Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 41 - 56

DELFINA ROUX (*)

Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. II. - Ordine ϱ diverso dal reciproco di un intero naturale. (**)

1. - Due Lemmi preliminari.

Consideriamo la superficie riemanniana $L(z)$ della funzione $\log z$: l'insieme dei punti al finito distinti dall'origine di tale Riemanniana è in corrispondenza biunivoca con l'insieme delle coppie di numeri reali:

$$(r,\ \theta) \qquad (0 < r < +\infty,\ \ -\infty < \theta < +\infty).$$

Nel seguito ci sarà utile considerare una operazione di « addizione », in un certo modo condizionata, dei punti di $L(z)$, cioè delle coppie $(r,\ \theta)$ (1).

Diremo *somma* di due punti $(r_1,\ \theta_1)$, $(r_2,\ \theta_2)$, il punto $(r,\ \theta) = (r_1,\ \theta_1) \dot{+} (r_2,\ \theta_2)$ individuato con la seguente legge.

Poniamo $z_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$, $z_2 = r_2 \exp(i\theta_2)$. Allora:

a) quando $|\theta_1 - \theta_2| \leqq \pi$ e $|z_1 + z_2| \neq 0$, è $r = |z_1 + z_2|$, $\theta \equiv \arg(z_1 + z_2) \pmod{2\pi}$ e $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$ se $\theta_1 \leqq \theta_2$, $\theta_2 \leqq \theta \leqq \theta_1$ se $\theta_2 \leqq \theta_1$;

b) quando $|\theta_1 - \theta_2| > \pi$ oppure $|z_1 + z_2| = 0$, la somma *non esiste*.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « F. Enriques », Università (via C. Saldini 50), Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1962-63.

Ricevuto il 6-V-1963.

(1) Questa operazione è già stata introdotta in altra occasione: vedasi D. ROUX [5], pag. 152.

Osserviamo che la somma $(r_1, \theta_1) \dot{+} (r_2, \theta_2)$, quando esiste, è univocamente determinata ed è commutativa. La somma $\dot{+}$ non è invece associativa, perchè $[(r_1, \theta_1) \dot{+} (r_2, \theta_2)] \dot{+} (r_3, \theta_3)$ può esistere senza che esista $(r_1, \theta_1) \dot{+} [(r_2, \theta_2) \dot{+} (r_3, \theta_3)]$; nel caso però che entrambe queste somme esistano, esse sono uguali.

Veniamo ora a due Lemmi riguardanti la composizione per somma di due sistemi di punti di $L(z)$.

Lemma 1. *Siano:*

$$A: \quad a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}; \quad a_h \neq a_k \text{ se } h \neq k,$$

$$B: \quad b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}; \quad b_h \neq b_k \text{ se } h \neq k,$$

due sistemi di punti di modulo non nullo sulla superficie riemanniana $L(z)$ di $\log z$. Consideriamo il sistema C dei punti:

$$C: \quad a_h, b_k, c_{h,k} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n_1; \ k = 1, 2, \ldots, n_2),$$

dove $c_{h,k} = a_h \dot{+} b_k$ per tutte le coppie (h, k) per le quali c_{hk} esiste.

I punti di modulo massimo compaiono nel sistema C una volta sola.

Osservazione.

Il risultato del Lemma continua evidentemente a sussistere quando i sistemi A e B contengono infiniti punti, se essi soddisfano le seguenti condizioni:

a) ogni settore di $L(z)$ di ampiezza finita contenga un numero finito di punti di A e di B;

b) esista $\varrho > 0$ tale che A e B siano invarianti per rotazioni di ampiezza $2\pi\varrho$ della superficie $L(z)$ attorno all'origine.

Dimostrazione.

1) I punti a_h (e analogamente i punti b_k), se sono fra quelli di modulo massimo, compaiono nel sistema C *una volta sola*. Infatti, abbia a_1 modulo massimo: non può essere $a_1 = b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n_2)$ perchè in tal caso esisterebbe in C $c_{1,k} = a_1 \dot{+} b_k$ con $|c_{1,k}| > |a_1|$; non può essere $a_1 = c_{1,k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_2)$ perchè questo comporterebbe $|b_k| = 0$; non può infine essere $a_1 = c_{h,k}$ $(h \neq 1, k \neq 1)$ perchè in tal caso sarebbe $\arg a_1 = \arg c_{h,k}$ e quindi $|\arg a_1 - \arg b_k| \leqq \pi$

e nel sistema C esisterebbero anche $a_1 \dotplus b_k$ e a_h; consideriamo i quattro *numeri complessi* a_1, a_h, 0, b_k; poichè risulta $a_h + b_k = a_1 + 0$, uno almeno dei due numeri $a_h + 0 = a_h$, $a_1 + b_k$ ha modulo maggiore di $|a_1| = |a_h \dotplus b_k|$ (2).

2) Se $c_{1,1}$ ha modulo massimo, non può essere $c_{1,1} = c_{1,h}$ $(h \neq 1)$: infatti da $c_{1,1} = c_{1,h}$, essendo per ipotesi $|b_1| \neq 0$, $|b_h| \neq 0$, segue $|\arg b_1 - \arg b_h| = 2\pi$, $\arg a_1 = \arg b_1 \mp \pi = \arg b_h \pm \pi$ e pertanto risulta necessariamente $|a_1| > |c_{1,1}|$. Analogamente si prova che non può essere $c_{1,1} = c_{h,1}$ $(h \neq 1)$.

3) Se $c_{1,1}$ ha modulo massimo, non può essere $c_{1,1} = c_{h,k}$ $(h \neq 1,\ k \neq 1)$. Infatti, sia ad esempio $c_{1,1} = c_{2,2}$: proveremo che esiste in C un punto di modulo superiore a $c_{1,1}$. Possiamo sempre supporre che per i tre punti a_1, $c_{1,1}$, b_1 di $L(z)$ valga la limitazione $\arg a_1 \leqq \arg c_{1,1} \leqq \arg b_1$.

