

ALDO BELLENI MORANTE (*)

Influenza della temperatura sulla diffusione dei neutroni nei reattori nucleari omogenei. (**)

1. - Introduzione.

Di notevole importanza pratica sono gli effetti delle variazioni di temperatura nei reattori nucleari: in generale tali variazioni influenzano il valore di un determinato numero di grandezze caratteristiche in modo tale da aumentare la sicurezza di funzionamento dei reattori stessi ([1], pag. 339; [2], pag. 482) ⁽¹⁾. Si può cioè affermare che, se lo stato di funzionamento di un reattore (inizialmente stazionario) viene portato in condizioni non stazionarie, l'effetto della corrispondente variazione di temperatura è di riportare il sistema nelle condizioni iniziali. Come esempio possiamo citare il reattore omogeneo a neutroni termici HRE del laboratorio di Oak Ridge ([3], pag. 827), oppure il reattore a neutroni veloci di Los Alamos [4]: in tutti e due i casi i fenomeni relativi alle variazioni di temperatura contribuiscono in maniera notevole alla stabilità di funzionamento.

In quanto segue ci proponiamo di studiare gli effetti delle variazioni di temperatura sulla densità di neutroni termici in un reattore omogeneo il cui volume V non dipende dalla temperatura a causa di opportune particolarità costruttive. Vedremo come è possibile, trasformando convenientemente le

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Ulisse Dini », Viale Morgagni 67^a, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 22-I-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca N. 7 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1960-1961.

⁽¹⁾ I numeri in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

equazioni alle derivate parziali cui obbediscono densità neutronica e temperatura, ricavare la temperatura e la densità medie in funzione del tempo. Il metodo che useremo è diverso da quello tradizionale, che considera il reattore come un tutto che interagisce con l'ambiente esterno per mezzo di un sistema di raffreddamento ([2], pag. 603), e permette di ricondursi allo studio di una equazione del tipo: $\Delta \bar{N}_1(P, t_1) = \partial \bar{N}_1 / \partial t_1$, ove t_1 è una variabile funzione di t convenientemente scelta, $\bar{N}_1(P, t_1)$ essendo legata in modo semplice alla densità neutronica $N(P, t)$.

Consideriamo dunque un reattore omogeneo di volume V (indipendente dalla temperatura), limitato da una superficie generalmente regolare Σ ; detta $N(P, t) = N(x, y, z, t)$ la densità di neutroni termici, vale la seguente equazione alle derivate parziali ([1], pag. 101);

$$(1) \quad v \Delta N(P, t) - \frac{S}{D} v N(P, t) + Q(P, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Nella (1) $Q(P, t)$ è il termine « sorgente di neutroni termici » che proviene dal rallentamento dei neutroni veloci di fissione, v è la velocità media dei neutroni termici e D ed S sono rispettivamente il coefficiente di diffusione e la sezione macroscopica di assorbimento relativi a neutroni termici.

Avendo indicato con \bar{T} la temperatura media del reattore, è possibile mostrare che, in condizioni di equilibrio termico, vale: $v = \text{costante} \sqrt{\bar{T}}$; anche S e, in misura molto minore, D dipendono da \bar{T} , tramite v .

Supponiamo che il reattore funzioni in condizioni molto prossime a quelle stazionarie: in tal caso indicato con $N_s(P)$ la densità stazionaria di neutroni termici, possiamo supporre che $|N(P, t) - N_s(P)| \ll N_s(P)$ (condizione di quasi-stazionarietà).

Nelle ipotesi specificate è lecito esprimere v , S e D in funzione di \bar{T} come se il sistema fosse in equilibrio termico. Più precisamente la $\frac{d}{dt} \bar{T}(t)$ è molto minore della rapidità con cui le velocità dei neutroni termici assumono una distribuzione maxwelliana relativa alla temperatura $\bar{T}(t)$:

$$dn = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \beta^{3/2} e^{-\beta v^2} v^3 dv \quad ([2], \text{ pag. } 210)$$

(dn è il numero di neutroni con velocità il cui modulo è compreso tra v e $v + dv$, $\beta = M/2K\bar{T}$, M essendo la massa del neutrone e K la costante di BOLTZMANN), a partire da uno stato in cui essi non sono in equilibrio termico con l'ambiente ([5], pag. 386).

