Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 295-308

DELFINA ROUX (*)

Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. I. Ordine $\varrho = 1/q$ (q intero positivo). (**)

1. - Introduzione.

Nella teoria delle funzioni analitiche venne introdotta da G. PÓLYA (1) la nozione di « orientazione di più forte accrescimento » per le funzioni intere; tale concetto venne poi esteso da A. PFLÜGER (2) alla categoria delle cosiddette « funzioni quasi intere ». Accanto a questa nozione venne introdotta più tardi da R. WILSON (3) quella analoga di « orientazione secondaria di più forte accrescimento » per le funzioni intere. Ci proponiamo di esporre alcune considerazioni e proprietà riguardanti tali orientazioni secondarie, allo scopo di metterne a fuoco il concetto.

2. - Richiamo di nozioni preliminari.

a) Sia $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una funzione intera e quindi $| a_n |^{1/n} \to 0$. Escluderemo nel seguito la funzione identicamente nulla. Poniamo $M(r) = \max_{|z| \leq r} | F(z) |$.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « F. Enriques », Università (via C. Saldini 50), Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62. - Ricevuto il 9-V-1962.

(1) G. PÓLYA [10], in particolare pp. 571-610.

(2) A. PFLÜGER [11]. Prima di A. PFLÜGER, V. BERNSTEIN [5] aveva parzialmente studiato funzioni di questo tipo nella ricerca di una trascendente intera di ordine $\varrho \neq 1$ e tipo medio avente indicatrice di accrescimento assegnata.

(3) R. WILSON [17], in particolare pp. 188 e seguenti.

b) *Ordine*: si dice che $F(z)$ ha *ordine* ϱ quando $\varrho = \varrho(F) = \operatorname{ord} F = \overline{\lim} \dfrac{\log \log M(r)}{\log r}$ $(0 \leqslant \varrho \leqslant +\infty)$.

c) *Tipo*: si dice che $F(z)$, avente ordine positivo *finito* ϱ (cioè $0 < \varrho < +\infty$), ha il *tipo* τ quando $\tau = \tau(F) = \overline{\lim} \dfrac{\log M(r)}{r^{\varrho}}$ $(0 \leqslant \tau \leqslant +\infty)$.

Secondochè $\tau = 0$, $0 < \tau < +\infty$, $\tau = +\infty$, si dice rispettivamente che $F(z)$ è di *tipo minimo*, *tipo medio*, *tipo massimo*.

d) Denotiamo con $[\varrho, \tau]$ la classe delle funzioni $F(z)$ di ordine positivo finito ϱ e tipo τ. Scriveremo: $F(z) \in [\varrho, \tau]$.

Nell'insieme delle classi $[\varrho, \tau]$ $(0 < \varrho < +\infty,\ 0 \leqslant \tau \leqslant +\infty)$, istituiamo il seguente ordinamento:

$$[\varrho_1, \tau_1] = [\varrho_2, \tau_2] \quad \text{se} \quad \varrho_1 = \varrho_2,\ \tau_1 = \tau_2;$$

$$[\varrho_1, \tau_1] < [\varrho_2, \tau_2] \quad \text{se} \quad \begin{cases} \varrho_1 < \varrho_2 \\ \text{oppure} \quad \varrho_1 = \varrho_2,\ \tau_1 < \tau_2 . \end{cases}$$

Diremo, secondo R. P. BOAS, che $F(z)$ *appartiene alla classe di accrescimento* (ϱ, τ) (con $0 < \varrho < +\infty$), e scriveremo $F(z) \in (\varrho, \tau)$, quando $F(z) \in [\varrho_1, \tau_1]$, con $[\varrho_1, \tau_1] \leqslant [\varrho, \tau]$; intenderemo di includere nella classe di accrescimento (ϱ, τ) anche le funzioni $F(z)$ di ordine $\varrho = 0$, sebbene per esse non sia stata introdotta la nozione di tipo.

e) *Indicatrice di accrescimento.* Secondo E. PHRAGMÉN-E. LINDELÖF (4) diremo *indicatrice di accrescimento* della funzione $F(z)$ di ordine finito ϱ e tipo finito τ la funzione:

$$h(\vartheta) = \overline{\lim} \frac{\log |F(re^{i\vartheta})|}{r^{\varrho}}, \quad -\infty < \vartheta < +\infty, \quad -\infty < h(\vartheta) < +\infty .$$

Le proprietà della funzione $h(\vartheta)$ furono studiate nel caso $\varrho = 1$ principalmente da G. PÓLYA e molte furono estese al caso ϱ qualsiasi da vari autori (per esempio G. VALIRON, V. BERNSTEIN e altri). Ricordiamo qui le seguenti proprietà (5).

1) Da $F(z) \in [\varrho, 0]$ segue $h(\vartheta) \equiv 0$.

2) Se $0 < \tau < +\infty$, $h(\vartheta)$ è continua per $-\infty < \vartheta < +\infty$ e inoltre

$$\max h(\vartheta) = \tau .$$

(4) E. PHRAGMÉN - E. LINDELÖF [12]: in particolare pp. 391-403.

(5) Vedi, ad esempio, E. C. TITCHMARSH [16], pp. 181-185.

Le orientazioni ϑ^* per le quali $h(\vartheta^*) = \tau$ si dicono, secondo G. PÓLYA, *orientazioni di più forte accrescimento* di $F(z)$.

L'insieme (mod 2π) delle orientazioni ϑ^* di più forte accrescimento di $F(z)$ si denoterà con $\mathcal{S}(F)$.

