Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 191-210

DELFINA ROUX (*)

Sul divario fra l' ordine e l' ordine inferiore delle funzioni intere. (**)

Si studia il cosiddetto « ordine inferiore » di una funzione intera e si stabilisce una condizione, per la successione dei coefficienti, sufficiente affinchè l'ordine inferiore assuma il minimo valore compatibile con una maggiorazione classica; una analoga condizione viene assegnata per l'ordine in senso classico. Si esamina anche il caso in cui esistano infiniti coefficienti nulli.

Si aggiunge una osservazione intesa a precisare in qual modo una relazione che lega l'andamento del massimo modulo (o della successione dei coefficienti) di più funzioni intere possa tradursi in una relazione che lega gli ordini e i tipi delle stesse funzioni.

1. - Sulle relazioni fra l' ordine inferiore e la successione dei coefficienti.

Sia $F(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ una funzione intera della variabile complessa z: posto $M(r) = \operatorname{Max}_{|z| \leq r} | F(z) |$ e $\log^{(2)} x = \log \log x$, l'ordine ϱ e l'ordine inferiore λ di $F(z)$, cioè

$$\varrho = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log^{(2)} M(r)}{\log r}, \qquad \lambda = \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log^{(2)} M(r)}{\log r},$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « F. Enriques », Università (via C. Saldini 50), Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1963-64. — Ricevuto il 5-XII-1963.

soddisfano, come è ben noto (¹), alle relazioni

$$(1.1)\qquad \frac{1}{\varrho}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\log|1/a_n|}{n\log n},$$

$$(1.2)\qquad \frac{1}{\lambda}\leqq\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|1/a_n|}{n\log n},$$

ed esistono funzioni $F(z)$ per le quali in (1.2) vale il segno $<$ e altre per le quali vale il segno $=$.

È stato dimostrato (S. M. SHAH [2]) che:

Da $|a_{n+1}/a_{n+2}|\geqq|a_n/a_{n+1}|$ $(n\geqq n_0)$ segue

$$(1.3)\qquad \frac{1}{\lambda}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|1/a_n|}{n\log n}.$$

In questa Nota dimostreremo che la validità di (1.3) è assicurata in condizioni sufficienti più generali, e precisamente vale il seguente

Teorema I. *Se $F(z)$ soddisfa la seguente condizione*

(A) *Esistono due successioni* $\{k(n)\}$, $\{\varepsilon(n)\}$, $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ *tali che si abbia*

$$k(n)=n^{1+o(1)},\qquad \varepsilon(n)\to 0\ \ per\ n\to+\infty,$$

$$|a_{k(n)}/a_{k(n)+h}|>|a_n/a_{n+1}|^{h\cdot(1-\varepsilon(n))}\qquad (n\geqq n_0;\ h=1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

allora per l'ordine inferiore λ di $F(z)$ vale l'uguaglianza

$$(1.4)\qquad \frac{1}{\lambda}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{\log|a_n/a_{n+1}|}{\log n}.$$

Osservazioni.

1) La condizione (A) implica $a_n\neq 0$ per n abbastanza grande.

2) La condizione (A) non può essere attenuata nel senso che il Teorema non vale più se nella (A) in luogo di $o(1)$ si sostituisce $O(1)$ e ancora non

(¹) Vedasi, ad es., R. P. BOAS jr. [1]: teorema (2.2.2), pag. 9; teorema (2.3.1), pag. 11.

vale più se si sostituisce all'ipotesi $\varepsilon(n) \to 0$ quella più attenuata $0 = \varliminf_{n\to+\infty} \varepsilon(n) < \varlimsup_{n\to+\infty} \varepsilon(n) = \beta$ (β arbitrariamente piccolo). Infatti, sia $\alpha > 0$, $\beta > 0$ e $\{n_h\}$ una successione crescente di numeri interi tale che $n_{h+1} \geqq n_h^{1+\beta}$ $(n_0 > 1)$. Assumiamo

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n \cdot (n+1)^{-\alpha} & \text{per } n \neq n_h \\ a_n \cdot (n+1)^{-\alpha(1+\beta)} & \text{per } n = n_h . \end{cases}$$

La funzione $F^*(z)$ così costruita soddisfa la condizione analoga alla (A) e che si ottiene da questa sostituendo $O(1)$ in luogo di $o(1)$; infatti basta assumere

$$\varepsilon(n) = 0, \qquad k(n) = \begin{cases} n+1 & \text{per } n \neq n_h \\ [(n+1)^{1+\beta}] = (n+1)^{1+O(1)} & \text{per } n = n_h . \end{cases}$$

Inoltre osserviamo che per ogni γ, $0 < \gamma < \beta$, e $k(n_h) \leqq (n_h + 1)^{1+\gamma}$, la condizione (A) non è soddisfatta.

Per la funzione $F^*(z)$ risulta

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log|1/a_n|}{n\log n} = \alpha < \alpha(1+\beta) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log|a_n/a_{n+1}|}{\log n}, \tag{1.5}$$

e quindi la (1.4) non vale.

Inoltre, la funzione $F^*(z)$ soddisfa la condizione analoga alla (A) con $0 = \varliminf_{n\to+\infty} \varepsilon(n) < \varlimsup_{n\to+\infty} \varepsilon(n)$, in luogo di $\varepsilon(n) \to 0$: basta infatti assumere

$$k(n) = n+1, \quad \varepsilon(n) = \begin{cases} 0 & \text{per } n \neq n_h \\ \dfrac{\beta}{1+\beta} & \text{per } n = n_h . \end{cases}$$

Osserviamo inoltre che, comunque si scelga $\varepsilon(n) \to 0$, la condizione (A) non è soddisfatta. Per la funzione $F^*(z)$, in forza della (1.5), la (1.4) non vale.