In conclusione dunque, dato che alcuni coefficienti della (1) dipendono da $\bar{T}(t)$, è necessario studiare la funzione $T(P, t)$, temperatura assoluta (in °K) per ogni $P \in V$.

Acceniamo al fatto che anche il termine $Q(P, t)$ dipende da \bar{T} , come nel seguito metteremo in evidenza.

2. - La temperatura media.

La temperatura $T(P, t)$ soddisfa la seguente equazione alle derivate parziali [6]:

$$(2) \quad \mu \Delta T(P, t) + A(P, t) = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{per } P \in V \text{ e } t > 0.$$

Nella (2) μ è il coefficiente di diffusione del calore nel materiale di cui è costruito il reattore ed $A(P, t)$ rappresenta la distribuzione di sorgenti di energia termica dovute alle fissioni.

Alle (2) va aggiunta la condizione iniziale:

$$(3) \quad T(P, 0) = T_s(P) \quad \text{per } P \in V,$$

ove $T_s(P)$ è la distribuzione stazionaria di temperatura nel reattore.

Per quanto riguarda la condizione sulla superficie Σ (di normale esterna \mathbf{n}) supponiamo che valga ([6], pag. 17):

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad } T(P, t) = -g_s(P) \quad \text{per } P \in \Sigma,$$

ove $g_s(P)$ è una funzione positiva, di cui fra breve diremo.

Riunendo la (2) e la (3) e tenendo presente che vale $A(P, t) = m(vS)N(P, t)$, ove $m = m' S_f/S$, S_f essendo la sezione macroscopica di fissione, m' una costante di valore opportuno, il rapporto S_f/S essendo sensibilmente indipendente da \bar{T} ([3], pag. 641) ⁽²⁾, si ottiene il sistema:

$$(4) \quad \begin{cases} \mu \Delta T(P, t) + mv_0 S_0 N(P, t) = \frac{\partial T}{\partial t} & \text{per } P \in V \text{ e } t > 0 \\ T(P, 0) = T_s(P) & \text{per } P \in V \\ \mathbf{n} \cdot \text{grad } T(P, t) = -g_s(P) & \text{per } P \in \Sigma \text{ e } t > 0. \end{cases}$$

⁽²⁾ Come fra poco mostreremo, vale $v(\bar{T})S(\bar{T}) = v_0 S_0 = \text{costante}$.

Integrando la prima delle (4) nel volume V , dividendo per V ed applicando il lemma di GREEN (supposto lecito lo scambio degli operatori $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\int \dots dV$) si ha:

$$(5) \quad \frac{\mu}{V} \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \text{grad } T \, d\Sigma + mv_0 S_0 \bar{N}(t) = \frac{d}{dt} \bar{T}(t),$$

ove:

$$\bar{N}(t) = \frac{1}{V} \int_V N(P, t) \, dV, \quad \bar{T}(t) = \frac{1}{V} \int_V T(P, t) \, dV.$$

Dalla (5), facendo uso dell'ultima delle (4), si ricava:

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \bar{T}(t) = mv_0 S_0 \bar{N}(t) - H_s,$$

ove:

$$(7) \quad H_s = \frac{\mu}{V} \int_{\Sigma} g_s(P) \, d\Sigma.$$

Alla (6) va aggiunta la condizione iniziale che si ottiene dalla seconda delle (4):

$$(6') \quad \bar{T}(0) = \frac{1}{V} \int_V T(P, 0) \, dV = \bar{T}_s.$$

Si è così ricavata una equazione differenziale ordinaria del primo ordine nella funzione incognita $\bar{T}(t)$, con la condizione iniziale (6').

3. - La densità neutronica media.

Per determinare la densità media di neutroni termici $\bar{N}(t)$, procediamo in modo simile a quanto già fatto per ottenere l'equazione (6).

Nell'ipotesi della quasi-stazionarietà della densità neutronica è possibile porre:

$$(8) \quad Q(P, t) = \frac{1}{D} M(\bar{T}) v(\bar{T}) N(P, t),$$

ove la funzione $M(\bar{T})$ dipende anche dalle caratteristiche geometriche del reattore ([1], pag. 197).

