Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 283-293

G. GHELARDONI (*)

Una particolare applicazione del metodo di Runge-Kutta alla determinazione di un integrale di una equazione differenziale lineare, di ordine n, verificante n condizioni lineari assegnate. (**)

Come è noto, il metodo di RUNGE-KUTTA consente di risolvere numericamente il sistema di equazioni differenziali:

$$y_i = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n),$$

assegnate che siano le condizioni di CAUCHY.

Qui vogliamo indicare una particolare applicazione del metodo stesso alla determinazione di un integrale di una equazione differenziale lineare di ordine n, verificante n condizioni lineari assegnate (1).

1. – Sia data l'equazione differenziale (lineare di ordine n):

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y = H(x), \tag{1}$$

con $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, $H(x)$ continue in $[\alpha, \beta]$.

(*) Indirizzo: Servizio Calcoli della C.E.P., Lung'Arno Pacinotti 55, Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 16-III-1962. Lavoro eseguito presso il Servizio Calcoli del C.S.C.E. di Pisa, secondo il programma di ricerche del gruppo n. 2 del C.O.N.A.R.M. .

(1) Il procedimento seguito è stato programmato e applicato nella risoluzione di numerosi problemi.

Vogliamo determinare (nell'ipotesi che esista) un integrale della (1) che verifichi le n condizioni:

$$\sum_{i=1}^{h} \sum_{r=0}^{n-1} a_{t,i,r}\, y^{(r)}(\bar{x}_i) = k_t \qquad (t = 1, 2, \ldots, n), \tag{2}$$

con $\alpha \leqslant \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \ldots < \bar{x}_h \leqslant \beta$ (2). (In particolare un integrale passante per i punti $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, $\alpha \leqslant \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \ldots < \bar{x}_n \leqslant \beta$).

Diciamo $\varphi_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ gli integrali particolari dell'equazione omogenea corrispondente alla (1):

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = 0, \tag{3}$$

che verificano le condizioni di CAUCHY:

$$\varphi_r^{(s-1)}(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{se } s = r \\ 0 & \text{se } s \neq r \end{cases} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n; \quad s = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$y_0(x)$ l'integrale particolare dell'(1) verificante condizioni di CAUCHY arbitrarie: ad es. per semplicità:

$$y_0(\alpha) = 1, \quad y_0^{(r)}(\alpha) = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{5}$$

Poichè gli n integrali particolari $\varphi_i(x)$ della (3) formano sistema fondamentale (principale), l'integrale generale della (1) è:

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x) + y_0(x). \tag{6}$$

Le condizioni (2) dànno luogo ad un sistema lineare nelle c_i [sistema che nel caso particolare del passaggio per gli n punti $P_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$ è:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(\bar{x}_r) = \bar{y}_r - y_0(\bar{x}_r) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)]. \tag{7}$$

(2) « Nell'ipotesi che esista », in quanto un tale integrale può anche non esistere. Si prenda ad es. l'equazione $y'' + y = x - 1$ e si impongano come condizioni il passaggio per i punti $(0, 1)$ e $(\pi, 0)$. Le condizioni che risultano imposte in conseguenza alle c_i dell'integrale generale: $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x - 1$, risultano $c_1 = 2$, $c_1 = \pi - 1$, tra loro incompatibili.

Se $\overline{c}_1, \overline{c}_2, \ldots, \overline{c}_n$ è soluzione del suddetto sistema, un integrale della (1) che verifica le condizioni assegnate è dato da:

$$y_*(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \varphi_i(x) + y_0(x) .$$

È subito visto quali siano le condizioni di CAUCHY che caratterizzano tale $y_*(x)$.

Infatti, essendo:

$$y_*^{(r-1)}(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c}_i \, \varphi_i^{(r-1)}(\alpha) + y_0^{(r-1)}(\alpha) \qquad (r = 1, 2, \ldots, n) , \tag{8}$$

dalle (4) e (5) si trae:

$$y_*(\alpha) = \overline{c}_1 + 1, \qquad y_*^{(r)}(\alpha) = \overline{c}_{r+1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, n-1) . \tag{9}$$

Il problema è perciò ricondotto ad un problema di CAUCHY.