3) La successione $\{a_n\}$ soddisfa la condizione

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log|1/a_n|}{n\log n} \leqq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log|a_n/a_{n+1}|}{\log n}. \tag{1.6}$$

[Infatti, sia $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \log | a_n/a_{n+1} |/\log n = L$; essendo $a_n \to 0$, risulta necessariamente $0 \leqq L \leqq +\infty$: se $L = +\infty$, la (1.6) è ovvia; se $L < +\infty$, per ogni $\varepsilon > 0$, $n > n_1(\varepsilon)$, risulta

$$\begin{aligned}\log | 1/a_n | &= \log | 1/a_{n_1} | + \sum_{k=n_1}^{k=n-1} \log | a_k/a_{k+1} | \\ &< \log | 1/a_{n_1} | + \sum_{k\leqq n-1} (L+\varepsilon) \log k \\ &< (1+o(1))(L+\varepsilon) n \log n\,,\end{aligned}$$

da cui segue la (1.6).]

Pertanto dal Teorema I segue come corollario:

Se $F(z)$ soddisfa la condizione (A) *risulta*

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log | 1/a_n |}{n \log n}\,.$$

4) Se $\{ | a_n/a_{n+1} | \}$ è monotona non decrescente, allora è verificata la (A) con $k(n) = n$, $\varepsilon(n) = 1/n$; quindi il Teorema I [in forza dell'Osservazione 3)] contiene il teorema di SHAH come caso particolare.

5) La condizione (A) consente alla successione $\{ | a_n/a_{n+1} | \}$ oscillazioni ampie (purchè non troppo frequenti): infatti esistono successioni $\{ a_n \}$ soddisfacenti la condizione (A) e per le quali risulta

$$0 = \underline{\lim}_{n\to+\infty} | a_n/a_{n+1} | < \overline{\lim}_{n\to+\infty} | a_n/a_{n+1} | = +\infty\,.$$

2. - Sulle relazioni fra l'ordine e la successione dei coefficienti.

La successione $\{ a_n \}$ dei coefficienti di $F(z)$ soddisfa la disuguaglianza

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log | 1/a_n |}{n \log n} \geqq \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{\log | a_n/a_{n+1} |}{\log n}\,. \tag{2.1}$$

[Basterà limitarsi a considerare il caso in cui il primo membro abbia valore finito e il secondo membro abbia valore positivo: per ogni l dell' intervallo

$$0 < l < \underline{\lim}_{n\to+\infty} \log | a_n/a_{n+1} |/\log n$$

e per ogni coppia di interi n, m $(n > m > n_1(l))$, risulta

$$\log |1/a_n| = \log |1/a_m| + \sum_{k=m}^{k=n-1} \log |a_k/a_{k+1}|$$

$$> l \sum_{k=m}^{k=n-1} \log k > l \cdot (n - m - 1) \log m .$$

Assumendo $m = n/\log n$ segue la (2.1)].

Di conseguenza da (1.1) si ricava

$$\frac{1}{\varrho} \geqq \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n} . \tag{2.2}$$

La condizione (A) non è evidentemente sufficiente a garantire che in (2.2) valga il segno $=$; perchè questo si verifichi, è necessario imporre alla successione $\{ |a_n/a_{n+1}| \}$ condizioni più restrittive, per esempio una «relativa monotonia». Sussiste infatti il seguente

Teorema II. *Se $F(z)$ soddisfa la seguente condizione:*

(B) *Esiste una successione $\{ \varepsilon(n) \}$ tale che si abbia*

$$\varepsilon(n) \to 0+ \quad per \quad n \to +\infty ,$$

$$\left| \frac{a_m}{a_{m+1}} \right| > \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|^{1-\varepsilon(n)} \qquad (n \geqq n_0; \quad m = n,\ n+1,\ n+2, \dots);$$

allora l'ordine ϱ e l'ordine inferiore λ di $F(z)$ soddisfano le uguaglianze

$$\varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n} = \frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{\lambda} = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n} . \tag{2.3}$$

Osservazioni.

1) La condizione (B) implica $a_n \neq 0$ per n abbastanza grande.

2) Se $F(z)$ soddisfa la condizione (B), soddisfa anche la condizione (A), con $k(n) = n$.

3) Esistono funzioni $F(z)$ per le quali è verificata (A) ed è verificata (B) quando in (B) si sostituisca all'ipotesi $\varepsilon(n) \to 0+$ quella più attenuata $0 = \varliminf_{n \to +\infty} \varepsilon(n) < \varlimsup_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = \beta$ (con β arbitrariamente piccolo). Per queste funzioni risulta garantita la parte a destra di (2.3), mentre non più la parte a si-

nistra: anzi, esistono funzioni per le quali è verificata la (B) attenuata nel modo detto e *non vale* la parte a sinistra di (2.3). Infatti, sia $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\{n_h\}$ una successione crescente di numeri interi tale che $n_{h+1} \geqq n_h^{1+\beta}$ $(n_0 > 1)$. Assumiamo

$$a_0 = 1, \qquad a_{n+1} = \begin{cases} a_n(n+1)^{-\alpha} & \text{per } n \neq n_h \\ a_n(n+1)^{-\alpha(1-\beta)} & \text{per } n = n_h . \end{cases}$$

La funzione $F^*(z)$ così costruita soddisfa la condizione (A), per esempio con

$$\varepsilon(n) = 0, \qquad k(n) = \begin{cases} n+1 & \text{per } n_{h-1} \leqq n < n_h/\log n_h \\ n_h + 1 & \text{per } n_h/\log n_h \leqq n < n_h \end{cases}$$

e la condizione analoga alla (B) con $0 = \varliminf_{n \to +\infty} \varepsilon(n) < \varlimsup_{n \to +\infty} \varepsilon(n) = \beta$, in luogo di $\varepsilon(n) \to 0$: basta infatti assumere

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} \beta & \text{per } n \neq n_h \\ 1/n & \text{per } n = n_h . \end{cases}$$

Per la funzione $F^*(z)$ risulta

$$\frac{1}{\varrho} = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_n|}{n \log n} = \alpha > \alpha(1-\beta) = \varliminf_{n \to +\infty} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n}$$

e quindi non vale la parte a sinistra di (2.3).