La (1) diviene così:

$$(9) \quad v(\bar{T})\Delta N(P, t) + \frac{1}{D} [M(\bar{T}) - S(\bar{T})] v(\bar{T})N(P, t) = \frac{1}{D} \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Integrando la (9) nel volume V , applicando il lemma di GREEN, supposto ancora lecito lo scambio dei due operatori $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\int \dots dV$ e, tenendo presente che su Σ vale: $\mathbf{n} \cdot \text{grad } N(P, t) = -N(P, t)/2D$ ([2], pag. 199), si ottiene:

$$\frac{d}{dt} \bar{N}(t) = v[M(\bar{T}) - S(\bar{T})] - \frac{2v}{V} \int_{\Sigma} N(P, t) d\Sigma.$$

Posto:

$$(10) \quad Z(t) = \frac{1}{2V} \int_{\Sigma} N(P, t) d\Sigma,$$

si ha la seguente equazione per la funzione incognita $\bar{N}(t)$:

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \bar{N}(t) = v(\bar{T})[M(\bar{T}) - S(\bar{T})] \bar{N}(t) - v(\bar{T})Z(t),$$

cui va aggiunta la condizione iniziale:

$$(12) \quad \bar{N}(0) = \frac{1}{V} \int_V N(P, 0) dV = \bar{N}_0.$$

4. - Il sistema densità media - temperatura media.

Riunendo la (6), la (11) e le condizioni iniziali corrispondenti (6') e (12), si ottiene il sistema:

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \bar{N}(t) = v(\bar{T})[M(\bar{T}) - S(\bar{T})] \bar{N}(t) - v(\bar{T})Z(t), & \bar{N}(0) = \bar{N}_0 \\ \frac{d}{dt} \bar{T}(t) = mv_0 S_0 \bar{N}(t) - H_s, & \bar{T}(0) = \bar{T}_s. \end{cases}$$

Prima di precisare le espressioni delle funzioni di \bar{T} che compaiono nel sistema (13), è utile considerare la forma che il sistema (13) stesso assume quando $\bar{N}(t)$ ed $\bar{T}(t)$ hanno rispettivamente i valori stazionari $\bar{N}_s = \frac{1}{V} \int_V N_s(P) dV$, $\bar{T}_s = \frac{1}{V} \int_V T_s(P) dV$, quali si deducono dalle equazioni stazionarie corrispondenti alla (1) ed alla prima delle (4).

Per quanto riguarda \bar{N}_s , è facile vedere che si ha:

$$(14) \quad 0 = v(\bar{T}_s)[M(\bar{T}_s) - S(\bar{T}_s)]\bar{N}_s - v(\bar{T}_s)Z_s,$$

ove:

$$(15) \quad Z_s = \frac{1}{2V} \int_{\Sigma} N_s(P) d\Sigma.$$

Ricordando che, tramite M , compaiono nella (14) le caratteristiche geometriche del reattore, la (14) stessa risulta essere l'equazione critica del reattore in questione.

Analogamente, se $T_s(P)$ è la soluzione del sistema stazionario:

$$(16) \quad \begin{cases} \mu\Delta T_s(P) + mv_0 S_0 N_s(P) = 0 & \text{per } P \in V \\ \mathbf{n} \cdot \text{grad } T_s = -g_s(P) & \text{per } P \in \Sigma, \end{cases}$$

con il solito procedimento di media si ottiene:

$$(16') \quad 0 = mv_0 S_0 N_s - H_s,$$

ove, ricordiamo:

$$(17) \quad H_s = \frac{\mu}{V} \int_{\Sigma} g_s(P) d\Sigma.$$

Notiamo che la funzione $g_s(P)$ compare anche nella condizione su Σ relativa al sistema non stazionario (4); si suppone cioè che in condizioni non stazionarie il flusso di energia termica verso l'esterno del reattore resti quello relativo alle condizioni stazionarie.