Consideriamo i due *numeri complessi* $a_1 + b_2$ e $a_2 + b_1$; almeno uno di essi supera in modulo $c_{1,1}$ (2). Sia per esempio $|a_1 + b_2| > |c_{1,1}|$. Distinguiamo i tre casi:

a) $|\arg a_1 - \arg b_2| \leqq \pi$;

b) $|\arg a_1 - \arg b_2| > \pi$, $\arg c_{1,1} - \arg a_1 \geqq \pi/2$;

c) $|\arg a_1 - \arg b_2| > \pi$, $\arg c_{1,1} - \arg a_1 < \pi/2$.

Nel caso a) esiste in C $c_{1,2}$ e risulta $|c_{1,2}| > |c_{1,1}|$.

Nel caso b) è necessariamente $|b_1| > |c_{1,1}|$ (vedi figura 1) e $b_1 \in C$, contro l'ipotesi che $c_{1,1}$ abbia modulo massimo.

Nel caso c) debbono essere contemporaneamente soddisfatte le disuguaglianze:

$$\arg c_{1,1} - \pi \leqq \arg b_2 \leqq \arg c_{1,1} + \pi, \quad |\arg b_2 - \arg a_1| > \pi,$$

e questo può verificarsi soltanto se:

$$\arg a_1 + \pi < \arg b_2 \leqq \arg c_{1,1} + \pi.$$

---

(2) Vedasi D. Roux [3], Lemma 1.

In questo caso a_2 appartiene necessariamente all'angolo di vertice $c_{1,1}$ avente come lati le due semirette $(\arg z = \arg c_{1,1},\ |z| > |c_{1,1}|)$ e $(\mathrm{Re}\, z > \mathrm{Re}\, c_{1,1},\ \mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, c_{1,1})$ (vedi figura 2); di conseguenza $|a_2| > |c_{1,1}|$ e $a_2 \in C$ contro l'ipotesi che c_{11} abbia modulo massimo.

Dalle considerazioni di cui ai punti 1), 2), 3), (tenendo conto che l'ordina-

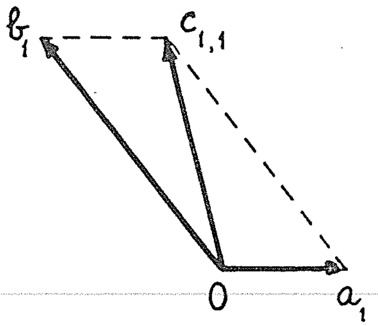

Fig. 1.

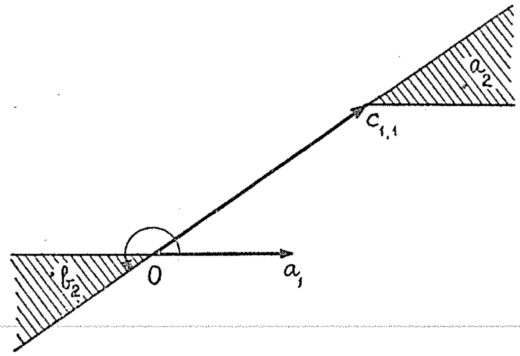

Fig. 2.

mento degli a_h e b_k è arbitrario), segue che un punto di C avente modulo massimo non può comparire in C più di una volta e il Lemma 1 è così dimostrato.

Lemma 2. *Siano*:

$$A: \quad a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots;\ a_h \neq a_k \text{ se } h \neq k,$$

$$B: \quad b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_m;\ b_h \neq b_k \text{ se } h \neq k,$$

due sistemi di punti di modulo non nullo sulla superficie riemanniana di $\log z$ *e il sistema* A *soddisfi le condizioni seguenti*:

a) *ogni settore di* $L(z)$ *di ampiezza finita contenga un numero finito di punti di* A;

b) A *sia invariante per rotazioni di ampiezza* 2π *della superficie* $L(z)$ *attorno all'origine.*

Consideriamo il sistema C *dei punti*:

$$C: \quad a_h,\ c_{h,k}\ (h = 1,\ 2,\ 3,\ \dots;\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

dove $c_{h,k} = a_h \dotplus b_k$ *per tutte le coppie* $(h,\ k)$ *per le quali* $c_{h,k}$ *esiste.*

I punti di modulo massimo compaiono nel sistema C una volta sola, ad eccezione del caso in cui esistano due indici r, s tali che $\arg b_s = \arg a_r + \pi$, $|b_s| > |a_r|$ *e* $|c_{r,s}|$ *sia massimo. In questo caso esiste un indice t per il quale risulta* $c_{r,s} = c_{t,s}$, *ed è* $|a_t| = |a_r|$, $\arg a_t = \arg a_r + 2\pi$.

Osservazione.

Il risultato del Lemma continua evidentemente a sussistere quando il sistema B contiene infiniti punti, se risultano soddisfatte le seguenti condizioni:

a) ogni settore di $L(z)$ di ampiezza finita contenga un numero finito di punti del sistema B;

b) esista $\varrho > 0$ *razionale* tale che il sistema B risulti invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi\varrho$ della superficie $L(z)$ attorno all'origine.

Dimostrazione.

Ragionando come nella dimostrazione del Lemma 1 (punti 1) e 2)), si prova che, se un punto a_h è fra quelli di modulo massimo, esso compare nel sistema C una volta sola e che, se $c_{h,h}$ è fra i punti di modulo massimo, non può essere $c_{h,k} = c_{h,s}$ con $k \neq s$. D'altra parte, se $c_{h,k}$ ha modulo massimo, non può neanche esere $c_{h,k} = c_{r,s}$, con $r \neq h$ e $s \neq k$; infatti, in tal caso, uno almeno dei due moduli $|a_h + b_s|$, $|a_r + b_k|$ sarebbe maggiore di $|c_{h,k}|$: sia per esempio $|a_h + b_s| > |c_{h,k}|$ e diciamo a_{h_1} un punto di A della forma $a_h \exp(2l\pi i)$ (l intero) per il quale risulti $|\arg b_s - \arg a_{h_1}| \leqq \pi$; nel sistema C è presente $c_{h_1,s}$ e risulta $|c_{h_1,s}| = |a_h + b_s| > |c_{h,k}|$.