Nel caso $\tau = 0$, essendo $h(\vartheta) = 0$ per ogni ϑ, qualunque orientazione ϑ appartiene a $\mathcal{S}(F)$.

f) *Trasformata generalizzata di Laplace-Borel.* Alla funzione $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in [\varrho, \tau]$ $(0 < \varrho < +\infty, 0 \leqslant \tau < +\infty)$ si associa la serie di potenze, in $1/z$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, \Gamma(n\sigma + 1)/z^{n+1} \qquad (\sigma = 1/\varrho)$$

(avente come campo di convergenza la regione $|z| > \tau^\sigma$), che vien detta *trasformata generalizzata di Laplace-Borel* di $F(z)$ (6). Scriveremo

$$f(z) = \mathfrak{B}_\varrho(F(z)) = \mathfrak{B}_\varrho(F) .$$

Nel caso $\varrho = 1$ risulta:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n! \; a_n/z^{n+1},$$

trasformata introdotta da G. PÓLYA.

Se $F(z) \in (\varrho, 0)$ allora $f(z)$ converge su tutta la sfera di NEUMANN, ad eccezione di $z = 0$.

La funzione $f(z)$ ci fornisce le orientazioni di più forte accrescimento di $F(z)$, poichè:

« Se ϑ^* (mod 2π) è orientazione di più forte accrescimento di $F(z) \in [\varrho, \tau]$, allora $z^* = \tau^\sigma e^{-i\vartheta^*}$ è un punto singolare per prolungamento radiale della serie $f(z)$ sul cerchio di convergenza e viceversa » (7).

In altri termini, i due insiemi arg $\bar{z}^*$ (mod 2π) e $\mathcal{S}(F)$ coincidono.

---

(6) Questa trasformazione, nel caso $\varrho \neq 1$, venne introdotta da G. VALIRON ([14] e [15]). Vedi anche V. BERNSTEIN ([1], [2], [3], [5]) e A. J. MACINTYRE [8].

(7) Per il caso $\varrho = 1$ vedi G. PÓLYA ([10], pp. 587-588). Per il caso $\varrho \neq 1$ vedi V. BERNSTEIN ([2], pag. 383) e R. WILSON ([17], pag. 192).

g) *Somma di funzioni intere.* Sia

$$F_1(z) \in [\varrho_1,\ \tau_1], \quad F_2(z) \in [\varrho_2,\ \tau_2], \quad F(z) = F_1(z) + F_2(z) \in [\varrho,\ \tau].$$

Valgono per la somma $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$ le seguenti proprietà:

1) Da $[\varrho_1,\ \tau_1] > [\varrho_2,\ \tau_2]$ segue $[\varrho,\ \tau] = [\varrho_1,\ \tau_1]$.

2) Da $[\varrho_1,\ \tau_1] > [\varrho_2,\ \tau_2]$, $0 \leqslant \tau_1 < +\infty$, segue $\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(F_1)$.

3) Da $[\varrho_1,\ \tau_1] = [\varrho_2,\ \tau_2]$, $\mathcal{S}(F_1) \neq \mathcal{S}(F_2)$, segue $[\varrho,\ \tau] = [\varrho_1,\ \tau_1] = [\varrho_2,\ \tau_2]$, $\mathcal{S}(F) \subseteq \mathcal{S}(F_1) \cup \mathcal{S}(F_2)$.

h) *Prodotto di funzioni intere.* Sia

$$F_1(z) \in [\varrho_1,\ \tau_1], \quad F_2(z) \in [\varrho_2,\ \tau_2], \quad F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z) \in [\varrho,\ \tau].$$

Per il prodotto $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$ valgono le seguenti proprietà:

1) Da $\varrho_1 > \varrho_2$ segue $[\varrho,\ \tau] = [\varrho_1,\ \tau_1]$ e, se $\tau_1 < +\infty$, $\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(F_1)$ (8).

2) Da $\varrho_1 = \varrho_2$ segue $[\varrho,\ \tau] \leqslant [\varrho_1,\ \tau_1 + \tau_2]$.

2_1) Da $\varrho_1 = \varrho_2$ non intero segue $\varrho = \varrho_1$, $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1 + \tau_2$.

2_2) Da $\varrho_1 = \varrho_2$ (anche se intero), $\tau_1 = \tau_2 = 0$ segue $[\varrho,\ \tau] = [\varrho_1,\ 0]$.

2_3) Da $\varrho_1 = \varrho_2$, $\tau_1 > 0$, $\tau_2 = 0$ segue $[\varrho,\ \tau] = [\varrho_1,\ \tau_1]$, $\mathcal{S}(F) = \mathcal{S}(F_1)$ (9).

Nel caso 2), quando $\varrho_1 = \varrho_2$, $0 < \tau_1 < +\infty$, $0 < \tau_2 < +\infty$ e si desiderano maggiori informazioni sul valore di τ e sull'insieme $\mathcal{S}(F)$, occorre procedere ad un esame più approfondito del comportamento delle funzioni $F_1(z)$ e $F_2(z)$, che è stato affrontato da R. WILSON (10) mediante l'introduzione della nozione di orientazione secondaria di più forte accrescimento che veniamo ora a precisare.

---

(8) R. [WILSON ([18], pag. 185).

(9) R. WILSON ([17], 148).