Riunendo la (14) e la (16'), si ha il sistema stazionario corrispondente al (13):

$$(13') \quad \begin{cases} 0 = v(\bar{T}_s)[M(\bar{T}_s) - S(\bar{T}_s)]\bar{N}_s - v(\bar{T}_s)Z \\ 0 = mv_0 S_0 \bar{N}_s - H_s. \end{cases}$$

Le funzioni di $\bar{T}(t)$ che compaiono nel sistema (13) hanno le espressioni ([1], pag. 339):

$$(a) \quad \begin{cases} S = S_0 \bar{T}^{-1/2} \quad , \quad S_0 = S(\bar{T}_s) \bar{T}_s^{+1/2} \\ v = v_0 \bar{T}^{1/2} \\ M = AS(\bar{T}) \bar{T}^\alpha, \end{cases}$$

ove:

$$(a') \quad \alpha = B^2/D \sum_s \xi,$$

$$(a'') \quad A = k \exp. (-B^2 \tau_s) \bar{T}_s^{-\alpha}.$$

Dalle (a) notiamo che $vS = v_0 S_0$, come già annunciato. Nelle due precedenti τ_s è l'età dei neutroni a temperatura T_s , k è « il fattore di moltiplicazione infinito », \sum_s la sezione macroscopica di scattering elastico, ξ il decremento logaritmico medio dell'energia dei neutroni durante il rallentamento e B^2 una costante dipendente dalle caratteristiche geometriche del reattore (*geometric buckling*) (per es. nel caso del reattore sferico $B^2 = (\pi/R)^2$, R essendo il raggio del reattore stesso, distanza di estrapolazione compresa). Notiamo che nella (a') compare il prodotto $D \sum_s$, che può ritenersi sensibilmente indipendente da \bar{T} , dato che $D \cong \text{costante} / \sum_s$ e che D stesso dipende dalla temperatura in modo molto *meno critico* di S e di v ([1], pag. 339).

Per mezzo delle (a), i sistemi (13) e (13') divengono rispettivamente:

$$(18) \quad \begin{cases} \dot{\bar{N}}(t) = v_0 S_0 [A \bar{T}^\alpha - 1] \bar{N}(t) - v_0 \bar{T}^{1/2} Z(t) \\ \dot{\bar{T}}(t) = mv_0 S_0 \bar{N}(t) - H_s, \end{cases}$$

$$(18') \quad \begin{cases} 0 = v_0 S_0 [A \bar{T}_s^\alpha - 1] \bar{N}_s - v_0 \bar{T}_s^{1/2} Z_s \\ 0 = mv_0 S_0 \bar{N}_s - H_s, \end{cases}$$

$$\text{ove } \dot{\bar{N}} = \frac{d\bar{N}}{dt}; \quad \dot{\bar{T}} = \frac{d\bar{T}}{dt}.$$

Supponiamo ora che le condizioni iniziali relative alla (1) soddisfino le seguenti relazioni:

$$(19) \quad 0 \leq N_0(P) - N_s(P) \ll N_s(P),$$

per ogni punto P appartenente a V oppure a Σ .

Dalle precedenti si ricava:

$$(19') \quad 0 \leq \bar{N}_0 - \bar{N}_s \ll \bar{N}_s.$$

Dal sistema (18), tenendo presente le (18'), è facile vedere che il $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\bar{N}}(t)$ tende a zero se $\bar{N}_0 \rightarrow \bar{N}_s$. Un'osservazione analoga vale per il $\lim_{t \rightarrow 0} \dot{\bar{T}}(t)$. Segue che, se le condizioni iniziali soddisfano le (19), $\bar{N}(t)|_{t=0}$ e $\bar{T}(t)|_{t=0}$ sono molto vicine a zero e quindi $\bar{N}(t)$ e $\bar{T}(t)$ sono per $t = 0$ lentamente crescenti, o decrescenti, col tempo. Pertanto, almeno per un intervallo di tempo sufficientemente piccolo a partire dall'istante iniziale, è lecito porre:

$$(20) \quad \bar{N}(t) = f(t) + \bar{N}_s, \quad \bar{T}(t) = w(t) + \bar{T}_s,$$

ove:

$$|f(t)| \ll \bar{N}_s, \quad |w(t)| \ll \bar{T}_s.$$

Dal sistema (18) si ottiene:

$$(21) \quad \begin{cases} \dot{f}(t) = v_0 S_0 \{ A[\bar{T}_s + w(t)]^x - 1 \} [\bar{N}_s + f(t)] - v_0 [\bar{T}_s + w(t)]^{1/2} [Z_s + z(t)] \\ \dot{w}(t) = m v_0 S_0 [\bar{N}_s + f(t)] - H_s, \end{cases}$$

ove:

$$(22) \quad z(t) = Z(t) - Z_s = \frac{1}{2V} \int_{\Sigma} [N(P, t) - N_s(P)] d\Sigma.$$

