Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 107-113

GAETANO CARICATO (*)

Un criterio di stazionarietà per le varietà d'universo a simmetria spaziale sferica. (**)

Introduzione.

Ricordiamo [1] che una varietà V_4 a simmetria spaziale sferica è stazionaria quando si può scegliere in essa un riferimento fisico rigido S^*, adattato al carattere sferico di V_4, tale che ogni sua linea abbia curvatura (geodetica) costante.

Per un siffatto riferimento, adattato al carattere sferico-stazionario di V_4, risultano soddisfatte le condizioni:

$$\tilde{\Omega}_{ij} = 0, \qquad \tilde{K}_{ij} = 0, \qquad P_\Sigma(\gamma^i \nabla_i C_j) = 0 . \tag{1}$$

Stabiliremo ora un procedimento che permette di riconoscere se uno spazio-tempo V_4 a simmetria spaziale sferica è stazionario, e di individuare simultaneamente, in caso affermativo, l'unico riferimento fisico adattato al carattere sferico-stazionario di V_4.

(*) Indirizzo: Viale Valle Padana 66, Roma, Italia.

(**) Ricevuto il 30-XI-1962.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 36 del Comit. Naz. per la Mat. del C.N.R. (1962-63).

(1) G. CARICATO, *Sulla definizione intrinseca di varietà d'universo a simmetria spaziale sferica*, Rend. Mat. e Appl. (5) 22 (1963).

1. - Unicità dell'eventuale riferimento fisico rigido adattato al carattere sferico di V_4.

Ammettiamo dapprima che esista un riferimento fisico rigido S^* adattato al carattere sferico di V_4, e dimostriamo che esso è unico. A tale scopo, scelto in S^* un sistema di coordinate $(r, \theta, \varphi, t) \equiv (x^i)$ adattate alla sfericità di V_4, osserviamo che la rigidità di S^* si traduce, per le singole componenti $\tilde{K}_{\alpha\alpha}$ del tensore di deformazione, nella condizione

$$\tilde{K}_{\alpha\alpha} = \gamma^4 \partial_4 \, g_{\alpha\alpha} = 0 \,. \tag{2}$$

Eseguiamo ora una qualunque trasformazione (localmente invertibile) che porti S^* e le coordinate ivi scelte (x^i) in un altro riferimento $\bar{S}$ e in un sistema di coordinate $(r', \theta', \varphi', t') \equiv (x^{i'})$ ad esso associato, ugualmente adattati al carattere sferico di V_4. Com'è noto, una tale trasformazione è del tipo

$$r' = r'(r, t), \qquad \theta' = \theta, \qquad \varphi' = \varphi, \qquad t' = t'(r, t)\,, \tag{3}$$

ove almeno r' è funzione effettiva di r e t; possiamo anzi supporla decomposta nel prodotto delle altre due

$$\left\{ \begin{array}{llll} r' = r'(r, t), & \theta' = \theta, & \varphi' = \varphi, & t' = t \\ r'' = r', & \theta'' = \theta', & \varphi'' = \varphi', & t'' = t''(r', t')\,. \end{array} \right. \tag{4}$$

Perchè il riferimento $\bar{S}$, pure adattato al carattere sferico di V_4, sia distinto da S^* occorre che nella $(4)_1$ la funzione r' dipenda effettivamente da entrambe le variabili r e t, e soddisfi la condizione

$$r'(0, t) = 0\,. \tag{5}$$

Quanto alla trasformazione $(4)_2$, essa non cambia il riferimento fisico; ma perchè il sistema di coordinate $(r'', \theta'', \varphi'', t'')$ legato ad $\bar{S}$ sia tempo-ortogonale, e quindi adattato al carattere sferico di V_4, occorre e basta che la funzione $t''(r', t')$ sia scelta tra le soluzioni dell'equazione [2] alle derivate parziali

$$\frac{\tilde{\partial} t''}{\partial r'} \equiv \frac{\partial t''}{\partial r'} - \frac{g_{1'4'}}{g_{4'4'}} \cdot \frac{\partial t''}{\partial t'} = 0\,, \tag{6}$$

---

[2] Le funzioni $g_{1'4'}$ e $g_{4'4'}$ che intervengono nella (6) sono da intendere espresse nelle coordinate, non adattate al carattere sferico di V_4, ottenute mediante la trasformazione $(4)_1$.