4) Se la successione $\{|a_n/a_{n+1}|\}$ è monotona non decrescente, la (B) è verificata [p. es. con $\varepsilon(n) = 1/n$]; quindi il Teorema II contiene il teorema di Shah ([2], teorema 2) come caso particolare.

3. - Il caso in cui esistano infiniti coefficienti nulli.

Prendiamo ora in esame il caso in cui risulti $a_n = 0$ per infiniti valori di n.

Diciamo $\{n_h\}$ la successione degli indici n per cui $a_{n_h} \neq 0$. La (1.1) equivale evidentemente a

$$\text{(3.1)} \qquad \frac{1}{\varrho} = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} ;$$

mentre la (1.2) non risulta in questo caso significativa e l'analoga disuguaglianza

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h}$$

non è sempre soddisfatta. Siano infatti $\alpha > 0$, $\mu \geqq \mu' > 0$ arbitrariamente scelti, $n_0 = 2$, $n_{2h+1} = [n_{2h}^{1+\mu}]$, $n_{2(h+1)} = [n_{2h+1}^{1+\mu'}]$, $F^*(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{n_h}/n_h^{\alpha n_h}$.

Poniamo $r_h = (n_{h+1}^{n_{h+1}}/n_h^{n_h})^{\alpha/(n_{h+1}-n_h)}$. Essendo $(r/n_h^{\alpha})^{n_h} \gtrless (r/n_{h+1}^{\alpha})^{n_{h+1}}$ a seconda che sia $r \lessgtr r_h$, per ogni r soddisfacente la limitazione $r_{h-1} \leqq r < r_h (h \geqq h_0$ abbastanza grande), il termine di modulo massimo della serie $F^*(z)$ è quello di indice $\nu(r) = n_h$. Essendo [2]

$$\lambda = \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log \nu(r)}{\log r},$$

per la funzione $F^*(z)$ risulta

$$\lambda = \underline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log n_h}{\alpha \log n_{h+1}} = \frac{1}{\alpha(1+\mu)}$$

e cioè

$$\frac{1}{\lambda} = \alpha(1+\mu) > \alpha = \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h}.$$

Nel caso in cui esistano infiniti coefficienti nulli, è nota per l'ordine inferiore λ la seguente limitazione (J. M. WHITTAKER [4], Teorema 2):

$$\frac{1}{\lambda} \geqq \frac{1}{\varrho} \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log n_{h+1}}{\log n_h} = \underline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} \cdot \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log n_{h+1}}{\log n_h}.$$

Noi stabiliamo qui l'analoga limitazione nel senso opposto, contenuta nel seguente

Teorema III. *Sia* $a_n \neq 0$ *quando e solo quando* $n \in \{n_h\}$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$ *e sia* $\overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log n_{h+1}}{\log n_h} = 1 + \mu < +\infty$; *allora l'ordine inferiore* λ *di* $F(z)$ *soddisfa la limitazione*

$$\frac{1}{\lambda} \leqq (1+\mu) \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h}. \tag{3.3}$$

---

(2) J. M. WHITTAKER [4], Teorema 1.

Osservazioni.

1) Se $n_{h+1} = n_h^{1+o(1)}$, la (3.3) diventa

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} . \tag{3.4}$$

2) Il Teorema III è, in un certo senso, il migliore possibile: infatti per la funzione $F^*(z)$ considerata sopra (in questo n. 3), vale in (3.3) il segno $=$.

Abbiamo osservato nei paragrafi precedenti che, qualora sia $a_n \neq 0$ per $n \geqq n_0$, risulta [vedasi (1.2), (1.6) e (2.2)]:

$$\underline{\lim}_{n \to +\infty} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n} \leqq \frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{\lambda} \leqq \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n} . \tag{3.5}$$

Qualora esistano infiniti coefficienti a_n nulli, sussiste l'analogo

Teorema IV. *Sia $a_n \neq 0$ quando e solo quando $n \in \{ n_h \}$ e inoltre*

$$1 \leqq 1 + \mu' = \underline{\lim}_{h \to +\infty} \frac{\log n_{h+1}}{\log n_h} \leqq \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log n_{h+1}}{\log n_h} = 1 + \mu < +\infty .$$

Allora risulta

$$\frac{1}{1+\mu} \underline{\lim}_{h \to +\infty} \frac{\log |a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h} \leqq \frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{\lambda} \leqq \frac{1+\mu}{1+\mu'} \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h} . \tag{3.6}$$

Osservazioni.

1) Se $n_{h+1} = n_h + 1$ per $h \geqq h_0$, da (3.6) si ottiene (3.5).

2) Se $n_{h+1} = n_h^{(1+\mu)(1+o(1))}$, dall'ultima delle (3.6) si ottiene

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log |a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h} .$$

Il Teorema I vale nella forma seguente:

Se $F(z)$ soddisfa la condizione:

(A′) *Per un $\mu \geqq 0$ e un $n_0 > 1$ è $n_{h+1} = n_h^{(1+\mu)(1+o(1))}$ ed esistono due suc-*

cessioni $\{ k(h) \}$ *e* $\{ \varepsilon(h) \}$ $(h = 0, 1, 2, \ldots)$ *tali che si abbia*

$$n_{k(h)} = n_h^{(1+o(1))}, \qquad \varepsilon(h) \to 0+ \quad \text{per} \quad h \to +\infty,$$

$$| a_{n_{k(h)}} / a_{n_{k(h)+j}} | > | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |^{\{n_{k(h)+j} - n_{k(h)}\}\{1-\varepsilon(h)\}/(n_{h+1}-n_h)}$$

$$(h \geqq h_0; \quad j = 1, 2, \ldots);$$

allora per l'ordine inferiore λ *di* $F(z)$ *vale l'uguaglianza*

$$\frac{1}{\lambda} = \overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h}. \tag{3.7}$$

Tenendo presente (3.3) e (4.1), si ottiene come corollario:

Se $F(z)$ *soddisfa la condizione* (A′) *risulta*

$$\frac{1}{\lambda} = (1 + \mu) \overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log | 1/a_{n_h} |}{n_h \log n_h}.$$

Osservazione.