Dalla seconda delle (21), ricordando la seconda delle (18'), segue:

$$(23) \quad \dot{w}(t) = m v_0 S_0 f(t),$$

ossia:

$$(24) \quad w(t) = m v_0 S_0 \int_0^t f(t) dt,$$

dato che $w(0) = \bar{T}_s - \bar{T}_s = 0$.

Sviluppando invece il secondo membro della prima delle (21), trascurando i termini dell'ordine di $f^2(t)$ in confronto a $f(t)$, quelli del tipo $w(t)f(t)$ in confronto a $w(t)\bar{N}_s$, e tenendo presente la prima delle (18'), si ottiene:

$$(25) \quad \dot{f}(t) = af(t) + bw(t) - v_0\bar{T}_s^{1/2}z(t),$$

ove:

$$(26) \quad \begin{cases} a = v_0S_0[A\bar{T}_s^\alpha - 1] = v_0\bar{T}_s^{1/2}Z_s/\bar{N} \\ b = \frac{V_0}{T_0} \left[\alpha A S_0 \bar{N}_s \bar{T}_s^\alpha - \frac{1}{2} Z_s \bar{T}_s^{1/2} \right]. \end{cases}$$

La costante b è, per i reattori di dimensioni usuali, minore di zero ([3], pag. 823).

5. - La funzione $f(t)$.

Per risolvere l'equazione (25), è necessario caratterizzare meglio la funzione $z(t)$ che vi compare, ricordando che la (25) è valida in condizioni quasi stazionarie. In tali condizioni è possibile porre ([1], pag. 292):

$$N(P, t) = N_s(t)N_0(P),$$

ove $N_s(0) = 1$.

Segue:

$$\bar{N}(t) = \bar{N}_s + f(t) = \frac{1}{V} \int_V N(P, t) dV = N_s(t)\bar{N}_0; \quad N(P, t) = \frac{f(t) + \bar{N}_s}{\bar{N}_0} N_0(P);$$

ossia:

$$z(t) = \frac{f(t) + \bar{N}_s}{\bar{N}_s} Z_0 - Z_s \quad \text{ove} \quad Z_0 = \frac{1}{2V} \int_\Sigma N_0(P) d\Sigma.$$

Dalla (25) si ottiene allora:

$$(27) \quad \dot{f}(t) = -[v_0\bar{T}_s^{1/2}Z_0/\bar{N}_0 - a]f(t) + mv_0S_0b \int_0^t f(t) dt - v_0\bar{T}_s^{1/2} \left[Z_0 \frac{\bar{N}_s}{\bar{N}_0} - Z_s \right].$$

Ricordando la prima delle (26), notiamo che il coefficiente di $f(t)$ è negativo se:

$$\frac{Z_0}{\bar{N}_0} - \frac{Z_s}{\bar{N}_s} < 0.$$

Supponiamo, per es., che $N_0(P) = N_s(P)$ per $P \in V_1$, ove $V_1 = V - V_0$, V_0 essendo il volumetto compreso tra la superficie Σ ed una Σ'' [il cui punto generico Q si ottiene dal generico punto P della Σ con uno spostamento $(Q - P)$ lungo la normale interna di Σ passante per P , e tale che $(Q - P)^2 = \delta^2$]. Per $P \in V_0$ valga invece $N_0(P) = N_s(P) + d$. Si ha allora:

$$\bar{N}_s = \bar{N}_s + dV_0/V, \quad Z_0 = Z_s + d\Sigma/2V, \quad Z_0\bar{N}_s - Z_s\bar{N}_0 = \frac{d\Sigma}{2V} \bar{N}_s - \frac{dV_0}{V} Z_s.$$

Facendo tendere δ , e quindi V_0 , a zero, la differenza $Z_0\bar{N}_s - Z_s\bar{N}_0$ tende a $\frac{dZ}{2V} \bar{N}_s$; dunque se V_0 e d sono opportunamente scelti, il coefficiente di $f(t)$ nella (27) risulta negativo. Questo fatto ha un preciso significato fisico di cui fra poco parleremo.