(10) R. WILSON ([18], pp. 188 e seguenti). Ivi si trova la seguente definizione: «If $F(z)$ can be expressed as a sum of two integral functions $F_1(z)$, $F_2(z)$ each of order ϱ and if $F_2(z)$ is of smaller type than $F(z)$, then a direction of strongest growth of $F_2(z)$ will be termed a secondary direction of strongest growth of $F(z)$.» È evidente che questa definizione tace il fatto essenziale che l'orientazione secondaria di più forte accrescimento è relativa alla partizione della funzione $F(z)$ in questione: pertanto riteniamo opportuno modificare la definizione stessa.

3. - Orientazioni secondarie di più forte accrescimento.

Sia $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$, $F(z) \in [\varrho, \tau]$, $F_1(z) \in [\varrho, \tau]$, $F_2(z) \in [\varrho, \tau_2]$, $0 < \tau_2 < \tau < +\infty$.

Ogni orientazione ω di più forte accrescimento per $F_2(z)$ si dirà *orientazione secondaria di più forte accrescimento di* $F(z)$ *attinente alla partizione* $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$.

Diremo $\mathfrak{W}(F;\, F_2)$ l'insieme di tali direzioni secondarie ω (mod 2π). Il simbolo $\mathfrak{W}(F;\, F_2)$ presuppone che sia ord $F_2 =$ ord F e $\tau(F_2) < \tau(F)$.

Si vede facilmente che: fissati $F(z)$ con $0 < \varrho < +\infty$, $0 < \tau < +\infty$ e ω (mod 2π), esiste $F_2(z)$, con $\varrho_2 = \varrho$, $0 < \tau_2 < \tau$, tale che $\omega \in \mathfrak{W}(F;\, F_2)$. Infatti, è possibile scegliere $F_2(z)$, con $\varrho_2 = \varrho$, $0 < \tau_2 < \tau$, tale che per essa sia $\omega \in \mathcal{S}(F_2)$ (11); d'altronde $F_1(z) = F(z) - F_2(z) \in [\varrho, \tau]$ e quindi per $F(z) = F_1(z) + F_2(z)$ risulta $\omega \in \mathfrak{W}(F;\, F_2)$.

4. - Le classi $\mathcal{C}^0_\varrho$, $\mathcal{C}^*_\varrho$ e $\mathcal{C}_\varrho$. Rappresentazione tipica.

In R. Wilson [18] sono enunciate proposizioni riguardanti la determinazione delle orientazioni secondarie di più forte accrescimento del prodotto di funzioni intere di uguale ordine: riteniamo di dover qui precisare la portata di tali proposizioni in vista dell'osservazione in (10).

Sia $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in (\varrho, \tau)$ $(0 \leqslant \tau < +\infty)$ e $f(z) = \mathcal{B}_\varrho(F) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(n\sigma + 1)/z^{n+1}$ $(\sigma = 1/\varrho)$. È noto che, se $F(z) \in [\varrho, \tau]$, $f(z)$ converge per $|z| > \tau^\sigma$ e che, se $F(z) \in (\varrho, 0)$, $f(z)$ ha $z = 0$ come unico punto singolare.

D e f i n i z i o n e. Diciamo $\mathcal{C}^0_\varrho$ la classe delle funzioni intere $\Phi^0(z) \in (\varrho, 0)$. L'associata $\varphi^0(z) = \mathcal{B}_\varrho(\Phi^0)$ di $\Phi^0(z)$ ammette $z = 0$ come unico punto singolare ed è regolare in $z = \infty$. Viceversa, una serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} b_n/z^{n+1}$ convergente per $|z| > 0$ si può sempre considerare come la trasformata $\mathcal{B}_\varrho(\Phi^0)$ della funzione intera $\Phi^0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n/\Gamma(n\sigma + 1) \in (\varrho, 0)$ $(\sigma = 1/\varrho)$.

D e f i n i z i o n e. Diciamo $\mathcal{C}^*_\varrho$ la classe delle funzioni $\Phi^*(z) \in (\varrho, \tau)$ $(0 \leqslant \tau < +\infty)$ tali che la loro associata $\varphi^*(z) = \mathcal{B}_\varrho(\Phi^*)$ (regolare in $z = \infty$)

(11) Se ϱ è intero, basterà porre $F_2(z) = \exp\{\tau_2(e^{-i\omega}z)^\varrho\}$; se ϱ non è intero, basterà porre $F_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu/n)^{n/\varrho} e^{-in\omega} z^n$, con $\nu = e\varrho\tau_2$ (vedasi R. P. Boas jr. [7], pag. 11, teorema 2.2.10).

abbia sulla sfera di NEUMANN un solo punto singolare (che sarà polo o punto essenziale).

È evidente che per $\varrho < \varrho_1$ è $\mathcal{C}^0_\varrho \subset \mathcal{C}^*_\varrho \subset \mathcal{C}^0_{\varrho_1}$.

Se Φ^* non è una Φ^0, detto τ il suo tipo, risulta $0 < \tau < +\infty$ e inoltre, detto $\lambda\, e^{-i\vartheta}$ l'unico punto singolare di $\varphi^*(z) = \mathcal{B}_\varrho(\Phi^*)$, risulta $\tau = \lambda^\varrho$ e $\mathcal{I}(\Phi^*) \equiv \vartheta$ (mod 2π).

Definizione. Diciamo $\mathcal{C}_\varrho$ la classe delle funzioni $\Phi(z)$ rappresentabili come somma di *un numero finito* di funzioni della classe $\mathcal{C}^*_\varrho$.