Rimane infine da esaminare la possibilità che per un punto $c_{h,k}$ di modulo massimo si abbia $c_{h,k} = c_{r,k}$ con $r \neq h$: è facile vedere che il verificarsi di questa circostanza (essendo per ipotesi $|a_h|$ e $|a_r|$ non nulli) comporta che sia $|a_h| = |a_r|$, $|\arg a_h - \arg a_r| = 2\pi$, $\arg b_k = \arg a_h \mp \pi$, $= \arg a_r \pm \pi$ e questo è il caso eccezionale segnalato nell'enunciato.

Il Lemma 2 è così dimostrato.

2. - Le funzioni quasi intere.

Richiamo qui alcune nozioni e proprietà riguardanti le funzioni quasi intere, dovute ad A. Pflüger (3), che utilizzeremo nel seguito.

Sia $L(z)$ la superficie riemanniana di $\log z$; diciamo $L_V(z)$ l'insieme dei punti di $L(z)$ pei quali risulta $|z| > V > 0$ e diciamo «settore» di $L_V(z)$ il campo $|z| > V$, $\vartheta_1 < \arg z < \vartheta_2$. Sia inoltre $L'_V(z)$ l'insieme complementare di $L_V(z)$.

---

(3) Gli argomenti richiamati in questo paragrafo sono desunti da A. Pflüger [2].

a) *Le funzioni quasi regolari all'infinito, la loro superficie spirale e la funzione supporto.*

Una funzione $g(z)$ per la quale esista $V > 0$ tale che $g(z)$ sia regolare e settorialmente limitata [4] su $L_V(z)$ viene detta « quasi regolare all'infinito » e l'estremo inferiore H dei valori V pei quali $g(z)$ è regolare su L_V vien detto « raggio di olomorfismo » di $g(z)$.

Sia $g(z)$ quasi regolare all'infinito e non costante: la superficie riemanniana di $g(z)$ contiene L_H come campo parziale. Il più esteso campo concavo sulla Riemanniana di $g(z)$ che contiene L_H come campo parziale e sul quale $g(z)$ è ovunque regolare vien detto « superficie spirale » W di $g(z)$.

Per ogni anomalia φ consideriamo i semipiani appartenenti a W e aventi come origine una retta perpendicolare ad $\arg z = \varphi$: sia $k(\varphi)$ l'estremo inferiore delle distanze da 0 di queste rette; la funzione $k(\varphi)$ vien detta « funzione supporto » della superficie spirale W di $g(z)$. La funzione $k(\varphi)$ soddisfa ovviamente per ogni φ la disuguaglianza $k(\varphi) \leqslant H$ e può anche assumere valori negativi.

La retta perpendicolare ad $\arg z = \varphi$ avente distanza $k(\varphi)$ dall'origine vien detta « retta supporto » della superficie spirale W. La funzione $g(z)$ deve necessariamente avere sopra ogni retta supporto della sua superficie spirale almeno un punto singolare.

b) *Funzioni quasi intere; ordine e tipo settoriale.*

Una funzione $G(z)$ regolare e settorialmente limitata su L'_V per ogni $V > 0$, viene detta « funzione quasi intera ».

Se esistono valori finiti ν pei quali $|\, G(z) \,| \exp(-\, |\, z \,|^{\nu})$ sia settorialmente limitata su $L(z)$, il loro estremo inferiore $\varrho = \varrho(G)$ vien detto « ordine » di $G(z)$; altrimenti si dice che $G(z)$ ha « ordine infinito ».

La funzione quasi intera $G(z)$ abbia ordine finito positivo ϱ: se esistono valori finiti ν pei quali $|\, G \,| \exp(-\, \nu \,|\, z \,|^{\varrho})$ sia settorialmente limitata su $L(z)$, il loro estremo inferiore $\chi = \chi(G)$ vien detto « tipo settoriale » di $G(z)$; altrimenti si dice che $G(z)$ ha « tipo infinito ».

Secondochè $\chi = 0$, $0 < \chi < +\infty$, $\chi = +\infty$, diremo che $G(z)$ è di tipo minimo, di tipo medio, di tipo massimo.

c) *Indicatrice di accrescimento.*

Sia $G(z)$ una funzione quasi intera di ordine finito ϱ e tipo settoriale finito χ: la funzione

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to +\infty}} \frac{\log |\, G(r \exp(i\varphi)) \,|}{r^{\varrho}}, \qquad -\infty < \varphi < +\infty,$$

vien detta « indicatrice di accrescimento » di $G(z)$. Ricordiamo qui le seguenti proprietà di $h(\varphi)$.

1) Se $\chi = 0$, $h(\varphi) \equiv 0$.

2) Se $0 < \chi < +\infty$, $h(\varphi)$ è continua per $-\infty < \varphi < +\infty$; inoltre

$$\operatorname{Sup} h(\varphi) = \chi.$$

---

[4] Cioè limitata in ogni settore di $L_V(z)$.

Le (eventuali) orientazioni φ^* per le quali $h(\varphi^*) = \chi$ vengono chiamate « orientazioni di più forte accrescimento » di $G(z)$.

d) *Le funzioni quasi intere di tipo esponenziale.*

Le funzioni quasi intere $G(z)$ di ordine non superiore a 1 e, se di ordine 1, di tipo finito, vengono chiamate « funzioni quasi intere di tipo esponenziale ». In particolare, se $\varrho(G) = 1$ e $\chi(G) = \chi < + \infty$, $G(z)$ vien detta « di tipo esponenziale (settoriale) χ »; se $\varrho(G) < 1$, $G(z)$ vien detta « di tipo esponenziale 0 ».

La funzione

$$h(\varphi) = \overline{\lim_{r \to + \infty}} \frac{\log | G(re^{i\varphi}) |}{r}, \quad - \infty < \varphi < + \infty ,$$

viene chiamata « indicatrice di accrescimento esponenziale ».

e) *Trasformazione di* L a p l a c e - B o r e l.