2. – Consideriamo i sistemi di equazioni differenziali in cui si trasformano rispettivamente la (1) e la (3) ed esaminiamo, per semplicità, il caso in cui le condizioni imposte siano rappresentate dal passaggio per gli n punti $P_i(\overline{x}_i, \overline{y}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ [sono evidenti le modifiche da apportare al seguito nel caso più generale delle condizioni (2)]:

$$(1') \qquad \begin{cases} {}'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \hbar = H(x) - [a_1(x) y_n + a_2(x) y_{n-1} + \ldots + a_n(x) y_1] , \end{cases}$$

$$(3') \qquad \begin{cases} y'_1 = y_2 \\ y'_2 = y_3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y'_n = -[a_1(x) y_n + a_2(x) y_{n-1} + \ldots + a_n(x) y_1] . \end{cases}$$

Supponiamo $x_1 > \alpha$ (è evidente il cambiamento da apportare al seguito se $x_1 = \alpha$).

Applichiamo al sistema (3′) il metodo di RUNGE-KUTTA, condizioni iniziali di CAUCHY essendo:

$$y_1(\alpha) = 1\,, \qquad y_r(\alpha) = 0 \qquad (r = 2,\ 3,\ \ldots,\ n)\,, \tag{10}$$

e $(\alpha,\ x_1)$ l'intervallo di integrazione.

Ottenuti così:

$$y_1(x_1),\ y_2(x_1),\ \ldots,\ y_n(x_1)\,,$$

applichiamo ancora il metodo di RUNGE-KUTTA al sistema (3′), le condizioni di CAUCHY (punto iniziale $x = x_1$) essendo date dai valori $y_r(x_1)$ sopra ottenuti e l'intervallo di integrazione essendo $(x_1,\ x_2)$. Otterremo così:

$$y_1(x_2),\ y_2(x_2),\ \ldots,\ y_n(x_2)\,.$$

Così continuiamo fino ad ottenere:

$$y_1(x_n),\ y_2(x_n),\ \ldots,\ y_n(x_n)\,.$$

È ovvio che i numeri ottenuti:

$$y_1(x_1),\ y_1(x_2),\ \ldots,\ y_1(x_n)$$

sono (cfr. n. **1**) ordinatamente uguali a:

$$\varphi_1(x_1),\ \varphi_1(x_2),\ \ldots,\ \varphi_1(x_n)\,.$$

Ripetiamo quindi il procedimento sostituendo le (10) con le:

$$y_2(\alpha) = 1, \qquad y_r(\alpha) = 0 \qquad (r = 1,\ 3,\ \ldots,\ n) \tag{10′}$$

Calcoleremo così:

$$\varphi_2(x_1),\ \varphi_2(x_2),\ \ldots,\ \varphi_2(x_n)\,.$$

Ripetendo ancora successivamente potremo determinare la matrice dei coefficienti del sistema (7).

Passiamo quindi ad integrare (sempre adoperando il metodo di RUNGE-KUTTA) il sistema (1′) con un procedimento del tutto analogo a quello prima seguito, partendo dalle condizioni iniziali:

$$y_1(\alpha) = 1, \quad y_r(\alpha) = 0 \qquad (r = 2, 3, \ldots, n). \tag{10''}$$

I numeri:

$$y_1(x_1),\ y_1(x_2),\ \ldots,\ y_1(x_n)$$

che via via calcoliamo sono (cfr. n. **1**) ordinatamente uguali a:

$$y_0(x_1),\ y_0(x_2),\ \ldots,\ y_0(x_n).$$

Questi ultimi risultati consentono di scrivere la colonna dei termini noti del sistema (7).

Sia $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n$ soluzione di detto sistema: integriamo il sistema (1′), condizioni iniziali di CAUCHY essendo (a norma delle (9)):

$$y_1(\alpha) = \bar{c}_1 + 1, \quad y_r(\alpha) = \bar{c}_r \qquad (r = 2, 3, \ldots, n). \tag{11}$$

Poichè il problema è ricondotto ad un problema con condizioni di CAUCHY, potremo applicare di nuovo il metodo di RUNGE-KUTTA.

La $y_1(x)$ che otterremo non è altro che la $y_*(x)$ del n. **1**, cioè è soluzione del problema inizialmente propostoci.

3. – 1° Esempio [3]. Trascriviamo i risultati ottenuti applicando il procedimento esposto all'equazione differenziale:

$$y^{(IV)} + 2y'' + y = x, \tag{12}$$

l'intervallo (α, β) essendo l'intervallo $(0, 2\pi)$, condizioni imposte essendo le seguenti:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad y(\pi) = \pi - 1, \quad y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{3}{2}\pi, \quad y(2\pi) = 2\pi + 1 \ \text{[4]}. \tag{13}$$

---

[3] I calcoli sono stati eseguiti con la C.E.P. (Calcolatrice Elettronica Pisana).