mentre le ovvie limitazioni $g_{1''1''} > 0$, $g_{4''4''} < 0$ si traducono nell'ulteriore condizione

$$\left[\frac{\partial r'}{\partial r}\right]^2 > -\frac{g_{11}}{g_{44}}\left[\frac{\partial r'}{\partial t}\right]^2 . \tag{7}$$

Nelle nuove coordinate $(r'', \theta'', \varphi'', t'')$ associate ad $\overline{S}$, cui si perviene mediante le (4) [soggette alle condizioni (5), (6), (7)], le componenti $g_{\alpha''\beta''}$ del tensore fondamentale di V_4 assumono la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} g_{1''1''} = g_{11}\left[\dfrac{\partial r}{\partial r''}\right]^2 + g_{44}\left[\dfrac{\partial t}{\partial r''}\right]^2, \qquad g_{2''2''} = g_{2''2''}[r(r'', t'')] , \\[2ex] g_{3''3''} = g_{3''3''}[r(r'', t'')] , \qquad g_{\alpha''\beta''} = 0 \qquad \text{per } \alpha'' \neq \beta'' . \end{array}\right. \tag{8}$$

Poichè $g_{2''2''}$ e $g_{3''3''}$ risultano funzioni effettive sia di r'' sia di t'', nessuna trasformazione interna (invertibile) del tipo (³)

$$\bar{r} = \bar{r}(r''), \qquad \bar{\theta} = \theta'', \qquad \bar{\varphi} = \varphi'', \qquad \bar{t} = \bar{t}\,(t'') \tag{9}$$

può permettere l'eliminazione simultanea della coordinata temporale in tutte le $g_{\alpha''\alpha''}$. Perciò il tensore di deformazione $\widetilde{K}_{\alpha''\beta''}$ relativo al riferimento $\overline{S}$ non è nullo, e il riferimento stesso non è rigido.

Resta pertanto provata l'unicità di un eventuale riferimento rigido adattato al carattere sferico di V_4.

2. - Coordinate di curvatura. Unicità del riferimento fisico che ammette coordinate di curvatura.

Sappiamo già che, comunque si scelga in V_4 un riferimento fisico S e un sistema di coordinate associato, entrambi adattati al carattere sferico di V_4, la metrica è del tipo:

$$ds^2 = M(r,\, t)\, dr^2 + R^2(r,\, t)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - N(r,\, t) c^2\, dt^2 , \tag{10}$$

con $M(r,\, t) > 0$, $N(r,\, t) > 0$.

(³) Si ricorda [cfr. Nota cit. in (¹), n. 3] che le trasformazioni di tipo (9) sono le uniche trasformazioni interne che consentono alle nuove variabili di conservare il carattere di coordinate adattate alla sfericità di V_4.

A partire da un determinato riferimento adattato S e dalla forma (10), pensiamo ora di eseguire la trasformazione

$$r' = R(r,\ t), \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi, \quad t' = t'(r,\ t) \equiv \zeta[R(r,\ t),\ t]\,, \tag{11}$$

avendo indicato con $\zeta(R,\ t)$ una qualunque soluzione dell'equazione a derivate parziali [cfr. (6)]

$$\frac{\tilde{\partial}\zeta}{\partial R} = 0\,. \tag{12}$$

Otteniamo così un nuovo riferimento $\sum$ ed un sistema associato di coordinate $(r',\ \theta',\ \varphi',\ t')$, adattati alla sfericità di V_4, che dànno al ds^2 la forma

$$ds^2 = a(r',\ t')dr'^2 + r'^2(d\theta'^2 + \sin^2\theta' d\varphi'^2) - b(r',\ t')c^2dt'^2\,. \tag{13}$$

La coordinata r' che compare nella (13) rappresenta il « raggio intrinseco » delle « sfere » di equazioni $t' = \text{cost.}$, $r' = \text{cost.}$; la funzione $1/r'^2$ dà quindi la curvatura gaussiana di tali « sfere ». Per questo motivo le coordinate adattate che fanno assumere alla metrica di V_4 la forma (13) sono denominate « coordinate di curvatura ». Esse risultano individuate a meno di un cambiamento della coordinata temporale, potendosi scegliere la funzione $\zeta(R,\ t)$ fra le soluzioni dell'equazione (12).