Se $\mu > 0$, l'ipotesi $n_{k(h)} = n_h^{(1+o(1))}$ equivale a $k(h) = h$ e comporta

$$| a_{n_{h+1}} / a_{n_{h+2}} | > | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |^{(n_{h+2} - n_{h+1})\{1-\varepsilon(h)\}/(n_{h+1}-n_h)}.$$

Il Teorema II vale nella forma seguente:

Se $F(z)$ *soddisfa la condizione:*

(B′) *Per un* $\mu \geqq 0$ *e un* $n_0 > 1$, *è* $n_{h+1} = n_h^{(1+\mu)\{1+o(1)\}}$ *ed esiste una successione* $\{ \varepsilon(h) \}$ *tale che si abbia* $\varepsilon(h) \to 0+$ *per* $h \to +\infty$,

$$|a_{n_k} / a_{n_{k+1}} | > | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |^{(n_{k+1} - n_k)\{1-\varepsilon(h)\}/(n_{h+1}-n_h)}$$

$$(h \geqq h_0; \quad k = h, h+1, h+2, \ldots);$$

allora l'ordine ϱ *e l'ordine inferiore* λ *di* $F(z)$ *soddisfano le uguaglianze*

$$\underline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h} = \frac{1}{\varrho} \leqq \frac{1}{\lambda} = \overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h}. \tag{3.8}$$

4. - **Dimostrazione dei teoremi** III e IV.

4.1. - Dimostrazione del Teorema III.

Basta limitarsi al caso in cui sia $\overline{\lim\limits_{h\to+\infty}} \dfrac{\log|1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} = L < +\infty$. Siano $L'' > L' > L$ arbitrari. Per ogni $h \geqq h_0 = h_0(L')$ risulta

$$\log|a_{n_h}| > -L' n_h \log n_h .$$

Poniamo $r_h = L'' \log n_h$; per ogni r, $r_h \leqq r < r_{h+1}$ si ha

$$\log M(r) \geqq \log|a_{n_h} r^{n_h}| \geqq (L'' - L') n_h \log n_h .$$

Pertanto

$$\lambda = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r} \geqq \underline{\lim}_{h\to+\infty} \frac{(1+o(1))\,\log n_h}{L'' \log n_{n+1}} \geqq \frac{1}{L''(1+\mu)}$$

per ogni $L'' > L$. Segue la tesi.

4.2. - Dimostrazione del Teorema IV.

Sia $\overline{\lim\limits_{h\to+\infty}} \dfrac{\log|a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|}{(n_{h+1} - n_h)\log n_h} = L$; se $L = +\infty$, l'ultima delle (3.6) è ovvia; se $L < +\infty$, per ogni $L' > L$ e per ogni $h \geqq h_0(L')$ risulta

$$\log|1/a_{n_h}| = \sum_{k=h_0}^{k=h-1} \log|a_{n_k}/a_{n_{k+1}}| + \log|1/a_{h_0}| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=h_0}^{k=h-1} L'(n_{k+1} - n_k)\log n_k + \log|1/a_{h_0}| \leqq (1 + o(1))\, L'(n_h - n_{h_0}) \log n_{h-1} ,$$

da cui

$$\overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log|1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} \leqq L' \overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log n_{h-1}}{\log n_h} \leqq \frac{L'}{1+\mu'} \tag{4.1}$$

e quindi, per la (3.3),

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \frac{1+\mu}{1+\mu'}\, L' \quad \text{per ogni } L' > L.$$

Segue l'ultima delle (3.6).

Sia $\varliminf_{h \to +\infty} \dfrac{\log |a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|}{(n_{h+1} - n_h) \log n_h} = l$; se $l = 0$, la prima delle (3.6) è ovvia; se $l > 0$, per ogni l', con $0 < l' < l$, e per ogni coppia di interi h, k, con $h > k \geqq h_0(l')$, risulta

$$\log |1/a_{n_h}| = \sum_{j=k}^{j=h-1} \log |a_{n_j}/a_{n_{j+1}}| + \log |1/a_{n_k}| \geqq \sum_{j=k}^{j=h-1} l' \cdot (n_{j+1} - n_j) \log n_j$$

e quindi

$$\log |1/a_{n_h}| \geqq l' \cdot (n_h - n_k) \log n_k . \tag{4.2}$$

Sia ε arbitrario, $0 < \varepsilon < 1$: nell'intervallo $(n_h^{\varepsilon/(1+\mu)},\ n_h/\log n_h)$ cade almeno un indice n_k; in caso contrario infatti esisterebbero una successione di indici $h_j \to +\infty$ e una successione di indici $k_j \to +\infty$ tali che

$$n_{h_j} \geqq n_{k_j} > n_{h_j}/\log n_{h_j}, \qquad n_{k_{j-1}} < n_{h_j}^{\varepsilon/(1+\mu)}$$

e quindi si avrebbe

$$\log n_{k_{j-1}}/\log n_{k_j} < \{1 + o(1)\}\varepsilon/(1 + \mu) ,$$

assurdo, perchè $\varliminf_{h \to +\infty} \log n_{h-1}/\log n_h = 1/(1 + \mu)$.