[4] La soluzione, che si trova facilmente, è $y = \cos x + x$. L'esempio ha perciò soltanto valore indicativo come esperienza di macchina. Non altrettanto accade per il secondo e terzo esempio.

Il metodo di RUNGE-KUTTA è stato applicato ai sistemi:

$$(1'')\quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = x - y_1 - 2y_3, \end{cases} \qquad (3'')\quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = -y_1 - 2y_3, \end{cases}$$

scegliendo il passo $h = 2^{-5}$.

Tabella 1.

Si riferisce al sistema (3′). Le condizioni iniziali sono:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0.$$

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	1	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0.785398	— 0.499999	— 0.785398	— 0.499999
π	— 0.999999	— 1.570794	0.000000	1.570794
$\frac{3}{2}\pi$	— 2.356191	0.499999	2.356191	0.499999
2π	0.999998	3.141589	0.000001	— 3.141589

Tabella 2.

Si riferisce al sistema (3″). Le condizioni iniziali sono:

$$y_2(0) = 1, \quad y_1(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0.$$

x	y_1	y_1	y_3	y_4
0	0	1	0	0
$\frac{\pi}{2}$	1.499999	0.785397	— 0.500000	— 0.785398
π	1.570795	— 1.000000	— 1.570795	0.000001
$\frac{3}{2}\pi$	— 1.499999	— 2.356191	0.500000	2.356191
2π	— 3.141589	0.999998	3.141589	— 0.000001

Tabella 3.

Si riferisce al sistema (3″). Le condizioni iniziali sono:

$$y_3(0) = 1, \quad y_1(0) = y_2(0) = y_4(0) = 0 .$$

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	1	0
$\frac{\pi}{2}$	0.785398	0.500000	— 0.785398	— 1.499999
π	0.000001	— 1.570794	— 0.999999	1.570794
$\frac{3}{2}\pi$	— 2.356191	— 0.500000	2.356191	1.499999
2π	0.000001	3.141589	1.000000	— 3.141589

Tabella 4.

Si riferisce al sistema (3″). Le condizioni iniziali sono:

$$y_4(0) = 1, \quad y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = 0 .$$

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0	0	0	1
$\frac{\pi}{2}$	0.499999	0.785397	0.499999	— 0.785397
π	1.570794	0.000000	— 1.570794	0.999998
$\frac{3}{2}\pi$	— 0.499999	— 2.356190	— 0.499999	2.356190
2π	— 3.141589	— 0.000001	3.141589	0.999998

Tabella 5.

Si riferisce al sistema (1″). Le condizioni iniziali sono:

$$y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = y_3(0) = y_4(0) = 0 .$$

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	1	0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	0.856194	— 0.285397	— 0.285397	0.285397
π	0.570798	0.429205	1.570794	1.570794
$\frac{3}{2}\pi$	3.856192	3.856192	1.856192	— 1.856191
2π	10.424770	3.141589	— 3.141589	— 3.141589

Il sistema lineare (7) è nel caso attuale:

$$
(7') \quad \begin{cases}
0.785398\, c_1 + 1.499999\, c_2 + 0.785398\, c_3 + 0.499999\, c_4 = -\ 0.856194 \\
-\ 0.99999\ \ c_1 + 1.570795\, c_2 + 0.000001\, c_3 + 1.570794\, c_4 = -1 - 0.570796 \\
-\ 2.356191\, c_1 - 1.499999\, c_2 - 2.356191\, c_3 - 0.499999\, c_4 = -\ 3.856192 \\
0.999998\, c_1 - 3.141589\, c_2 - 0.000001\, c_3 - 3.141589\, c_4 = +1 + 10.424770.
\end{cases}
$$

Risolvendo il sistema lineare si ha:

$$
c_1 = 0.000000; \quad c_2 = 1.00000; \quad c_3 = -1.000000; \quad c_4 = 0.000000.
$$

Perciò (ultima fase del procedimento) dobbiamo applicare ancora al sistema (1″) il metodo di RUNGE-KUTTA, condizioni di CAUCHY essendo:

$$
(15) \qquad y_1(0) = 1, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = -1, \quad y_4(0) = 0\,.
$$

I risultati ottenuti sono contenuti nella tabella seguente:

Tabella 6.

Si riferisce al sistema (1′). Le condizioni iniziali sono le (15).