Derivando la (27) rispetto al tempo si ottiene:

$$(28) \quad \ddot{f}(t) + 2\varepsilon\dot{f}(t) + \omega^2 f(t) = 0,$$

ove si è posto:

$$(28') \quad \begin{cases} 2\varepsilon = v_0 T^{1/2} \left[\frac{Z_0}{\bar{N}_0} - \frac{Z_s}{\bar{N}_s} \right] \\ \omega^2 = -mv_0 S_0 b \quad (b < 0), \end{cases}$$

ed ε è maggiore di zero purchè la distribuzione iniziale sia opportunamente scelta. Notiamo che è $\varepsilon < 0$ (e quindi la $f(t)$ limitata qualunque sia t), se la perturbazione $N_0(P) - N_s(P)$ è essenzialmente *superficiale*.

La (28) è formalmente identica all'equazione dei moti elastici smorzati; conseguentemente, se $\varepsilon^2 < \omega^2$ la $f(t)$ è oscillante e l'ampiezza delle oscillazioni tende esponenzialmente a zero per $t \rightarrow \infty$. Se invece $\varepsilon^2 > \omega^2$ la $f(t)$ non si annulla mai e tende ancora esponenzialmente a zero per $t \rightarrow \infty$. Se infine $\varepsilon^2 = \omega^2$, la soluzione generale della (28) è del tipo:

$$(29) \quad f(t) = C(t + c) \exp(-\varepsilon t),$$

ove C e c sono due costanti d'integrazione, che si ricavano dal sistema seguente:

$$\begin{cases} C = \dot{f}(0) + \varepsilon f(0) = -\varepsilon[f(0) + 2\bar{N}_s] \cong -2\varepsilon\bar{N}_s \\ c = \frac{f(0)}{\dot{f}(0) + \varepsilon f(0)} = -\frac{f(0)}{\varepsilon[f(0) + 2\bar{N}_s]} \cong -\frac{f(0)}{2\varepsilon\bar{N}_s} \end{cases}$$

Dalla (24) e dalla (29) si ricava:

$$(30) \quad w(t) = \frac{C}{b} \{ (\varepsilon c + 1) - [1 + \varepsilon(t + c)] \exp(-\varepsilon t) \}.$$

Se $\varepsilon^2 < \omega^2$, l'integrale generale della (28) è:

$$(31) \quad f(t) = C \operatorname{sen}(\nu t + c) \exp(-\varepsilon t),$$

con $\nu^2 = (\omega^2 - \varepsilon^2)$, dove C e c sono ancora costanti d'integrazione, per le quali vale:

$$\begin{cases} C \operatorname{sen} c = f(0) \\ C \cos c = \frac{1}{\nu} [\dot{f}(0) + \varepsilon f(0)] \cong -\frac{2\varepsilon}{\nu} \bar{N}_s \end{cases}$$

Infine dalla (24) e dalla (31) si ottiene:

$$(32) \quad w(t) = \frac{2\varepsilon f(0) + \dot{f}(0)}{\omega^2} - \frac{C}{\omega^2} \exp(-\varepsilon t) [\varepsilon \operatorname{sen}(\nu t + c) + \nu \cos(\nu t + c)].$$

6. - Ancora sull'equazione (9).

Nota la funzione $\bar{T}(t) = \bar{T}_s + w(t)$ e posto:

$$(33) \quad \begin{cases} \varphi_1(t) = 1/Dv(\bar{T}) \\ \varphi_2(t) = \frac{1}{D} [M(\bar{T}) - S(\bar{T})], \end{cases}$$

φ_1 e φ_2 risultano funzioni note del tempo. In particolare, nelle nostre ipotesi, si ha:

$$(33') \quad \begin{cases} \varphi_1(t) = \frac{1}{aD} \frac{Z_s}{\bar{N}_s} \left[1 - \frac{1}{2T_s} w(t) \right] \\ \varphi_2(t) = \frac{1}{aD} \frac{Z_s}{\bar{N}_s} \left[a + \frac{b}{\bar{N}_s} w(t) \right], \end{cases}$$

tenendo presenti le due (26).