È evidente che $\mathcal{C}_\varrho$ è una varietà lineare e che per $\varrho < \varrho_1$ risulta $\mathcal{C}^0_\varrho \subset \mathcal{C}^*_\varrho \subset \subset \mathcal{C}_\varrho \subset \mathcal{C}^0_{\varrho_1}$.

Se $\Phi(z) \in \mathcal{C}_\varrho$, la trasformata $\varphi(z) = \mathcal{B}_\varrho(\Phi)$ è uniforme, regolare all'∞ e possiede un numero finito di punti singolari che sono poli o punti essenziali. Allora, $\varphi(z)$ può essere rappresentata come somma di un numero finito di funzioni con un sol punto singolare, le quali ne mettono in evidenza le parti caratteristiche nel modo classico:

$$\varphi(z) = \varphi^*_0(z) + \varphi^*_1(z) + \ldots + \varphi^*_m(z), \qquad m \geqslant 0\,, \tag{4.1}$$

dove $\varphi^*_0(z)$ (eventualmente mancante) è la parte che ha $z = 0$ come unico punto singolare, mentre ogni $\varphi^*_k(z)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ quando ve ne siano, ha come unico punto singolare un punto $\xi_k = \lambda_k e^{-i\vartheta_k} \neq 0$: i punti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ essendo a due a due distinti.

Di conseguenza possiamo rappresentare $\Phi(z)$ al modo seguente:

$$\Phi(z) = \Phi^*_0(z) + \Phi^*_1(z) + \ldots + \Phi^*_m(z), \tag{4.2}$$

dove $\varphi^*_k(z) = \mathcal{B}_\varrho(\Phi^*_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, $\Phi^*_0(z) \in \mathcal{C}^0_\varrho$ [quando esista in (4.2)], $\Phi^*_k(z) \in \mathcal{C}^*_\varrho$, $\Phi^*_k(z)$ non $\in \mathcal{C}^0_\varrho$ per $k = 1, 2, \ldots, m$ quando sia $m > 0$. Se $m \geqslant 1$, risulta $\Phi^*_k(z) \in [\varrho, \tau_k]$ con $0 < \tau_k = \lambda^\varrho_k < +\infty$ per $k = 1, 2, \ldots, m$.

Assegnata $\Phi(z) \in \mathcal{C}_\varrho$, se $m \geqslant 1$, i numeri $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$; $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_m$ (mod 2π) sono positivi, finiti, univocamente determinati.

Convenzione. Quando in (4.2) sia presente il termine $\Phi^*_0(z)$, è utile introdurre il numero $\tau_0 = 0$ che si dirà *tipo di* $\Phi^*_0(z)$ *in* $\mathcal{C}^0_\varrho$ ed associare a $\Phi^*_0(z)$ l'orientazione di più forte accrescimento ϑ_0 (arbitraria).

Se $\Phi(z)$ non $\in \mathcal{C}^0_\varrho$ (cioè se $m \geqslant 1$), risulta $\Phi(z) \in [\varrho, \tau]$ dove il tipo τ di $\Phi(z)$ è $\tau = \max\limits_{1 \leq k \leq m} \tau_k$ ed almeno uno dei τ_k è uguale a τ.

Se, per fissare le idee, ordiniamo $\tau_0 = 0 < \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots \leqslant \tau_m$, quando è $\tau_{m-t} < \tau_{m-t+1} = \tau_{m-t+2} = \ldots = \tau_m = \tau$ $(t \geqslant 1)$, allora è $\mathcal{I}(\Phi) = \vartheta_j$ $(m - t + 1 \leqslant \leqslant j \leqslant m)$.

Fissato ϱ, è fissata $\mathcal{C}_\varrho$ e, se $\Phi(z) \in \mathcal{C}_\varrho$, è univocamente determinata la rappresentazione tipica (4.2) e quindi anche, se $m \geqslant 1$, l'insieme dei numeri ϑ_k ($k = 1, 2, \ldots, m$).

D e f i n i z i o n e. Diremo *orientazioni secondarie assolute di più forte accrescimento* di una funzione intera, di ordine ϱ, $\Phi(z) \in \mathcal{C}_\varrho$ le orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni $\Phi_k(z)$ della rappresentazione tipica (4.2) di $\Phi(z)$.

Osserviamo che l'insieme

$$\mathfrak{W}(\Phi) = \vartheta_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

risulta univocamente determinato a meno della scelta della direzione ϑ_0 arbitraria da associare a $\Phi(z)$ qualora essa sia effettivamente presente in (4.2).

È anche evidente che $\mathcal{S}(\Phi) \subseteq \mathfrak{W}(\Phi)$.

5. - Le orientazioni di più forte accrescimento del prodotto di funzioni intere della classe $\mathcal{C}_1$.