Se si ripensa al procedimento seguito per ottenere il riferimento $\sum$, può sorgere il dubbio che, partendo da riferimenti S diversi, adattati alla sfericità di V_4, si possano ottenere diversi riferimenti fisici, ugualmente adattati, in ognuno dei quali la metrica di V_4 possa assumere la forma (13).

In realtà di riferimenti $\sum$, in cui sussistano coordinate capaci di dare al ds^2 la forma (13) (coordinate di curvatura), non ne esiste che uno.

Partiamo infatti dal riferimento $\sum$ già ottenuto, e dalla (13), che riscriviamo sopprimendo gli apici,

$$ds^2 = a(r,\ t)\,dr^2 + r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) - b(r,\ t)c^2\,dt^2\,, \tag{14}$$

ed eseguiamo una generica trasformazione invertibile

$$r' = r'(r,\ t), \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi, \quad t' = t'(r,\ t)\,, \tag{15}$$

che porti a un nuovo riferimento fisico $\sum'$ e a un sistema associato di coordinate $(r',\ \theta',\ \varphi',\ t')$ ugualmente adattati [cfr. (4), (5), (6), (7)]. In tali coordinate la componente $g_{2'2'}$ del tensore fondamentale di V_4 assume la forma

$$g_{2'2'} = g_{22} = r^2(r', t'), \tag{16}$$

essendo la funzione $r(r', t')$ desunta dalle (15).

Ovviamente nessuna trasformazione [cfr. (9) e annotazione (³)] del gruppo

$$r'' = r''(r'), \qquad \theta'' = \theta', \qquad \varphi'' = \varphi', \qquad t'' = t''(t')$$

può permettere di ottenere $g_{2''2''} = r^2[r'(r''), t'(t'')] = r''^2$, data la dipendenza effettiva di r da t'.

Risulta così dimostrata l'unicità del riferimento $\sum$ che ammette coordinate di curvatura.

3. - Universo spazialmente sferico e stazionario: identificazione dell'unico riferimento adattato al carattere sferico-stazionario con il riferimento Σ delle coordinate di curvatura.

È immediato verificare che *se in una varietà V_4 a simmetria spaziale sferica esiste un riferimento fisico rigido S^* adattato al carattere sferico della varietà stessa, esso coincide con il rife imento $\sum$ individuato dalle coordinate di curvatura.*

Ammessa infatti l'esistenza di un tale riferimento S^*, comunque si scelga in esso un sistema di coordinate adattate al carattere sferico di V_4, la metrica è del tipo

$$ds^2 = M(r)\, dr^2 + R^2(r)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) - N(r, t)c^2\, dt^2 .$$

Basta allora eseguire il semplice cambiamento (interno) $r' = R(r)$ per associare al riferimento S^* un sistema di coordinate di curvatura. L'identità dei due riferimenti S^* e $\sum$ è così verificata.

Ormai è chiaro il procedimento che porta, entro uno spazio-tempo V_4 a simmetria spaziale sferica, all'unico eventuale riferimento rigido adattato al carattere sferico di V_4: scelto a piacere un riferimento fisico S adattato al carattere sferico di V_4, e in esso un sistema di coordinate ugualmente adattate, il ds^2 si esprime nella forma (10); eseguiamo allora, mediante la trasformazione (11), il passaggio a coordinate di curvatura e al riferimento $\sum$ da esse individuato. Se, dopo tale trasformazione, la componente $g_{1'1'}$ del tensore metrico di V_4 è indipendente dalla variabile temporale, il tensore di deformazione $\widetilde{K}_{ij}$ associato a $\sum$ è identicamente nullo, e il nuovo riferimento ottenuto viene ad essere l'*unico riferimento rigido adattato* al carattere sferico di V_4.

Ammettiamo ora che nella varietà V_4 a simmetria spaziale sferica esista un riferimento rigido S^* adattato al carattere sferico della varietà stessa. Per accertarci se essa è stazionaria non resta che verificare se la componente g_{44} del tensore fondamentale, espressa in coordinate di curvatura, risulta indipendente dalla variabile temporale. In caso affermativo è evidentemente soddisfatta anche la condizione $(1)_3$, e quindi ciascuna linea del riferimento $S^* \equiv \sum$ viene ad avere curvatura costante, data, in qualunque sistema di coordinate adattate al carattere sferico-stazionario di V_4 (e non soltanto in coordinate di curvatura), dalla formula $\sqrt{C_i C^i} = \dfrac{1}{2g_{11}(r)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \log(-g_{44})$.