Per mezzo delle (33), la (9) si trasforma nella seguente:

$$(34) \quad \Delta N(P, t) + \varphi_2(t)N(P, t) = \varphi_1(t) \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Posto:

$$(35) \quad t_1(t) = \int_0^t \frac{dt}{\varphi_1(t)}, \quad t_1(0) = 0,$$

$[\varphi_1(t) > 0$ qualunque sia t], otteniamo ⁽³⁾:

$$(36) \quad \Delta N(P, t_1) + \varphi_2(t_1)N(P, t_1) = \frac{\partial N(P, t_1)}{\partial t_1}.$$

Posto poi:

$$(37) \quad N(P, t_1) = N_1(P, t_1) \exp \left[\int_0^{t_1} \varphi_2(t_1) dt_1 \right],$$

segue:

$$(38) \quad \Delta N_1(P, t_1) = \frac{\partial N(P, t_1)}{\partial t_1}.$$

Il problema relativo all'equazione (34) è stato così ricondotto ad un problema classico di diffusione; per mezzo della (38) e tenendo presenti la (33') e, per es. la (30), è possibile ricavare la variazione con t della densità neutronica punto per punto nel reattore.

⁽³⁾ A rigore dovremmo scrivere: $N[P, t(t_1)]$.

In particolare, se t è così piccolo che t^2 è trascurabile in confronto a t , dalla (30) oppure direttamente dalla (24), si ottiene:

$$(39) \quad w(t) = [mv_0 S_0 f(0)]t.$$

Segue:

$$\varphi_1 = \frac{1}{aD} \frac{Z_s}{\bar{N}_s} \left[1 - \frac{mv_0 S_0 f(0)}{2T_s} t \right], \quad \varphi_2 = \frac{1}{aD} \frac{Z_s}{\bar{N}_s} \left[a + \frac{mv_0 S_0 b f(0)}{\bar{N}_s} t \right].$$

Posto:

$$a_1 = mv_0 S_0 f(0) / 2\bar{T}_s,$$

dalla (35) ricaviamo:

$$(40) \quad t_1 = -\frac{aD}{a_1} \frac{\bar{N}_s}{Z_s} \ln(1 - a_1 t).$$

Resta ancora da calcolare l'integrale che compare nell'esponenziale della (37); si ha:

$$\int_0^{t_1} \varphi_2(t_1) dt_1 = \int_0^t \varphi_2(t) \frac{dt_1}{dt} dt = \int_0^t \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)} dt = \int_0^t \frac{a + a_2 t}{1 - a_1 t} dt,$$

avendo posto:

$$a_2 = mv_0 S_0 b f(0) / \bar{N}_s.$$

Vale:

$$\int_0^{t_1} \varphi_2(t_1) dt_1 = \ln \left\{ \left[1 + \frac{a_2}{a} t \right]^{1/a_2(1+a_1/a_2)} \right\} - \frac{aa_1}{a_2^2} \left(1 + \frac{a_2}{a} t \right),$$

e pertanto:

$$(41) \quad \exp \left[\int_0^{t_1} \varphi_2(t_1) dt_1 \right] = \left[1 + \frac{a_2}{a} t \right]^{1/a_2(1+a_1/a_2)} \exp(-aa_1/a_2^2) \exp\left(-\frac{a_1}{a_2} t\right)$$

7. - Il reattore a facce piane e parallele.