T e o r e m a I. *Siano $F_1(z)$, $F_2(z)$ due funzioni di ordine 1 della classe $\mathcal{C}_1^*$ e siano $\tau^{(1)}$, $\vartheta^{(1)}$ e $\tau^{(2)}$, $\vartheta^{(2)}$ il tipo e la orientazione di più forte accrescimento rispettivamente di $F_1(z)$ e $F_2(z)$. Allora il prodotto $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$ appartiene a $\mathcal{C}_1^*$ e, se ha ordine 1, il suo tipo τ e la sua orientazione ϑ di più forte accrescimento sono assegnati dalla formula*

$$\tau e^{i\vartheta} = \tau^{(1)} e^{i\vartheta^{(1)}} + \tau^{(2)} e^{i\vartheta^{(2)}}. \tag{5.1}$$

Questo teorema può essere enunciato in simboli nel modo seguente:

Siano

$$\begin{cases} F_1(z) \in \mathcal{C}_1^*, \ F_1(z) \in [1, \tau^{(1)}], \ \mathcal{S}(F_1) \equiv \vartheta^{(1)} \\ F_2(z) \in \mathcal{C}_2^*, \ F_2(z) \in [1, \tau^{(2)}], \ \mathcal{S}(F_2) \equiv \vartheta^{(2)}. \end{cases}$$

Allora $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z) \in \mathcal{C}_1^*$ e, se $F(z) \in [1, \tau]$, esiste ϑ tale che $\mathcal{S}(F) \equiv \vartheta$ e inoltre risulta

$$\tau e^{i\vartheta} = \tau^{(1)} e^{i\vartheta^{(1)}} + \tau^{(2)} e^{i\vartheta^{(2)}}. \tag{5.1}$$

O s s e r v a z i o n e. Il teorema vale anche se $F_1(z)$ o $F_2(z)$ o $F(z)$ hanno ordine inferiore ad 1, purchè in tal caso si consideri il tipo in $\mathcal{C}_1^*$, cioè 0, e come orientazione di più forte accrescimento una orientazione arbitraria.

Dimostrazione. Poniamo

$$f_1(z) = \mathfrak{B}_1(F_1), \qquad f_2(z) = \mathfrak{B}_1(F_2), \qquad f(z) = \mathfrak{B}_1(F) .$$

Risulta

$$f(z) = f_1(z) \oplus f_2(z),$$

cioè $f(z)$ è la composta secondo HURWITZ-PINCHERLE (12) di $f_1(z)$ e $f_2(z)$, e poichè $f_1(z)$ e $f_2(z)$ hanno come uniche singolarità, rispettivamente, i punti $\tau^{(1)}e^{-i\vartheta^{(1)}}$ e $\tau^{(2)}e^{-i\vartheta^{(2)}}$, che sono poli o singolarità essenziali, il punto (unico!)

$$\tau e^{-i\vartheta} = \tau^{(1)}e^{-i\vartheta^{(1)}} + \tau^{(2)}e^{-i\vartheta^{(2)}}$$

è necessariamente singolare per $f(z)$ ed è un polo o, al più, una singolarità essenziale. Di conseguenza $F(z) \in \mathfrak{C}_1^{\bullet}$ e vale la (5.1).

Teorema II. *Siano* $F_1(z)$, $F_2(z) \in \mathfrak{C}_1$; $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$; $\tau_h^{(1)}$, $\vartheta_h^{(1)}$ $(0 \leqslant h \leqslant m_1)$ *associati ad* $F_1(z)$; $\tau_k^{(2)}$, $\vartheta_k^{(2)}$ $(0 \leqslant k \leqslant m_2)$ *associati ad* F_2 (13). *Poniamo*

$$(5.2) \qquad \begin{cases} \tau(h;\, k)\cdot \exp\{i\vartheta(h;\, k)\} = \tau_h^{(1)} \cdot \exp\{i\vartheta_h^{(1)}\} + \tau_k^{(2)} \cdot \exp\{i\vartheta_k^{(2)}\} \\ [0 \leqslant h \leqslant m_1,\ 0 \leqslant k \leqslant m_2\ (^{13});\ 0 \leqslant \vartheta(h;\, k) < 2\pi] . \end{cases}$$

Allora $F(z) \in \mathfrak{C}_1$, *e, se* $F_1(z)$ *o* $F_2(z)$ *non* $\in \mathfrak{C}_1^{\bullet}$, *risulta:*

$\varrho = \varrho(F) = 1, \quad \tau(F) = \max \tau(h;\, k),$

$\mathfrak{F}(F)$ *è l'insieme dei* $\vartheta(h;\, k)$ *pei quali* $\tau(h;\, k) = \tau$,

$\mathfrak{W}(F)$ *è contenuto nell'insieme dei* $\vartheta(h;\, k)$,

$\mathfrak{W}(F)$ *contiene almeno tutti i* $\vartheta(h;\, k)$ *tali che* $\tau(h;\, k) \cdot \exp\{i\vartheta(h;\, k)\}$ *compare una volta sola nel sistema* (5.2).

---

(12) Vedi, ad esempio, L. BIEBERBACH ([6], pp. 29-31), oppure S. MANDELBROJT ([9], pp. 21-22). Cogliamo l'occasione per ricordare qui la Memoria di V. BERNSTEIN [4] nella quale, fra l'altro, sono presentate alcune condizioni sufficienti perchè un punto, che verifichi la condizione necessaria, sia effettivamente singolare per la funzione composta.

(13) Od anche $0 < h \leqslant m_1$, $0 < k \leqslant m_2$, qualora nella rappresentazione tipica di $F_1(z)$ e $F_2(z)$ manchi il termine della classe $\mathfrak{C}_1^0$.