4. - Un'osservazione sulla condizione di rigidità per riferimenti fisici adattati al carattere sferico di una V_4.

Tenendo presenti le proiezioni naturali del tensore contratto di curvatura [4] d'un generico spazio-tempo V_4, si può mostrare che la condizione di rigidità di un riferimento fisico, $\tilde{K}_{ij} = 0$, quando lo spazio-tempo V_4 ha simmetria spaziale sferica, e il riferimento fisico è adattato a tale carattere, equivale alla seguente:

$$P_{\Sigma\Theta}(R_{jm}) = 0 . \tag{17}$$

Si ha infatti, in generale,

$$P_{\Sigma\Theta}(R_{jm}) = \gamma_m \left[\frac{1}{2} \tilde{\nabla}^*_j \tilde{K}^i_i - \frac{1}{2} \tilde{\nabla}^*_i(\tilde{K}^i_j + \tilde{\Omega}^i_j) - C_i \tilde{\Omega}^i_j\right], \tag{18}$$

e la necessità della (17) è immediata, poichè, come è noto, per un riferimento adattato alla sfericità di V_4 il tensore vortice spaziale $\tilde{\Omega}_{ij}$ è identicamente nullo.

Viceversa, se si ammette che esiste un riferimento fisico, adattato al carattere sferico di V_4, per il quale sia verificata la (17), tenendo conto della (18) si ha l'equazione:

$$\tilde{\nabla}^*_j \tilde{K}^i_i - \tilde{\nabla}^*_i \tilde{K}^i_j = 0 . \tag{19}$$

D'altra parte sappiamo già che se in V_4 esiste un riferimento fisico rigido adattato alla sfericità di V_4, esso è individuato dalle coordinate di curvatura.

---

[4] I. Cattaneo-Gasparini, C. R. Acad. Sci. Paris **252** (1961), 3722-3724.

Espiimiamo perciò le (19) in tali coordinate; avendosi

$$\widetilde{K}_{11} = \gamma^4 \partial_4 g_{11}, \qquad \widetilde{K}_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{per } \alpha \neq 1,\ \beta \neq 1\,,$$

e quindi:

$$\widetilde{K}_1^1 = g^{11} \widetilde{K}_{11}\,, \qquad \widetilde{K}_\alpha^\beta = 0 \qquad \text{per } \alpha \neq 1,\ \beta \neq 1\,,$$

dalla (19) si trae, per $j = 1$,

$$\text{(20)} \qquad \widetilde{\nabla}_1^* \widetilde{K}_1^1 - \widetilde{\nabla}_\alpha^* \widetilde{K}_1^\alpha = -\left[\begin{Bmatrix} 2 \\ 2\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 3 \\ 3\ 1 \end{Bmatrix}\right] \widetilde{K}_1^1 = -\frac{1}{2} \widetilde{K}_1^1 \partial_1 \log (g_{22} \cdot g_{33}) = 0\,.$$

Poichè risulta

$$g_{22} = r^2, \qquad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \qquad \partial_1 \log (g_{22} \cdot g_{33}) = \frac{\partial}{\partial r} \log (r^4 \sin^2 \theta) = \frac{4}{r} \neq 0\,,$$

dalla (20) segue necessariamente $\widetilde{K}_1^1 = 0$.

Pertanto, nel caso di un riferimento fisico adattato al carattere sferico di V_4, v'è perfetta equivalenza tra la (17) e la condizione $\widetilde{K}_{ij} = 0$.

Sommario

Considerato uno spazio-tempo V_4 a simmetria spaziale sferica, si dimostra che se nella classe dei riferimenti fisici adattati al suo carattere sferico v'è un riferimento rigido, esso è necessariamente unico. Nella stessa classe si dimostra l'esistenza e l'unicità del riferimento fisico che ammette coordinate di curvatura. Si verifica quindi che se esiste un riferimento fisico rigido adattato al carattere sferico di V_4, esso coincide col riferimento individuato dalle coordinate di curvatura. Il risultato indica la via per riconoscere l'eventuale stazionarietà di V_4.

* * *