Consideriamo un reattore omogeneo limitato dai due piani $x = \pm p$, distanza di estrapolazione compresa; la soluzione della (38), simmetrica rispetto al piano $x = 0$ e tale che $N_1(\pm p, t) = 0$, è ([6], pag. 97):

$$(42) \quad N_1(P, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{2n+1}{2p} \pi x \exp \left[- \left(\frac{2n+1}{2p} \pi \right)^2 t_1 \right]$$

e, ricordando la (37) e la (40),

$$(42') \quad N_1(P, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{2n+1}{2p} \pi x (1 - a_1 t)^{\left(\frac{2n+1}{2p} \right)^2 \frac{\alpha D \bar{N}_s}{a_1 z_s}},$$

$$N(P, t) = \left[1 + \frac{a_2}{a} t \right]^{1/a_2 (1 + \alpha a_1/a_2)} \exp \left(- \frac{a_1}{a_2} t \right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos \frac{2n+1}{2p} \pi x [1 - a_1 t]^{\left(\frac{2n+1}{2p} \right)^2 \frac{\alpha D \bar{N}_s}{a_1 z_s}},$$

avendo conglobato lo $\exp(-aa_1/a_2^2)$ nelle costanti c_n .

Per determinare le costanti c_n è necessario considerare la condizione iniziale; supponiamo che valga:

$$N_0(P) = N_0(x) = \begin{cases} N_s(x) & \text{per } 0 \leq x < p - \delta \\ N_s(x) + d & \text{per } p - \delta \leq x < p - d_e \\ N_s(x) & \text{per } p - d_e \leq x \leq p, \end{cases}$$

ove, ricordiamo, si ha:

$$N_s(x) = R \cos \pi x / 2p \quad (R \text{ è una costante})$$

e d_e è la distanza da estrapolazione (che supponiamo minore di δ), in modo che la superficie reale del reattore è costituita dai due piani $x = \pm (p - d_e)$.

Le precedenti ipotesi su $N_0(x)$ corrispondono ad una perturbazione *superficiale* della densità neutronica stazionaria $N_s(x)$ e soddisfano le ipotesi necessarie affinché ε sia positivo, purchè naturalmente δ sia convenientemente scelto (δ deve essere $\ll p$).

È facile calcolare le c_n ; si ha:

$$c_n = \begin{cases} R + \frac{2d}{p} \int_{p-\delta}^{p-d_e} \cos \frac{1}{2p} \pi x dx & \text{per } n = 0 \\ \frac{2d}{p} \int_{p-\delta}^{p-d_e} \cos \frac{2n+1}{2p} \pi x dx & \text{per } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Ossia:

$$(43) \quad c_n = \begin{cases} R + \frac{8d}{\pi} \cos \left[\frac{\pi}{4p} (2p - \delta - d_e) \right] \text{sen} \left[\frac{\pi}{4p} (\delta - d_e) \right] & \text{per } n = 0 \\ \frac{8d}{\pi(2n+1)} \cos \left[\frac{2n+1}{4p} \pi(2p - \delta - d_e) \right] \text{sen} \left[\frac{2n+1}{4p} \pi(\delta - d_e) \right] & \text{per } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Se poi $(\delta - d_e) \ll p$, le (43) si semplificano nelle seguenti:

$$(43') \quad c_n = \begin{cases} R + \frac{2d}{p} (\delta - d_e) \cos \left[\frac{\pi}{4p} (2p - \delta - d_e) \right] & \text{per } n = 0 \\ \frac{2d}{p} (\delta - d_e) \cos \left[\frac{2n+1}{4p} \pi(2p - \delta - d_e) \right] & \text{per } n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Bibliografia.

- [1] S. GLASSTONE and M. C. EDLUND, *The elements of nuclear reactor theory*, Van Nostrand, Co Inc. 1958.
- [2] A. M. WEINBERG and E. P. WIGNER, *The physical theory of neutron chain reactors*, Chicago Press, Chicago 1958.
- [3] S. GLASSTONE, *Principles of nuclear reactor engineering*, Mac Millan, ... 1956.
- [4] NUCLEONICS, 12 No. 9, 28 (1954).
- [5] D. TER HAAR, *Elements of statistical mechanics*, Rinehart Co, New York 1958.
- [6] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1959.

S u m m a r y .

We consider the temperature dependence of the coefficients of the thermal neutron diffusion equation in a homogeneous thermal reactor whose volume V is held constant.

We find the functions $\bar{N}(t)$ and $\bar{T}(t)$, that is the average thermal neutron density and the average reactor temperature and use them to write the thermal diffusion equation in a much simpler form (equation (38)).

Finally we study the equation (38) for the special case of a homogeneous reactor, bounded by two parallel planes.

* * *