si trova che vale la relazione

$$\overline{B}_n(x)=B_n^{(n)}(x+1).$$

Per i primi polinomi $\overline{B}_n(x)$ si hanno le espressioni:

$$\overline{B}_0(x)=1,\qquad \overline{B}_1(x)=x+\frac{1}{2},\qquad \overline{B}_2(x)=x^2-\frac{1}{6},$$

$$\overline{B}_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4},\qquad \overline{B}_4(x)=x^4-4x^3+4x^2-\frac{19}{30}.$$

Oserviamo che l'equazione alle differenze finite (4) dei polinomi $B_{n;h,\omega}(x)$ per $\omega=1$ e $h\to 0$ si muta nell'equazione differenziale

$$y'(x)=n\,x^{(n-1)|1}.$$

È facile constatare che i polinomi $\overline{B}_n(x)$ sono, a meno di una arbitraria costante additiva, le soluzioni di tale equazione differenziale.

---

[4] Cfr., ad es., L. M. Milne-Thomson [5], p. 135, formula (6).

Più in generale, si constata che i polinomi $B_{n;0,\omega}(x)$ sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = n\, x^{(n-1)|\omega}$$

[ottenuta dalla (4) per $h \to 0$].

6. - Alcune proprietà dei $B_{n;h,\omega}$.

a) I *numeri di* B e r n o u l l i *parametrizzati* $B_{n;h,\omega}$ *sono polinomi nei parametri* h *e* ω. Ciò risulta immediatamente dalla loro definizione (6). Si ha poi:

1°) $B_{n;h,\omega}$ *è un polinomio di grado* $\leqq n$ *in* h; *in particolare*, $B_{n;h,\omega}$ *per* n *dispari* $\geqq 3$ *è un polinomio di grado* $\leqq n-1$ *in* h. La prima parte dell'affermazione è conseguenza immediata della definizione dei $B_{n;h,\omega}$; la seconda parte si prova ricordando (cfr. n. 1) che $B_{n;h,0} = h^n B_n$ e tenendo presente che per n dispari $\geqq 3$ risulta $B_n = 0$.

2°) $B_{n;h,\omega}$ *è un polinomio di grado* $\leqq n$ *in* ω. Anche questa proprietà risulta immediatamente dalla definizione dei $B_{n;h,\omega}$.

O s s e r v a z i o n e. Per $0 \leqq n \leqq 6$ i $B_{n;h,\omega}$ [si vedano le (9) del n. 3] sono *esattamente* di grado n in ω e ciò fa pensare che tale proprietà valga per ogni n. La eventuale conferma di ciò condurrebbe a dimostrare [si tengano presenti (16') e (17)] che i numeri $\overline{B}_n = B_n^{(n)}(1)$ sono tutti diversi da zero (il che non mi risulta sia stato provato).

b) $B_{n;h,\omega}$ *per* $n \geqq 1$ *è divisibile per* $h - \omega$. Infatti, per $\omega = h$ si ha subito

$$B_{0;h,h} = 1, \qquad B_{n;h,h} = 0 \qquad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

c) $B_{n;h,\omega}$ *per* $n \geqq 2$ *è divisibile per* $h + \omega$ (e pertanto, per la proprietà precedente, è per $n \geqq 2$ divisibile per $h^2 - \omega^2$). Infatti, per $\omega = -h$ si ottiene facilmente

$$B_{0;h,-h} = 1, \quad B_{1;h,-h} = -\frac{1}{2}\, h^2, \qquad B_{n;h,-h} = 0 \qquad (n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

d) Vale la relazione:

$$B_{n;2\omega,\omega} = (-1)^n \frac{n!}{2^n}\, \omega^n. \tag{18}$$

Infatti, per $h = 2\omega$ si trova

$$B_{n;2\omega,\omega} = -\frac{n}{2}\,\omega B_{n-1;2\omega,\omega}\,,$$

da cui la (18). In particolare risulta

$$B_{n;-4\quad 2} = n\,!\,.$$

e) Vale la relazione:

$$B_{n;-h,-\omega} = (-\,1)^n\, B_{n;h,\omega} \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,.$$

Ciò si ottiene da (6) con lo scambio di h, ω rispettivamente in $-h$, $-\omega$.

7. - Alcune proprietà dei polinomi $B_{n;h,\omega}(x)$.

Dalla (5) del n. **1** si ricava

$$\frac{B_{n;h,\omega}(x+\omega) - B_{n;h,\omega}(x)}{\omega} = \sum_0^n{}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega}\, \frac{(x+\omega)^{(n-r)|\omega} - x^{(n-r)|\omega}}{\omega}\,. \tag{19}$$

Avendosi poi

$$(x+\omega)^{m|\omega} - x^{m|\omega} = m\,\omega\, x^{(m-1)|\omega}\,,$$

il rapporto figurante nel secondo membro di (19) è eguale a

$$(n-r)\ x^{(n-r-1)|\omega}$$

e quindi tale secondo membro (tenendo conto che l'ultimo termine della somma è nullo) è dato da

$$\sum_0^{n-1}{}_r \binom{n}{r} B_{r;h,\omega}\ (n-r)\ x^{(n-r-1)|\omega} =$$

$$= n \sum_0^{n-1}{}_r \binom{n-1}{r} B_{r;h,\omega}\ x^{((n-1)-r)|\omega} = n\ B_{n-1;h,\omega}(x)\,.$$

Si ha pertanto per $B_{n;h,\omega}(x)$ la conclusione:

$$\frac{B_{n;h,\omega}(x+\omega) - B_{n;h,\omega}(x)}{\omega} = n\, B_{n-1;h,\omega}(x)\,, \tag{20}$$

Formula da associare all'altra [esprimente che $B_{n;h,\omega}(x)$ è soluzione dell'equazione (4)]

$$\frac{B_{n;h,\omega}(x+h) - B_{n;h,\omega}(x)}{h} = n\, x^{(n-1)|\omega}\,. \tag{21}$$

Passando al limite nella (20) per $\omega \to 0$ e nella (21) per $h \to 0$, si ottiene poi, rispettivamente,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_{n;h,0}(x) = n\, B_{n-1;h,0}(x)\,, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} B_{n;0,\omega}(x) = n\, x^{(n-1)|\omega}.$$

Bibliografia.

[1] N. E. NÖRLUND, *Vorlesungen über Differenzenrechnung*, Springer, Berlin 1924.

[2] N. E. NÖRLUND, *Sur la « somme » d'une fonction*. Mémorial des Sciences Math., Fasc. XXIV, Gauthier-Villars, Paris 1927.

[3] A. MAMBRIANI, *Sull'Algebra delle successioni* (I-II), Ann. Mat. Pura Appl. (4) **8** (1930), 103-139; **9** (1931), 25-56.

[4] A. MAMBRIANI, *Saggio di una nuova trattazione dei numeri e dei polinomi di Bernoulli e di Euler*, Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. **3** (1932), 49-80.

[5] L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of Finite Differences*, Macmillan and Co., London 1931.

* * *