Assumiamo allora $k = k(h)$ tale che risulti $n_h^{\varepsilon/(1+\mu)} \leqq n_k \leqq n_h/\log n_h$. Da (4.2) si ottiene

$$\varliminf_{h \to +\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} \geqq l' \frac{\varepsilon}{1 + \mu}$$

per ogni $l' < l$ e per ogni $\varepsilon < 1$. Segue, in forza di (3.1),

$$1/\varrho \geqq l/(1 + \mu)$$

e il Teorema IV risulta dimostrato.

5. - Dimostrazione dei Teoremi I e II.

5.1. – Dimostrazione del Teorema I.

Cominciamo dal caso in cui sia $a_n \neq 0$ per $n \geqq n_0$. Da (1.3) e (1.6) si ha

$$\frac{1}{\lambda} \leqq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n}$$

e pertanto se $\lambda = 0$ il Teorema è ovvia conseguenza di questa disuguaglianza mentre, se $\lambda > 0$, basta dimostrare che risulta anche

$$\frac{1}{\lambda} \geqq \overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log |a_n/a_{n+1}|}{\log n}. \tag{5.1}$$

Poniamo, per semplicità di scrittura, $|a_n/a_{n+1}| = \psi(n)$. La successione $\psi(n)$ non può mantenersi limitata [infatti, da $\psi(n) < K$ per ogni n segue $|a_n| > (1/K)^n \cdot |a_0|$ e quindi $|a_n|^{1/n} > 1/K$, assurdo]. Pertanto risulta $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \psi(n) = +\infty$. Diciamo allora $\{n_h\}$ la successione degli indici pei quali è

$$\psi(n_h) > \psi(n) \quad \text{per ogni} \quad n < n_h .$$

Essendo $\psi(n) \leqq \psi(n_h)$ per $n_h \leqq n < n_{h+1}$, si ha

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\log \psi(n)}{\log n} = \overline{\lim_{h\to+\infty}} \frac{\log \psi(n_h)}{\log n_h}. \tag{5.2}$$

Sia $\nu(r)$ l'indice del termine di modulo massimo della serie $F(z)$; essendo [3]

$$\lambda = \underline{\lim}_{r\to+\infty} \log \nu(r)/\log r,$$

per ogni λ', con $0 < \lambda' < \lambda$, e per ogni $r \geqq r_0(\lambda')$ risulta

$$\log \nu(r) > \lambda' \log r . \tag{5.3}$$

---

(3) Vedasi la annotazione (2).

Sia $r_h = \psi(n_h)^{1-\varepsilon(n_h)}$ e veniamo a valutare $\nu(r_h)$. Per ogni $n > k(n_h)$ risulta, in forza di (A),

$$\left| \frac{a_{k(n_h)}}{a_n} \right| > \psi(n_h)^{\{n-k(n_h)\}\{1-\varepsilon(n_h)\}} = r_h^{n-k(n_h)}$$

e quindi anche

$$| a_{k(n_h)} | \, r_h^{k(n_h)} > | a_n | \, r^n,$$

e pertanto

$$\nu(r_h) \leqq k(n_h) .$$

Da (5.3) si ricava allora

$$\log k(n_h) \geqq \log \nu(r_h) \geqq \lambda' \cdot \left\{ 1 - \varepsilon(n_h) \right\} \log \psi(n_h)$$

e cioè

$$\frac{\log \psi(n_h)}{\log n_h} \leqq \frac{1}{\lambda' \{ 1 - \varepsilon(n_h)\}} \, \frac{\log k(n_h)}{\log n_h} .$$

Essendo $k(n_h) = n_h^{1+o(1)}$ e $\varepsilon(n_h) \to 0$ per $h \to +\infty$, si ottiene allora

$$\overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log \psi(n_h)}{\log n_h} \leqq \frac{1}{\lambda'}$$

per ogni λ', con $0 < \lambda' < \lambda$, e quindi

$$\overline{\lim_{h \to +\infty}} \frac{\log \psi(n_h)}{\log n_h} \leqq \frac{1}{\lambda} .$$

Da (5.2) segue allora la (5.1) e il Teorema I è dimostrato.

Nel caso in cui esistano infiniti coefficienti nulli, la dimostrazione procede in modo del tutto analogo, considerando, in luogo di (1.2) e (1.6) e della condizione (A), rispettivamente, la parte a destra di (3.6) e la condizione (A') e inoltre, in luogo della successione $\psi(n) = | a_n / a_{n+1} |$, la successione $\psi(h) = | a_{n_h} / a_{n_{h+1}} |^{1/(n_{h+1} - n_h)}$.

5.2. – Dimostrazione del Teorema II.

Se $F(z)$ soddisfa la condizione (B), anche (A) risulta soddisfatta; basta quindi dimostrare che risulta

$$\frac{1}{\varrho} = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{\log \psi(n)}{\log n}, \qquad \psi(n) = \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

e quindi, in forza delle (1.1) e (2.1), basta dimostrare

$$\varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log |1/a_n|}{n \log n} \leqq \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log \psi(n)}{\log n}. \tag{5.4}$$

Poniamo $\eta_h = \operatorname*{Max}_{n\geqq h} \varepsilon(n)$; è $\eta_h \to 0$ per $h \to +\infty$ e inoltre, per ogni coppia di interi m, n, con $m > n \geqq h \geqq n_0$, risulta, in forza di (B),

$$\psi(m) > \psi(n)^{1-\eta_h}.$$

Per ogni $n > h$ si ha allora

$$\left\{\begin{aligned} \log |1/a_n| &= \sum_{k=h}^{k=n-1} \log \psi(k) + \log |1/a_h| \leqq \\ &\leqq \{ (n-h-1)/(1-\eta_h) \} \log \psi(n-1) + \log |1/a_h| . \end{aligned}\right. \tag{5.5}$$

Assumiamo $h = h(n) = o(n) \to +\infty$ in modo tale che risulti $\log |1/a_h| / (n \cdot \log n) \to 0$. Da (5.5) si ottiene allora

$$\frac{\log |1/a_n|}{n \log n} \leqq \frac{\log \psi(n-1)}{\log (n-1)} \{1 + o(1)\}$$

per $n \to +\infty$. Segue la (5.4), c.d.d. .