Dimostrazione. Siano

$$F_1(z) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \Phi_h^{(1)}(z), \qquad F_2(z) = \sum_{k=0}^{k=m_2} \Phi_k^{(2)}(z),$$

con

$$\Phi_h^{(1)}(z) \in \mathcal{C}_1^* \ (h = 0, 1, \ldots, m_1), \qquad \Phi_k^{(2)}(z) \in \mathcal{C}_1^* \ (k = 0, 1, \ldots, m_2),$$

dove $h = 0$ e $k = 0$ sono eventualmente mancanti, le rappresentazioni tipiche di $F_1(z)$ e $F_2(z)$ in $\mathcal{C}_1$. Avremo

$$f_1(z) = \mathfrak{B}_1(F_1) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \mathfrak{B}_1(\Phi_h^{(1)}) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \varphi_h^{(1)}(z), \quad f_2(z) = \mathfrak{B}_1(F_2) = \sum_{k=0}^{k=m_2} \mathfrak{B}_1(\Phi_k^{(2)}) = \sum_{k=0}^{k=m_2} \varphi_k^{(2)}(z).$$

Essendo $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$, avremo

$$f(z) = \mathfrak{B}_1(F) = \mathfrak{B}_1(F_1) \otimes \mathfrak{B}_1(F_2) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \varphi_h^{(1)}(z) \otimes \sum_{k=0}^{k=m_2} \varphi_k^{(2)}(z)$$

e, in forza della distributività della composizione di HURWITZ-PINCHERLE, s'ottiene

$$f(z) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \sum_{k=0}^{k=m_2} (\varphi_h^{(1)}(z) \oplus \varphi_k^{(2)}(z)) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \sum_{k=0}^{k=m_2} \mathfrak{B}_1(\Phi_h^{(1)} \cdot \Phi_k^{(2)}) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \sum_{k=0}^{k=m_2} \mathfrak{B}_1(\Phi_{h,k})$$

con $\Phi_{h,k}(z) \in \mathcal{C}_1^*$ per ogni h e per ogni k (vedi Teor. I); inoltre il tipo $\tau(h;\, k)$ in $\mathcal{C}_1^*$ e l'orientazione di più forte accrescimento $\vartheta(h;\, k)$ di $\Phi_{h,k}(z)$ sono assegnati dalla (5.2).

Ovviamente si può scrivere

$$F(z) = \sum_{h=0}^{h=m_1} \sum_{k=0}^{k=m_2} \Phi_{h,k}(z) \tag{5.3}$$

e pertanto $F(z) \in \mathcal{C}_1$. Inoltre, qualora risulti $\tau(h;\, k) \cdot \exp\{i\vartheta(h;\, k)\} \neq \tau(r;\, s) \cdot \exp\{i\vartheta(r;\, s)\}$ se $h \neq r$ o $k \neq s$, allora la (5.3) è la rappresentazione tipica di $F(z)$ in $\mathcal{C}_1$: se questo fatto non si verifica, allora la rappresentazione tipica di $F(z)$ si ottiene da (5.3) associando fra loro i termini pei quali $\tau(h;\, k) \cdot \exp\{i\vartheta(h;\, k)\} = \tau(r;\, s) \cdot \exp\{i\vartheta(r;\, s)\}$ e sopprimendoli se la loro somma risulta identicamente nulla. Dunque, nella rappresentazione tipica di $F(z)$ sono certamente presenti quei termini della (5.3) il cui corrispondente $\tau(h;\, k) \cdot \exp\{i\vartheta(h;\, k)\}$ compare *una sola volta* nel sistema (5.2) e, se almeno una delle funzioni $F_1(z)$, $F_2(z)$ non appartiene a $\mathcal{C}_1^*$, di termini di questo tipo ve ne sono almeno due (14). In questo caso allora $F(z)$ non può appartenere a $\mathcal{C}_1^0$ ed ha pertanto ordine 1.

D'altra parte, fra i termini il cui corrispondente $\tau(h;\, k)\cdot\exp\{i\vartheta(h;\, k)\}$ compare in (5.2) una volta sola, vi sono certamente quelli pei quali il corrispondente $\tau(h;\, k)$ assume il valore massimo (15).

Ne segue il Teorema II.

6. - Il caso $\varrho = 1/q$ (q intero >1).

Teorema III. *Siano*

$$F_1(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*,\ F_1(z) \in [\varrho,\, \tau^{(1)}],\ \mathcal{S}(F_1) \equiv \vartheta^{(1)};\ F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*,\ F_2(z) \in [\varrho,\, \tau^{(2)}],\ \mathcal{S}(F_2) \equiv \vartheta^{(2)},$$

($\varrho = 1/q$, q *intero* >1). *Poniamo* :

$$(6.1)\quad \begin{cases} \tau(r;\, s)\exp\{i\varrho\vartheta(r;\, s)\} = \tau^{(1)}\exp\{i\varrho(\vartheta^{(1)} + 2r\pi)\} + \tau^{(2)}\exp\{i\varrho(\vartheta^{(2)} + 2s\pi)\} \\ r,\, s = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, q-1; \quad 0 \leqslant \vartheta(r;\, s) < 2\pi. \end{cases}$$

Allora $F(z) = F_1(z)\cdot F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho$ *ed inoltre* :

$$\text{ord}\ F = \varrho\,,\quad \tau(F) = \max_{r,s} \tau(r;\, s),$$

$\mathcal{S}(F)$ *è l'insieme dei* $\vartheta(r;\, s)$ *pei quali* $\tau(r;\, s) = \tau$,

$\mathcal{W}(F)$ *è contenuto nell'insieme dei* $\vartheta(r;\, s)$,

$\mathcal{W}(F)$ *contiene almeno tutti i* $\vartheta(r;\, s)$ *tali che* $\tau(r;\, s)\exp\{i\varrho\vartheta(r;\, s)\}$ *compare nel sistema* (6.1) *una sola volta.*

---

(14) D. Roux ([13], Lemma 1, p. 48).
(15) D. Roux ([13], Lemma 2, p. 49).