Sia $G(z)$ una funzione quasi intera di tipo esponenziale χ. L'integrale (lungo il raggio $\varphi = \arg z$):

$$\int_0^\infty e^{-zt} G(t)\, dt \qquad (\arg\, t = \varphi)$$

converge per ogni φ e per ogni z tale che $| z | > \chi$ e definisce una funzione $g(z)$ quasi regolare all'infinito, avente raggio di olomorfismo χ e tale che $z \cdot g(z)$risulta settorialmente limitata su L_V (per V abbastanza grande). La funzione $g(z)$ viene chiamata « trasformata di LAPLACE-BOREL » di $G(z)$. Scriveremo:

$$g(z) = \mathscr{B}(G) .$$

Fra la funzione supporto $k(\varphi)$ di $g(z) = \mathscr{B}(G)$ e l'indicatrice di accrescimento $h(\varphi)$ di $G(z)$ sussiste la relazione seguente:

$$h(\varphi) = k(- \varphi) .$$

Inoltre, $g(z)$ fornisce le eventuali orientazioni di più forte accrescimento di $G(z)$ poichè:

« $\arg z = \varphi^*$ è orientazione di più forte accrescimento di $G(z)$ se e soltanto se il raggio $\arg z = - \varphi^*$ incontra il contorno della superficie L_χ in un punto singolare per $g(z) = \mathscr{B}(G)$ ».

f) *Le serie di* D i r i c h l e t.

Sia $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, $\lambda_n > 0$, $\lambda_n \uparrow + \infty$, una serie di DIRICHLET convergente in tutto il piano complesso s. La sostituzione $e^{-s} = z$ trasforma $f(s)$ nella serie di potenze generalizzate $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ convergente su tutta la superficie logaritmica $L(z)$: $G(z)$ è una funzione quasi intera.

Per le funzioni quasi intere definite mediante serie di DIRICHLET convergenti su tutta la superficie $L(z)$ viene introdotta la nozione di « tipo (esponenziale) di convergenza » al modo seguente.

Consideriamo la successione:

$$\Big| \sum_{n=0}^{n=N} a_n z^{\lambda_n} \Big| \cdot e^{-\nu|z|} \qquad (N = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Possono verificarsi questi tre casi. O non esiste alcun $\nu > 0$ per il quale la successione considerata è su $L(z)$ settorialmente uniformemente limitata, o questo accade per qualunque $\nu > 0$ oppure esiste un numero γ tale che se $\nu > \gamma$ la successione considerata è settorialmente uniformemente limitata su $L(z)$, mentre se $\nu < \gamma$ questo fatto non si verifica. A seconda che si verifichi il primo, il secondo, oppure il terzo di questi tre casi, diremo che $G(z)$ è di « tipo esponenziale di convergenza infinito, zero, γ ». Fra il tipo esponenziale settoriale χ ed il tipo esponenziale di convergenza γ sussiste la relazione $\chi \leqslant \gamma$.

Inoltre, se la serie $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}$ converge in ogni punto di $L(z)$ ed ha tipo esponenziale di convergenza $\gamma < +\infty$, allora risulta:

$$\mathscr{B}(G) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\lambda_n + 1)/z^{\lambda_n+1},$$

e la serie a secondo membro ha raggio di convergenza γ e viceversa.

3. - Le orientazioni di più forte accrescimento del prodotto di due funzioni della classe $\mathcal{C}_\varrho^*$ $(1/\varrho$ non intero) [5].

Teorema I. *Sia ϱ diverso dal reciproco di un intero naturale e siano:*

$$F_1(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*, \qquad F_1(z) \in [\varrho,\ \tau_1], \qquad \mathscr{T}(F_1) \equiv \theta_1 \qquad (0 \leqq \theta_1 < 2\pi);$$

$$F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*, \qquad F_2(z) \in [\varrho,\ \tau_2], \qquad \mathscr{T}(F_2) \equiv \theta_2 \qquad (0 \leqq \theta_2 < 2\pi).$$

---

[5] I simboli utilizzati in questo paragrafo e in quello successivo sono stati introdotti in una precedente Nota (D. ROUX [4]). Per comodità del lettore, ricordiamo qui il significato dei simboli e delle locuzioni usati negli enunciati.

Con $[\varrho,\ \tau]$ denotiamo la classe delle funzioni intere di ordine finito ϱ e di tipo τ.

Con $\mathscr{T}(F)$ denotiamo l'insieme (mod. 2π) delle orientazioni di più forte accrescimento

Gli (eventuali) punti della forma:

$$(\tau_1,\ \varrho(\theta_1+2r\pi)) \dotplus (\tau_2,\ \varrho(\theta_2+2s\pi)) \qquad (r,\ s \text{ interi}),$$

appartenenti al settore $0 \leqq \arg z < 2\pi\varrho$ *della Riemanniana* $L(z)$ *di* $\log z$, *sono in numero finito: denotiamoli con* $(\tau(r,\ s),\ \varrho\theta(r,\ s))$. *Allora, per la funzione* $F(z) = F_1(z)\cdot F_2(z)$ *risulta:*

$$\operatorname{ord} F = \varrho;$$

$$\tau(F) = \max_{r,s}\,(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau(r,\ s));$$

$\mathcal{S}(F)$ *è l'insieme delle orientazioni* θ_1, θ_2, $\theta(r,\ s)$ *per le quali, rispettivamente, i numeri corrispondenti* τ_1, τ_2, $\tau(r,\ s)$ *risultano uguali a* τ.

Osservazioni.

1) Contrariamente a quanto accade nel caso $\varrho = 1/q$ (q intero positivo), $F(z)$ può anche non appartenere a $\mathcal{C}_\varrho^*$ e neopure a $\mathcal{C}_\varrho$.

2) Anche se ϱ è intero, risulta necessariamente $\operatorname{ord} F = \varrho$.