Consideriamo ora il caso in cui esistano infiniti coefficienti nulli. Poichè (B′) implica (A′), basta dimostrare la parte a sinistra di (3.8) e cioè, tenendo conto di (3.1) e della prima delle (3.6), basta dimostrare che è

$$\varlimsup_{h\to+\infty} \frac{\log |1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} \leqq \frac{1}{1+\mu} \varlimsup_{h\to+\infty} \frac{\log \psi(h)}{(n_{h+1}-n_h)\log n_h}, \qquad [\psi(h) = |a_{n_h}/a_{n_{h+1}}|]. \tag{5.6}$$

Posto $\eta_k = \operatorname*{Max}_{h \geqq k} \varepsilon(n_h)$, per ogni coppia di interi j, h, con $h > j \geqq k \geqq h_0$, risulta

$$\psi(h) > \psi(j)^{(n_{h+1}-n_h)(1-\eta_k)/(n_{j+1}-n_j)}$$

e, pertanto, per ogni $h > k$ si ha

$$\log|1/a_{n_h}| = \sum_{j=k}^{j=h-1} \log \psi(j) + \log|1/a_{n_k}| \leqq$$

$$\leqq \sum_{j=k}^{j=h-1} \frac{(n_{j+1}-n_j)\log \psi(h-1)}{(n_h-n_{h-1})(1-\eta_k)} + \log|1/a_{n_k}| \leqq \frac{(n_h-n_k)\log\psi(h-1)}{(n_h-n_{h-1})(1-\eta_k)} + \log|1/a_{n_k}|\,.$$

Assumiamo $k = k(h) \to +\infty$ in modo tale che risulti $n_k = o(n_h)$ e $\log|1/a_{n_k}|/ /n_h \log n_h \to 0$. Per $h \to +\infty$ si ottiene allora (poichè $\eta_k \to 0$)

$$\frac{\log|1/a_{n_h}|}{n_h \log n_h} \leqq \frac{\log\psi(h-1)}{(n_h-n_{h-1})\log n_{h-1}} \, \frac{\log n_{h-1}}{\log n_h}\left\{1+o(1)\right\},$$

da cui, essendo per ipotesi $\log n_h = \{1+o(1)\}(1+\mu)\log n_{h-1}$, segue la (5.6). Il Teorema II è così dimostrato.

6. - Una osservazione sulle funzioni omogenee di massimi limiti e minimi limiti.

Sia $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$, $\varphi(\boldsymbol{x})$ definita nel quadrante $\sum \equiv (x_h > 0;$ $h = 1, 2, \ldots, n)$, omogenea di grado 1 [cioè $\varphi(t\boldsymbol{x}) = t\varphi(\boldsymbol{x})$ $(t > 0)$], monotona non decrescente al crescere di ciascuna delle variabili.

Allora:

1) $\varphi(\boldsymbol{x}) \geqq 0$;

2) $\varphi(\boldsymbol{x})$ è continua in $\sum$;

3) Detto $\boldsymbol{z}$ un qualunque punto della frontiera $\sum^*$ di $\sum$, esiste $\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}} \varphi(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in \sum)$; posto $\varphi(\boldsymbol{z}) = \lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{z}} \varphi(\boldsymbol{x})$, la funzione $\varphi(\boldsymbol{x})$, già definita in $\sum$, risulta prolungata in $\overline{\sum}$ (chiusura di $\sum$) ed è ivi non negativa, continua, omogenea di grado 1, monotona non decrescente al crescere di ciascuna delle variabili.

1) Se fosse $\varphi(\boldsymbol{x}^0) < 0$, per ogni t, con $0 < t < 1$, si avrebbe $\varphi(t\boldsymbol{x}^0) = t\ \varphi(\boldsymbol{x}^0) > \varphi(\boldsymbol{x}^0)$, contro l'ipotesi della monotonia.

2) Denotiamo con $\Delta(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ il rettangolo *chiuso* di vertici opposti $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Fissati $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, si può scegliere il minimo τ tale che $\boldsymbol{y}$ sia contenuto in $\Delta\left[\frac{1}{1+\tau}\boldsymbol{x},\ (1+\tau)\,\boldsymbol{x}\right]$: l'ipotesi sulla monotonia ci dà

$$\varphi\left[\frac{1}{1+\tau}\,\boldsymbol{x}\right] \leqq \varphi(\boldsymbol{y}) \leqq \varphi((1+\tau)\boldsymbol{x});$$

poichè per $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$ risulta $\tau \to 0$ ne segue $\varphi(\boldsymbol{y}) \to \varphi(\boldsymbol{x})$ per $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}$.

3.1) Sia $\boldsymbol{z} \in \sum^*$; almeno una z_h è nulla. Denotiamo con $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})$ il vettore $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z}) \equiv (0, 1, 0, 0, 1, \ldots)$ avente nulle tutte le componenti e_h per le quali $z_h > 0$ e avente uguali a 1 tutte le componenti e_h per le quali $z_h = 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ il vettore $\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})$ appartiene a $\sum$.