Osservazioni. 1) A differenza di quanto si verifica nel caso $\varrho = 1$ in generale $F(z)$ non $\in \mathcal{C}_\varrho^*$: è facile vedere che condizione sufficiente (ma non necessaria) affinchè $F(z) \in \mathcal{C}_\varrho^*$ è che una delle funzioni $F_1(z)$, $F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho^0$.

2) Il teorema vale anche se $F_1(z)$ o $F_2(z)$ sono di ordine inferiore a ϱ, purchè in tal caso si consideri il loro tipo in $\mathcal{C}_\varrho^0$ (cioè 0) ed una orientazione di più forte accrescimento arbitraria.

Dimostrazione. Sia $F_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} z^n$ $(i = 1, 2)$. Poniamo $z = t^q$: ad ogni settore $0 \leqslant \arg t < 2\pi\varrho$ del piano t corrisponde l'intero piano z ed in tale trasformazione $F_i(z)$ $(i = 1, 2)$ è la corrispondente della funzione intera

$$G_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} t^{nq},$$

per la quale valgono le seguenti proprietà.

1) $G_i(t)$ è invariante per rotazioni del piano t con centro nell'origine ed ampiezza multipla di $2\pi\varrho$;

2) $G_i(t) \in [1, \tau^{(i)}]$;

3) $h_{F_i}(\vartheta) = h_{G_i}(\varrho\vartheta)$ e, di conseguenza,

$$\mathcal{S}(G_i) = \varrho(\vartheta^{(i)} + 2r\pi) \qquad (r = 0, 1, 2, ..., q-1);$$

4) $\mathcal{B}_1(G_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} (nq)!/t^{nq+1}$.

D'altra parte risulta $\mathcal{B}_\varrho(F_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(i)} \Gamma(nq+1)/z^{n+1}$ $(q = \sigma = 1/\varrho)$ e pertanto $\mathcal{B}_\varrho(F_i)$ è la corrispondente nella trasformazione $z = t^q$ della funzione $t^{1-q}\,\mathcal{B}_1(G_i)$. Di conseguenza, poichè l'unica singolarità (al più essenziale) di $\mathcal{B}_\varrho(F_i)$ si trova nel punto $z^{(i)} = \tau^{(i)\sigma} \exp\{-i\vartheta^{(i)}\}$, le singolarità di $\mathcal{B}_1(G_i)$ si trovano nei punti $t_r^{(i)} = \tau^{(i)} \exp\{-i\varrho(\vartheta^{(i)} + 2r\pi)\}$ $(r = 0, 1, 2, ..., q-1)$ e questi punti sono tutti poli o tutti singolarità essenziali con parti caratteristiche analoghe. Ne segue:

5) $G_i(t) \in \mathcal{C}_1$ e non $\in \mathcal{C}_1^*$, a meno che non sia $F_i(z) \in \mathcal{C}_\varrho^0$ nel qual caso risulta $G_i(t) \in \mathcal{C}_1^0$;

6) $\mathcal{QV}(G_i) = \mathcal{S}(G_i) = \varrho\{\vartheta^{(i)} + 2r\pi\}$ (mod 2π).

Poniamo ora $G(t) = G_1(t) \cdot G_2(t)$. Essendo $\mathcal{B}_1(G) = \mathcal{B}_1(G_1) \oplus \mathcal{B}_1(G_2)$, le singolarità di $\mathcal{B}_1(G)$ vanno ricercate nei punti (16)

$$(6.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} t_{r,s} = \tau^{(1)} \exp\{-i\ \varrho(\vartheta^{(1)} + 2r\pi)\} + \tau^{(2)} \exp\{-i\ \varrho(\vartheta^{(2)} + 2s\pi)\} \\ \qquad\qquad (r,\ s = 0,\ 1,\ \ldots,\ q-1). \end{array} \right.$$

Questi punti, se sono tutti distinti, sono necessariamente singolari e sono al più singolarità essenziali (17) per $\mathcal{B}_1(G)$; se invece non sono tutti distinti, la sovrapposizione delle singolarità potrebbe portare alla elisione della singolarità stessa: questa sovrapposizione di singolarità non può però verificarsi per i punti $t_{r,s}$ che compaiono nel sistema (6.2) *una volta sola* e quindi per almeno due di essi (18) e, in particolare, per i punti $t_{r,s}$ di modulo massimo (19).

Allora, poichè $\mathcal{B}_\varrho(F)$ è la trasformata mediante la sostituzione $z = t^q$ di $\mathcal{B}_1(G) \cdot t^{1-q}$, ne segue il Teorema III.

Teorema IV. *Siano* $F_1(z), F_2(z) \in \mathcal{C}_\varrho$ ($\varrho = 1/q$, q *intero* > 1); $F(z) = F_1(z) \cdot F_2(z)$; $\tau_h^{(1)}, \vartheta_h^{(1)}$ ($h = 0, 1, \ldots, m_1$) *associati a* $F_1(z)$; $\tau_k^{(2)}, \vartheta_k^{(2)}$ ($k = 0, 1, \ldots, m_2$) *associati a* $F_2(z)$ (20). *Poniamo*

$$(6.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau(h,\ r;\ k,\ s) \exp\{i\varrho\ \vartheta(h,\ r;\ k,\ s)\} = \tau_h^{(1)} \exp\{i\ \varrho\ \ (\vartheta_h^{(1)} + 2r\pi)\} + \\ \qquad\qquad + \tau_k^{(2)} \exp\{i\ \varrho\ \ (\vartheta_k^{(2)} + 2s\pi)\}, \\ \qquad 0 \leqslant h \leqslant m_1,\ 0 \leqslant k \leqslant m_2\ (20); \\ 0 \leqslant r \leqslant q-1,\ 0 \leqslant s \leqslant q-1; \qquad 0 \leqslant \vartheta(h,\ r;\ k,\ s) < 2\pi . \end{array} \right.$$

---

(16) Vedi la annotazione (12).