---

della funzione intera $F(z)$.

Sia $\varrho > 0$ e sia $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una funzione intera avente ordine non superiore a ϱ e, se di ordine ϱ, avente tipo finito e associamo ad $F(z)$ la serie di potenze in $1/z$:

$$f(z) = f(z;\ \varrho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n\sigma+1)/z^{n+1},\ (\sigma = 1/\varrho).$$

Diciamo $\mathcal{C}_\varrho^0$ la classe delle funzioni intere $F(z)$ tali che la loro associata $f(z)$ abbia sulla sfera di Neumann $z = 0$ come unico punto singolare.

Diciamo $\mathcal{C}_\varrho^*$ la classe delle funzioni intere $F(z)$ tali che la loro associata $f(z)$ abbia sulla sfera di Neumann un solo punto singolare. Se $F(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*$ e non $\in \mathcal{C}_\varrho^0$, essa ha una sola orientazione di più forte accrescimento (mod. 2π).

Diciamo $\mathcal{C}_\varrho$ la classe delle funzioni intere $F(z)$ rappresentabili come somma di un numero finito di funzioni della classe $\mathcal{C}_\varrho^*$.

Se $F(z) \in \mathcal{C}_\varrho$, è possibile rappresentare $F(z)$ nel modo seguente: $F(z) = F_0(z) + F_1(z) + \ldots + F_m(z)$, $(m \geqslant 0)$, dove $F_0(z)$ (eventualmente mancante) $\in \mathcal{C}_\varrho^0$, $F_k(z)$ $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m) \in \mathcal{C}_\varrho^*$ e non $\in \mathcal{C}_\varrho^0$ ed inoltre le funzioni $F_k(z)$ hanno a due a due o tipo diverso oppure, se hanno tipo uguale, hanno diversa la orientazione di più forte accrescimento. Questa rappresentazione viene chiamata « rappresentazione tipica » di $F(z)$. Se in essa compare il termine $F_0(z)$, si conviene di associare alla funzione $F_0(z)$ il suo tipo in $\mathcal{C}_\varrho^0$, cioè il tipo 0, e una orientazione di più forte accrescimento arbitraria.

3) Il teorema vale anche se una delle due funzioni $F_1(z)$, $F_2(z)$ ha ordine inferiore a ϱ, purchè in questo caso si consideri il suo tipo in $\mathcal{C}_\varrho^0$, cioè il tipo 0, e una orientazione di più forte accrescimento arbitraria.

Dimostrazione.

Poniamo $z = t^\sigma$, $(\sigma = 1/\varrho)$; questa sostituzione associa alla funzione $F_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} z^n$ $(j = 1,2)$ la funzione quasi intera di tipo esponenziale $G_j(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} t^{n\sigma}$ avente tipo esponenziale settoriale e tipo esponenziale di convergenza ambedue uguali a τ_j ed associa alla trasformata di LAPLACE-BOREL $\mathcal{B}_\varrho(F_j)$ di $F_j(z)$ la serie $t^{1-\sigma} \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(j)} \Gamma(n\sigma + 1)/t^{n\sigma+1} = t^{1-\sigma} \mathcal{B}(G_j)$, dove $\mathcal{B}(G_j)$ è la trasformata di LAPLACE-BOREL di $G_j(t)$.

Essendo $F_j(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*$, la funzione $\mathcal{B}_\varrho(F_j)$ ha, nel piano z, l'unico punto singolare $\tau_j^\sigma \exp(-i\theta_j)$ e pertanto sulla funzione $\mathcal{B}(G_j)$ possiamo fare le seguenti osservazioni:

a) $\mathcal{B}(G_j)$ è invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi\varrho$ della superficie riemanniana $L(t)$ di $\log t$ attorno all'origine;

b) $\mathcal{B}(G_j)$ possiede un punto di diramazione (algebroide o trascendente a seconda che ϱ sia razionale o irrazionale) in $t = 0$ e $t = \infty$; se ϱ è razionale e $F_j(z) \in \mathcal{C}_\varrho^0$, può accadere eccezionalmente che $G_j(t)$ sia una funzione intera di t: in tal caso $\mathcal{B}(G_j)$ è una funzione uniforme ed ha in $t = 0$ un polo o una singolarità essenziale;

c) $\mathcal{B}(G_j)$ è ovunque regolare su $L(t)$ ad eccezione (qualora sia $\tau \neq 0$) dei punti $(\tau_j, -\varrho(\theta_j + 2r\pi))$, che sono poli o singolarità essenziali.

Poniamo $G(t) = G_1(t) \cdot G_2(t)$. Risulta $\mathcal{B}(G) = \mathcal{B}(G_1) \oplus \mathcal{B}(G_2)$, cioè $\mathcal{B}(G)$ è la serie composta secondo HURWITZ-PINCHERLE delle trasformate di LAPLACE-BOREL di $G_1(t)$ e di $G_2(t)$.

Andiamo a ricercare i punti singolari di $\mathcal{B}(G)$ su $L(t)$ che hanno modulo massimo: poichè $\mathcal{B}(G)$ è anch'essa invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi\varrho$ della superficie $L(t)$ attorno all'origine, possiamo limitarci a considerare il settore di $L(t)$ $0 \leqq \arg t < 2\pi\varrho$.

Consideriamo gli (eventuali) punti di $L(t)$ della forma $(\tau_1, -\varrho(\theta_1 + 2r\pi)) \dotplus (\tau_2, -\varrho(\theta_2 + 2s\pi))$: è evidente che, qualora esistano punti di questo tipo, soltanto un numero finito di essi appartiene al settore $0 \leqq \arg t < 2\pi\varrho$: se ve ne sono, chiamiamoli $t_{r,s}$ e poniamo $t_{r,s} = (\tau(r,s), -\varrho\theta(r,s))$. Sia poi $t_j = (\tau_j, -\varrho\theta_j)$ $(j = 1, 2)$.