Poichè $\varphi(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ ed è monotona, esiste non negativo $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varphi(\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z}))$. Poniamo

$$\varphi(\boldsymbol{z}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})).$$

3.2) $\varphi(\boldsymbol{x})$ è monotona non decrescente in $\overline{\sum}$. Sia infatti $\boldsymbol{z} \in \sum^*$ e $\Delta\boldsymbol{z}$ tale che $\Delta z_h \geqq 0$ $(\eta = 1, \ldots, n)$. Per ogni ε, con $0 < \varepsilon \leqq \operatorname{Min}\limits_{\Delta z_h > 0} \Delta z_h$, risulta, per la monotonia di $\varphi(\boldsymbol{x})$ in $\sum$,

$$\varphi(\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})) \leqq \varphi(\boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z}))\,.$$

Facendo tendere ε a 0 si ricava

$$\varphi(\boldsymbol{z}) \leqq \varphi(\boldsymbol{z} + \Delta\boldsymbol{z})\,.$$

3.3) $\varphi(\boldsymbol{x})$ è omogenea di grado 1 in $\overline{\sum}$. Sia infatti $\boldsymbol{z} \in \sum^*$; essendo $\varphi(\boldsymbol{x})$ omogenea in $\sum$, per ogni $\varepsilon > 0$, $t > 0$ risulta

$$\varphi(t\boldsymbol{z} + t\varepsilon\,\boldsymbol{e}(t\,\boldsymbol{z})) = t\,\varphi(\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(t\,\boldsymbol{z})) = t\ \varphi(\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z}))\,.$$

Facendo tendere ε a 0 si ottiene

$$\varphi(t\,\boldsymbol{z}) = t\ \varphi(\boldsymbol{z})\,.$$

3.4) $\varphi(\boldsymbol{x})$ è continua in $\overline{\sum}$.

Sia $\boldsymbol{z} \in \sum^*$. Sia $\boldsymbol{y} \in \overline{\sum}$ e, qualora sia $\boldsymbol{z} \neq 0$, $\boldsymbol{y}$ soddisfi la condizione $|\ \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\ | < \operatorname{Min}\limits_{z_h > 0} z_h$.

È possibile determinare $\tau > 0$, $\varepsilon > 0$, in modo che $\boldsymbol{y} \in \Delta\left(\frac{1}{1+\tau}\,\boldsymbol{z},\ (1+\tau)\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z})\right)$: per la monotonia di $\varphi(\boldsymbol{x})$ in $\overline{\sum}$ è allora

$$\varphi\left(\frac{1}{1+\tau}\,\boldsymbol{z}\right) \leqq \varphi(\boldsymbol{y}) \leqq \varphi((1+\tau)\boldsymbol{z} + \varepsilon\,\boldsymbol{e}(\boldsymbol{z}))\,.$$

Quando $y \to z$, si può assumere $\varepsilon \to 0$ e $\tau \to 0$. Pertanto per ogni $\tau > 0$ risulta

$$\frac{1}{1+\tau}\varphi(z) = \varphi\left(\frac{1}{1+\tau} z\right) \leqq \varliminf_{y \to z} \varphi(y) \leqq \varlimsup_{y \to z} \varphi(y) \leqq \varphi((1+\tau)z) = (1+\tau)\,\varphi(z)\,.$$

Segue

$$\varphi(y) \to \varphi(z) \text{ per } y \to z, \quad y \in \overline{\sum}\,.$$

Siano $f_0(r)$, $f_1(r)$, ..., $f_k(r)$, $g(r)$ funzioni non negative definite per $r \geqq r_0 > 0$ e poniamo

$$\varliminf_{r \to +\infty} f_h(r)/g(r) = l_h, \qquad \varlimsup_{r \to +\infty} f_h(r)/g(r) = L_h\,, \qquad (h = 0,\, 1, \ldots,\, k).$$

Introduciamo la notazione vettoriale:

$$\boldsymbol{l} \equiv (l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_k), \qquad \boldsymbol{l}_h \equiv (l_1,\, l_2,\, \ldots,\, l_{h-1},\, L_h,\, l_{h+1},\, \ldots,\, l_k),$$

$$\boldsymbol{L} \equiv (L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_k), \qquad \boldsymbol{L}_h \equiv (L_1,\, L_2,\, \ldots,\, L_{h-1},\, l_h,\, L_{h+1},\, \ldots,\, L_k),$$

$$\boldsymbol{f}(r) \equiv (f_1(r),\, f_2(r),\, \ldots,\, f_k(r)), \qquad \boldsymbol{M}(r) \equiv (M_1(r),\, M_2(r),\, \ldots,\, M_k(r))\,.$$

Come applicazione immediata delle nozioni di massimo limite e minimo limite e delle osservazioni precedenti sulle proprietà della funzione $\varphi(\boldsymbol{x})$ si ricava il seguente

Lemma. *Sia $\varphi(\boldsymbol{x})$ una funzione definita in $x_h > 0$ $(h = 1,\, 2,\, \ldots,\, k)$, omogenea di grado 1, monotona non decrescente al crescere di ciascuna delle variabili x_h.*

Da

$$f_0(r) \leqq \{1 + o(1)\}\,\varphi(\boldsymbol{f}(r)) \qquad \text{per } r \to +\infty$$

segue

$$L_0 \leqq \varphi(\boldsymbol{L}), \qquad l_0 \leqq \operatorname*{Min}_{1 \leqq h \leqq k} \varphi(\boldsymbol{L}_h)\,.$$

Da

$$f_0(r) \geqq \{1 + o(1)\}\,\varphi(\boldsymbol{f}(r)) \qquad \text{per } r \to +\infty$$

segue

$$l_0 \geqq \varphi(\boldsymbol{l}), \qquad L_0 \geqq \operatorname*{Max}_{1 \leqq h \leqq k} \varphi(\boldsymbol{l}_h)\,.$$

Queste effermazioni valgono anche nel caso in cui sia $x_h \geqq 0$, *convenendo di assumere, quando una almeno delle componenti* x_h *sia nulla, il valore di* $\varphi(\boldsymbol{x})$ *ottenuto con prolungamento continuo sulla frontiera del campo* $\sum \equiv (x_h > 0;$ $h = 1, 2, \ldots, k)$.

7. - Limitazioni per l'ordine, l'ordine inferiore, il tipo, il tipo inferiore.

Sia $F_h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{h,n} z^n$ $(h = 0, 1, \ldots, k)$ una funzione intera avente ordine ϱ_h e ordine inferiore λ_h; poniamo $M_h(r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} | F_h(z) |$.