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	1	1	-1	0
$\frac{\pi}{2}$	1.570796	0.000000	0.000000	1.000000
π	2.141592	1.000000	0.999999	0.000000
$\frac{2}{3}\pi$	4.712388	1.999999	0.000000	$-$ 0.999999
2π	7.283185	1.000000	$-$ 0.999999	0.000000

Come si vede dunque le condizioni imposte sono verificate.

2° Esempio. Vogliamo integrare l'equazione differenziale:

$$y^{(IV)} + 4x^2 y'' + 12xy' + 4(2 + x)y = 4x \operatorname{sen}(x^2),$$

l'intervallo (α, β) essendo $(0, 1)$, le condizioni imposte essendo:

$$(16) \qquad \begin{cases} y(0.25) = 0.062459, & y(0.5) = 0.494808 \\ y(0.875) = 2.425456, & y(1) = 3.365884 . \end{cases}$$

Trascriviamo soltanto i risultati finali ottenuti applicando il procedimento dell'esempio precedente tabellati con passo 0.0625.

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0.205595	— 1.530567	6.870022	9.613129
0.0625	0.123742	— 1.082495	7.467296	9.516797
0.125	0.071058	— 0.597227	8.060937	9.483256
0.1875	0.049861	— 0.074923	8.652184	9.424496
0.25	*0.062459*	0.484154	9.236408	9.240978
0.3125	0.111131	1.079252	9.802404	8.821808
0.375	0.198082	1.708695	10.331699	8.045473
0.4375	0.325371	2.369407	10.797934	6.781500
0.5	*0.494808*	3.056406	11.166387	4.893486
0.5625	0.707818	3.762272	11.393750	2.243919
0.625	0.965271	4.476613	11.428260	— 1.298760
0.6875	1.267284	5.185551	11.210364	— 5.850467
0.75	1.612984	5.871278	10.674073	— 11.498858
0.8125	2.000254	6.511715	9.749203	— 18.287695
0.875	*2.425456*	7.080350	8.364861	— 26.198357
0.9375	2.883162	7.546313	6.453084	— 35.129066
1	*3.365884*	7.874786	3.956518	— 44.872922

Come si vede, le (16) sono verificate.

3° Esempio. Vogliamo integrare l'equazione differenziale

$$y^{(IV)} - 3\,(\operatorname{sen} x)y''' + 2xy = e^{-x},$$

l'intervallo $(\alpha,\ \beta)$ essendo $(0,2)$, condizioni imposte essendo le seguenti:

$$(17)\qquad \begin{cases} y(0.5) = -0.120620, & y(0.5) = -0.897534 \\ y(1.25) = -0.307423, & y(1.75) = 0.778221\,. \end{cases}$$

Anche qui trascriviamo soltanto i risultati finali ottenuti applicando il procedimento descritto nel n. 2, tabellati con passo 0.125.

x	y_1	y_2	y_3	y_4
0	0.465199	0.414999	0.875420	0.457209
0.125	0.295323	− 1.301677	0.940328	0.581871
0.25	0.140160	− 1.179243	1.021519	0.721733
0.375	0.000983	− 1.045480	1.122433	0.901883
0.5	*− 0.120620*	*− 0.897534*	1.249912	1.152477
0.625	− 0.222646	− 0.731437	1.415141	1.513761
0.75	− 0.302489	− 0.541471	1.635306	2.042806
0.875	− 0.356676	− 0.319262	1.936253	2.822999
1	− 0.380455	− 0.052460	2.356572	3.977508
1.125	− 0.367183	0.277208	2.953680	5.687983
1.25	*− 0.307423*	0.696814	3.812614	8.219353
1.375	− 0.187590	1.246399	5.058292	11.950212
1.5	0.012012	1.984939	6.871761	17.405158
1.625	0.320053	2.998574	9.510155	25.279830
1.75	*0.778220*	4.411476	13.328467	36.440825
1.875	1.446786	6.399328	18.798316	51.872506
2	2.411993	9.204515	26.514927	72.535282

Come si vede, le (17) (compatibilmente con gli errori di arrotondamento commessi nei calcoli e con l'errore portato dalla applicazione del metodo di RUNGE-KUTTA: cfr. la condizione relativa al punto $x = 1.75$) sono verificate.

Bibliografia.

G. CASSINIS, *Calcoli numerici, grafici e meccanici*, Ed. Mariotti-Pacini, Pisa 1928.

L. COLLATZ, *The numerical treatment of differential equations*, Springer, Berlin 1960.

* * *