Poniamo $\tau = \max_{r,s}(\tau_1, \tau_2, \tau(r, s))$. I punti t, $|t| \geqq \tau$, $0 \leqq \arg t < 2\pi\varrho$ diversi da t_1, t_2, $t_{r,s}$, non possono essere singolari per $\mathscr{B}(G)$ (6); pertanto, se $\tau = 0$, $\mathscr{B}(G)$ è regolare in ogni punto di $L(t)$; se $\tau > 0$, esaminiamo il comportamento di $\mathscr{B}(G)$ in quelli, fra i punti t_1, t_2, $t_{r,s}$, che hanno modulo massimo τ.

Se un punto t_{r^*,s^*} ha modulo massimo, esso, per il Lemma 1, compare nel sistema C dei punti:

$$(\tau_1, \ -\varrho(\theta_1 + 2r\pi)), \qquad (\tau_2, \ -\varrho(\theta_2 + 2s\pi)) ,$$

$$(\tau_1, \ -\varrho(\theta_1 + 2r\pi)) \dotplus (\tau_2, \ -\varrho(\theta_2 + 2s\pi)) ,$$

una volta sola e quindi t_{r^*,s^*} è ottenibile *in un sol modo* a partire dai punti singolari di $\mathscr{B}(G_1)$ e $\mathscr{B}(G_2)$ e precisamente lo si ottiene da un punto singolare al più essenziale sia di $\mathscr{B}(G_1)$ sia di $\mathscr{B}(G_2)$. Ma allora t_{r^*,s^*} è necessariamente singolare (ed è al più singolare essenziale) per $\mathscr{B}(G)$ (7).

Se t_1 ha modulo massimo, risulta evidentemente $t_1 \neq t_2$, $t_1 \neq t_{r,s}$ e inoltre deve essere $|\varrho\theta_1 - \varrho(\theta_2 + 2s\pi)| > \pi/2$ per ogni s (altrimenti esisterebbe s^* tale che $|t_{1,s^*}| > |t_1|$). Possiamo scrivere:

$$\mathscr{B}(G_1) = g_1(t) + p_1(t) ,$$

dove $p_1(t)$ è lo sviluppo nell'intorno dell'infinito della parte caratteristica di $\mathscr{B}(G_1)$ in $t = t_1$ e $g_1(t)$ è regolare su $L(t)$ in $t = t_1$. Per la distributività della composizione di HURWITZ-PINCHERLE avremo:

$$\mathscr{B}(G) = g_1(t) \oplus \mathscr{B}(G_2) + p_1(t) \oplus \mathscr{B}(G_2) .$$

Il primo termine a secondo membro è regolare in $t = t_1$(6) su $L(t)$ e pertanto questo punto sarà singolare per $\mathscr{B}(G)$ se e soltanto se è singolare per la funzione:

$$s_1(t) = p_1(t) \oplus \mathscr{B}(G_2) .$$

Sia r la retta su $L(t)$ condotta per t_1 perpendicolarmente al raggio $\arg t = \arg t_1$: la funzione $s_1(t)$ non può possedere sulla retta r alcun punto singolare diverso da t_1 e nel semipiano (aperto) di $L(t)$ avente r come origine non può avere alcun altro punto singolare (6).

(6) D. ROUX, [5], Teorema, pag. 156.
(7) D. ROUX, [5], Corollario, pag. 157.

Pertanto sarà provato che t_1 è singolare per $s_1(t)$ se dimostreremo che r è una retta supporto della superficie spirale attinente a $s_1(t)$ e cioè che risulta

$$k_{s_1}(\arg t_1) = k_{s_1}(-\varrho\theta_1) = \tau_1 \qquad [k_{s_1}(\theta) \text{ funzione supporto}].$$

Diciamo $S_1(t)$ e $P_1(t)$, rispettivamente, le funzioni quasi intere di tipo esponenziale per le quali è $\mathscr{B}(S_1) = s_1(t)$ e $\mathscr{B}(P_1) = p_1(t)$: $P_1(t)$ è una funzione intera di $t \in \mathcal{C}_1^*$ il cui diagramma indicatore si riduce al punto $\tau_1 \exp(-i\varrho\theta_1)$ *del piano complesso* t e pertanto:

$$h_{P_1}(\theta) = \tau_1 \cos(\theta - \varrho\theta_1) \qquad \text{per ogni } \theta\,.$$

Inoltre, il fatto che il diagramma indicatore di $P_1(t)$ sia ridotto a un punto comporta che (8):

$$h_{S_1}(\theta) = h_{P_1}(\theta) + h_{G_2}(\theta)\,.$$

Essendo, come abbiamo già osservato, $|\varrho\theta_1 - \varrho(\theta_2 + 2s\pi)| > \pi/2$, risulta $h_{G_2}(\varrho\theta_1) = 0$; di conseguenza:

$$h_{S_1}(\varrho\theta_1) = \tau_1 \cos(\varrho\theta_1 - \varrho\theta_1) = \tau_1\,,$$

e quindi, essendo $h_{S_1}(\theta) = k_{s_1}(-\theta)$, risulta

$$k_{s_1}(-\varrho\theta_1) = \tau_1\,,$$

e questo prova che la retta r è retta supporto per la superficie spirale attinente a $s_1(t)$. Ne segue che t_1 è necessariamente singolare per $s_1(t)$ e quindi anche per $\mathscr{B}(G)$.

Nello stesso modo si dimostra che, se il punto t_2 ha modulo massimo, esso è necessariamente singolare per $\mathscr{B}(G)$.

Resta così provato che quelli fra i punti t_1, t_2, $t_{r,s}$ che hanno modulo massimo τ sono necessariamente singolari per $\mathscr{B}(G)$ (ma non necessariamente poli o singolarità essenziali (9)). Di conseguenza $G(t)$ ha tipo τ e, se $\tau > 0$, $h_G(\theta) = \tau$

(8) R. P. Boas jr., [1], teorema (10.4.2), pag. 191: questo teorema è ivi dimostrato nell'ipotesi che $G_2(t)$ sia una funzione intera, ma è facile vedere che la dimostrazione è valida anche nel caso in esame.