Sia $\varrho < +\infty$: denotiamo con τ_h il tipo e con ν_h il tipo inferiore *rispetto all'ordine* ϱ della funzione $F_h(z)$, cioè:

$$\tau_h = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log M_h(r)}{r^\varrho}, \qquad \nu_h = \underline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log M_h(r)}{r^\varrho}, \qquad (h = 0, 1, \ldots, k).$$

Dal Lemma del n. **6** e dai Teoremi I e II si ricavano come corollari i seguenti teoremi, che assegnano limitazioni per ϱ_0, λ_0, τ_0, ν_0 quando elementi collegati con $F_0(z)$ sono posti in relazione con una funzione $\varphi(\boldsymbol{x})$ monotona omogenea di grado 1 del vettore composto con le formazioni analoghe delle $F_h(z)$.

Allo scopo di abbreviare poniamo

$$\boldsymbol{\varrho} \equiv (\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k), \qquad \boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k),$$

$$\boldsymbol{P} \equiv \left(\frac{1}{\varrho_1}, \frac{1}{\varrho_2}, \ldots, \frac{1}{\varrho_k}\right), \qquad \boldsymbol{\Lambda} \equiv \left(\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k}\right),$$

$$\boldsymbol{\tau} \equiv (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k), \qquad \boldsymbol{\nu} \equiv (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k),$$

$$\log | 1/\boldsymbol{a}_n | \equiv (\log | 1/a_{1,n} |, \ldots, \log | 1/a_{k,n} |),$$

$$\log | \boldsymbol{a}_n/\boldsymbol{a}_{n+1} | \equiv (\log | a_{1,n}/a_{1,n+1} |, \ldots, \log | a_{k,n}/a_{k,n+1} |).$$

Allora i teoremi in questione assumono gli enunciati semplici seguenti.

Teorema V. *Sia* $\varrho_h < +\infty$ $(h = 1, \ldots, k)$; *allora da*

$$\log^{(2)} M_0(r) \sim \varphi(\log^{(2)} \boldsymbol{M}(r)) \quad \textit{per } r \to +\infty$$

segue

$$\varphi(\boldsymbol{\lambda}) \leqq \lambda_0 \leqq \varrho_0 \leqq \varphi(\boldsymbol{\varrho}).$$

Teorema VI. *Sia* $\varrho_h > 0$ $(h = 1, \ldots, k)$; *allora da*

$$\log |1/a_{0,n}| \geqq \{1 + o(1)\}\, \varphi(\log |1/\boldsymbol{a}_n|) \quad per\ n \to +\infty$$

segue

$$\frac{1}{\varrho_0} \geqq \varphi\,(\boldsymbol{P})\,.$$

Teorema VII. *Le funzioni* $F_h(z)$ *abbiano ordine* ϱ_h *positivo e soddisfino la condizione* (B) (vedasi n. **2**) *per* $h = 1, \ldots, k$; *allora da*

$$\log |a_{0,n}/a_{0,n+1}| \geqq \{1 + o(1)\}\, \varphi(\log |\boldsymbol{a}_n/\boldsymbol{a}_{n+1}|) \quad per\ n \to +\infty$$

segue

$$\frac{1}{\varrho_0} \geqq \varphi\,(\boldsymbol{P})\,.$$

Teorema VIII. *Le funzioni* $F_h(z)$ *abbiano ordine inferiore* λ_h *positivo e soddisfino la condizione* (A) (vedasi n. **1**) *per* $h = 1, \ldots, k$; *allora da una qualunque delle due condizioni*

$$\log |1/a_{0,n}| \leqq \{1 + o(1)\}\, \varphi(\log |1/\boldsymbol{a}_n|) \quad per\ n \to +\infty\,,$$

$$\log |a_{0,n}/a_{0,n+1}| \leqq \{1 + o(1)\}\, \varphi(\log |\boldsymbol{a}_n/\boldsymbol{a}_{n+1}|) \quad per\ n \to +\infty$$

segue

$$\frac{1}{\lambda_0} \leqq \varphi(\boldsymbol{\Lambda})\,.$$

Teorema IX. *Sia* $\varrho < +\infty$, $\tau_h < +\infty$ *per* $h = 1, \ldots, k$; *allora da*

$$\log M_0(r) \sim \varphi(\log \boldsymbol{M}(r)) \quad per\ r \to +\infty$$

segue

$$\varphi(\boldsymbol{\nu}) \leqq \nu_0 \leqq \tau_0 \leqq \varphi(\boldsymbol{\tau})\,.$$

Osservazione. Assumiamo $\varphi(\boldsymbol{x}) = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, oppure $\varphi(\boldsymbol{x}) = (x_1 \cdot x_2 \ldots x_k)^{1/k}$: dai teoremi enunciati sopra si ottengono, fra l'altro, come casi particolari, i teoremi di S. N. Srivastava ([**3**], section I and II).

Bibliografia.

[1] R. P. BOAS jr., *Entire Functions*, New York 1954.

[2] S. M. SHAH, *On the lower order of integral functions*, Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 1046-1052.

[3] S. N. SRIVASTAVA, *On the order and type of integral functions*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 265-280; Errata (2) 3 (1962), p. 441.

[4] J. M. WHITTAKER, *The lower order of integral functions*, J. London Math. Soc. 8 (1933), 20-27.

Summary.

We study the relations between the so-called «lower order» of an integral function $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *and the sequence* $\{a_n\}$ *of the coefficients. We give a sufficient condition for the lower order to have the smallest value according with a classic inequality; a similar condition is given for the order of* $F(z)$.

We also consider the case when $a_n = 0$ *for infinite values of* n.

Finally, we show that, under the hypothesis of certain relations between the maximum of the modulus (or the coefficients) of two or more entire functions, then analogous relations connect the orders and the types of the same functions.

* * *