(17) R. Wilson ([19], teoremi I e II, pp. 486-487).

(18) Vedi la annotazione (14).

(19) Vedi la annotazione (15).

(20) O anche $0 < h \leqslant m_1$, $0 < k \leqslant m_2$, qualora nella rappresentazione tipica di $F_1(z)$ e $F_2(z)$ manchi il termine della classe $\mathcal{C}_\varrho^0$.

Allora $F(z) \in \mathfrak{C}_\varrho$ *e, se* $F_1(z)$ *o* $F_2(z)$ *non* $\in \mathfrak{C}_\varrho^0$, *risulta*

$$\operatorname{ord} F = \varrho, \quad \tau = \tau(F) = \max \tau(h, r; k, s),$$

$\mathcal{S}(F)$ *è l'insieme dei* $\vartheta(h, r; k, s)$ *pei quali* $\tau(h, r; k, s) = \tau$,

$\mathfrak{W}(F)$ *è contenuto nell'insieme dei* $\vartheta(h, r; k, s)$,

$\mathfrak{W}(F)$ *contiene almeno tutti i* $\vartheta(h, r; k, s)$ *tali che* $\tau(h, r; k, s) \exp\{i\varrho \cdot \vartheta(h, r; k, s)\}$ *compare nel sistema* (6.3) *una volta sola.*

La dimostrazione di questo teorema procede in modo del tutto analogo a quella del Teorema III.

Osservazione. Se $F(z) \in \mathfrak{C}_\varrho^*$ $[\varrho = p/q$ con p, q interi, $(p, q) = 1]$ ed ha la forma $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{np+m}$ (m intero $\geqslant 0$), la sostituzione $z^p = Z$ muta $F(z)$ in $Z^{m/n} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n = Z^{m/n} \cdot \Phi(Z)$, con $\Phi(Z) \in \mathfrak{C}_{1/q}^*$ e $\tau(\Phi) = \tau(F)$. I teoremi di questo paragrafo sono dunque applicabili anche a funzioni della forma sopra indicata.

Bibliografia.

[1] V. BERNSTEIN, *Sur une généralization de la méthode de sommation exponentielle de M. Borel*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 1887-1889.

[2] V. BERNSTEIN, *Sulla crescenza delle trascendenti intere di ordine finito*, Mem. R. Accad. Italia **4** (1933), 339-401.

[3] V. BERNSTEIN, *Sopra una proposizione relativa alla crescenza delle funzioni olomorfe*, Ann. R. Scuola Norm. Super. Pisa (2) **2** (1933), 381-399.

[4] V. BERNSTEIN, *Sulla trasformazione di Hurwitz e sui funzionali lineari misti*, Mem. R. Accad. Italia **6**, Parte I (1935), 521-599.

[5] V. BERNSTEIN, *Sulle proprietà caratteristiche delle indicatrici di crescenza delle trascendenti intere di ordine finito*, Mem. R. Accad. Italia **7** (1936), 131-189.

[6] L. BIEBERBACH, *Analytische Fortsetzung*, Berlin 1955.

[7] R. P. BOAS jr., *Entire Functions*, New Jork 1954.

[8] A. J. MACINTYRE, *Laplace's transformation and integral functions*, Proc. London Math. Soc. (2) **45** (1938), 1-20.

[9] S. MANDELBROJT, *Les singularitées des fonctions réprésentées par une série de Taylor*, Mémor. Sci. Math. **54**, Paris 1932.

[10] G. PÓLYA, *Untersuchüngen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen*, Math. Z. **29** (1929), 549-640.

[11] A. PFLÜGER, *Über eine interpretation gewisser Konvergenz-und Fortsetzungseigenschaften Dirichlet'scher Reihen*, Comment. Math. Helv. **8** (1935-36), 3-43.

[12] E. PHRAGMÉN-E. LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse et sur quelques propriétées des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier*, Acta Math. **31** (1908), 381-406.

[13] D. ROUX, *Sulla composizione per somma di due sistemi di numeri complessi e applicazione alle funzioni analitiche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **17** (1962), 48-53.

[14] G. VALIRON, *Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 1305-1308.

[15] G. VALIRON, *Sur les directions de Borel de certaines fonctions entières d'ordre infini*, C. R. Acad. Sci. Paris **194** (1932), 1552-1555.

[16] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford 1939.

[17] R. WILSON, *A note on a theorem of Pólya's*, Quart. J. Math., Oxford (2) **3** (1952), 145-150.

[18] R. WILSON, *Directions of strongest growth of the product of integral functions of finite order and mean type*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 185-193.

[19] R. WILSON, *Some applications of the Hurwitz-Pincherle composition theory*, J. London Math. Soc. **28** (1953), 484-490.

Summary.

In this Note we are concerned with the so-called « secondary directions of strongest growth » of an entire function, introduced by R. Wilson. We state some considerations with the purpose of focusing this notion and we give some properties of the directions of strongest growth of the product of integral functions in some particular cases.

* * *