(9) I punti t_1, t_2 possono anche essere punti di diramazione: un esempio di questo tipo si ha considerando la seguente composizione:

$$\frac{1}{z^{1/2}} \oplus \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)} z^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3/2}{n} z^{-n-1} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-3/2},$$

ha in $z = 1$ un punto di diramazione.

se e soltanto se θ è congruo (mod. $2\pi\varrho$) alle orientazioni $\varrho\theta_1$, $\varrho\theta_2$, $\varrho\theta(r,\, s)$ per le quali, rispettivamente, i numeri corrispondenti τ_1, τ_2, $\tau\,(r,\, s)$ sono uguali a τ.

Ma $G(t)$ è la funzione corrispondente a $F(z)$ nella sostituzione $t = z^{\varrho}$. Allora, essendo $\tau(G) = \tau(F)$ e $h_G(\varrho\theta) = h_F(\theta)$, ne segue il teorema.

4. - Le orientazioni di più forte accrescimento del prodotto di due funzioni intere della classe $\mathcal{C}_\varrho$ ($1/\varrho$ non intero).

Teorema II. *Sia ϱ diverso dal reciproco di un intero naturale; siano $F_1(z)$, $F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho$ e nessuna di esse sia invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi/\varrho$ del piano complesso z attorno all'origine; il tipo e l'orientazione di più forte accrescimento dei termini della rappresentazione tipica di $F_1(z)$, $F_2(z)$ siano rispettivamente:*

$$\tau_{1,h}, \qquad \theta_{1,h}\ (0 \leqq \theta_{1,h} < 2\pi), \quad h = 0,\, 1,\, \ldots,\, n_1;$$

$$\tau_{2,k}, \qquad \theta_{2,k}\ (0 \leqq \theta_{2,k} < 2\pi), \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n_2\ \text{(10)}.$$

Gli (eventuali) punti della forma:

$$(\tau_{1,h},\ \varrho(\theta_{1,h} + 2r\pi)) \dotplus (\tau_{2,k},\ \varrho(\theta_{2,k} + 2s\pi)),$$

$$(h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_1;\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_2;\ r,\ s\ \textit{interi}),$$

appartenenti al settore $0 \leqq \arg z < 2\pi\varrho$ della Riemanniana $L(z)$ di $\log z$ sono in numero finito: denotiamoli con $(\tau(h,\, r;\, k,\, s),\ \varrho\theta(h,\, r;\, k,\, s))$.

Allora, per la funzione $F(z) = F_1(z).\ F_2(z)$ risulta:

$$\operatorname{ord} F = \varrho;$$

$$\tau(F) = \max_{h,r,k,s}\,(\tau_{1,h},\ \tau_{2,k},\ \tau(h,\, r;\, k,\, s));$$

$\mathcal{G}(F)$ è l'insieme delle orientazioni $\theta_{1,h}$, $\theta_{2,h}$, $\theta(h,\, r;\, k,\, s)$ per le quali rispettivamente i numeri corrispondenti $\tau_{1h,}$, $\tau_{2,k}$, $\tau(h,\, r;\, k,\, s)$ risultano uguali a τ.

Nota. *Il teorema vale anche se una delle due funzioni, per esempio $F_1(z)$, è invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi/\varrho$ del piano complesso z attorno all'origine. In questo caso* (che può verificarsi solamente se ϱ è razionale), *qualora nella*

(10) O anche $h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_1$, $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n_2)$, qualora nella rappresentazione tipica di $F_1(z)$, $(F_2(z))$, manchi il termine della classe $\mathcal{C}_\varrho^0$.

rappresentazione tipica di $F_1(z)$ *manchi il termine della classe* $\mathcal{C}_\varrho^0$, *nelle espressioni di* $\tau(F)$ *e* $\vartheta(F)$ *si devono tralasciare* $\tau_{2,k}$ *e* $\theta_{2,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n_2)$.

Osservazioni.

1) $F(z)$ può non appartenere a $\mathcal{C}_\varrho$.

2) Anche se ϱ è intero, risulta necessariamente $\operatorname{ord} F = \varrho$.

3) Se entrambe le funzioni $F_1(z)$, $F_2(z)$ sono invarianti per rotazioni di ampiezza $2\pi/\varrho$ del piano z attorno all'origine, la sostituzione $z = t^\sigma$ $(\sigma = 1/\varrho)$ trasforma $F_1(z)$, $F_2(z)$ in due funzioni intere della classe $\mathcal{C}_1$. Il comportamento della funzione $F(z)$ si ricava allora come immediata conseguenza dei teoremi sul prodotto di due funzioni della classe $\mathcal{C}_1$ (D. ROUX [4], Teoremi I e II).

Dimostrazione.

Poniamo $z = t^\sigma$ $(\sigma = 1/\varrho)$: alla funzione intera $F_j(z)$ $(j = 1, 2)$ corrisponde in tale trasformazione una funzione quasi intera di tipo esponenziale $G_j(t)$ che è funzione intera di t se e soltanto se $F_j(z)$ è invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi/\varrho$ del piano z attorno all'origine: escludiamo per il momento che si verifichi questa circostanza, che prenderemo in esame in seguito. Allora sulla funzione $\mathscr{B}(G_j)$ possiamo fare le seguenti osservazioni.

a) $\mathscr{B}(G_j)$ è invariante per rotazioni di ampiezza $2\pi\varrho$ della Riemanniana $L(t)$ di $\log t$ attorno all'origine;

b) $\mathscr{B}(G_j)$ ha un punto di diramazione (algebroide, se ϱ è razionale, trascendente se ϱ è irrazionale) in $t = 0$ e $t = \infty$;

c) su $L(t)$, $\mathscr{B}(G_j)$ ha dei poli o delle singolarità essenziali nei punti $(\tau_{j,h}, -\varrho(\theta_{j,h} + 2r\pi))$, $(h = 1, 2, \ldots, n_j$, r intero) ed è regolare in tutti gli altri punti al finito di $L(t)$.

Consideriamo il sistema C dei punti:

$$(\tau_{1\,h},\ -\varrho(\theta_{1,h} + 2r\pi)), \qquad (\tau_{2,k},\ -\varrho(\theta_{2,k} + 2s\pi)),$$

$$(\tau_{1,h},\ -\varrho(\theta_{1,h} + 2r\pi)) \dotplus (\theta_{2,k},\ -\varrho\quad_{2,}\ + 2s\pi)),$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n_1;\ \ k = 1, 2, \ldots, n_2;\ r, s \text{ interi}).$$

I punti del sistema C di modulo massimo c mpaiono in C *una volta sola* (infatti se o $n_1 = 0$ o $n_2 = 0$ l'affermazione è ovvia; se $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, è una conseguenza del Lemma 1). Ragionando allora in modo analogo alla dimostrazione del Teorema I, si dimostra che, se τ è il massimo modulo dei punti del sistema C, la serie $\mathscr{B}(G) = \mathscr{B}(G_1) \oplus \mathscr{B}(G_2)$ non ha su $L(t)$ alcun punto singolare di modulo superiore a τ. Inoltre, fra i punti di modulo τ, risultano singolari per $\mathscr{B}(G)$ tutti e soli i punti del sistema C che hanno modulo τ.

Risultano così individuati il tipo e le orientazioni di più forte accrescimento della funzione $G(t) = G_1(t)\cdot G_2(t)$. Tenendo presente che $G(t)$ è la funzione corrispondente a $F(z)$ nella sostituzione $t = z^\varrho$ si perviene così al Teorema II.

Veniamo ora a considerare il caso segnalato nella Nota in cui una (e una sola) delle funzioni $F_1(z)$, $F_2(z)$, per esempio $F_1(z)$, sia invariante per rotazioni del piano z attorno all'origine di ampiezza $2\pi/\varrho$. In tal caso $G_1(t)$ è funzione intera di t ed ha *nel piano complesso* t dei poli o delle singolarità essenziali nei punti $\tau_{1,h} \exp(-i\varrho\theta_{1,h})$ $(h = 1, 2, \ldots, n_1)$ e soltanto in essi. Inoltre, qualora nella rappresentazione tipica di $F_1(z)$ sia presente il termine della classe $\mathscr{C}_\varrho^0$, $G_1(t)$ ha anche un punto singolare al più essenziale nell'origine.

Se questa ultima circostanza si verifica, nessun cambiamento va apportato alla dimostrazione precedente e pertanto si perviene al Teorema II, che è valido anche in questo caso senza alcuna modificazione.

Resta da esaminare il caso in cui $G_1(t)$ sia intera e, nella rappresentazione tipica di $F_1(z)$, manchi il termine della classe $\mathscr{C}_\varrho^0$: allora $\mathscr{B}(G_1)$ è regolare in $t = 0$.

In questo caso, il sistema C dei punti da prendersi in considerazione nella ricerca delle singolarità di modulo massimo di $\mathscr{B}(G)$ è costituito solamente dai punti:

$$(\tau_{1,h},\ -\varrho(\theta_{1,h} + 2r\pi)), \qquad (\tau_{1,h},\ -\varrho(\theta_{1,h} + 2r\pi)) \dotplus (\tau_{2,k},\ -\varrho(\theta_{2,k} + 2s\pi)),$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n_1;\ k = 1, 2, \ldots, n_2;\ r,\ s \text{ interi}).$$

Essendo in questo caso necessariamente ϱ razionale, le condizioni del Lemma 2 risultano soddisfatte e quindi, se γ è un punto di C di modulo massimo, si verifica necessariamente una delle circostanze seguenti:

a) γ compare in C *una volta sola*; allora, ragionando nel solito modo, si prova che γ è un punto singolare per $\mathscr{B}(G)$;

b) γ compare in C *due volte*: ciò avviene quando esistono su $L(t)$ un punto α, $|\alpha| > 0$, singolare per $\mathscr{B}(G_1)$ e un punto β singolare per $\mathscr{B}(G_2)$ tali che si abbia: $|\beta| > |\alpha|$, $\arg\beta - \arg\alpha = \pi$, $\beta \dotplus \alpha = \gamma$. In questo caso infatti, posto $\alpha_1 = (|\alpha|, \arg\alpha + \pi)$, anche α_1 risulta singolare per $\mathscr{B}(G_1)$ e perciò $\alpha_1 \in C$, $\alpha_1 \dotplus \beta \in C$ e $\alpha_1 \dotplus \beta = \gamma$.

Applicando il metodo della separazione delle singolarità e tenendo presente che la funzione $\mathscr{B}(G_1)$ è una funzione *uniforme* di t, è facile vedere che, nonostante questa sovrapposizione, il punto γ risulta singolare per $\mathscr{B}(G)$.

Si conclude che tutti i punti del sistema C di modulo massimo sono singolari per $\mathscr{B}(G)$ e si perviene allora nel solito modo al Teorema II con la modificazione segnalata nella Nota.

Bibliografia.

[1] R. P. Boas jr., *Entire Functions*, New York 1954.

[2] A. Pflüger, *Über eine Interpretation gewisser Konvergenz-und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen*, Comment. Math. Helv. **8** (1935-36), 3-43.

[3] D. Roux, *Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi e applicazione alle funzioni analitiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **17** (1962), 48-53.

[4] D. Roux, *Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. I. - Ordine $\varrho = 1/q$ (q intero positivo)*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 295-308.

[5] D. Roux, *Sulla composizione secondo Hurwitz-Pincherle di due serie di potenze generalizzate*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **62** (1963), 149-168.

Summary.

In this Note we are concerned with the study (begun in a previous paper) of the directions of strongest growth of the product of entire functions belonging to certain classes. These functions are characterized by their Laplace-Borel transform properties.

In this research we have made use of the theory (due to Pflüger) of the quasi-intere functions and of a theorem about the Hurwitz-Pincherle composition theory we have previously expounded.

* * *