Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 249-257

LUIGI ANTONIO ROSATI (*)

# Su una definizione assiomatica di determinante sopra un corpo non commutativo. (**)

Da molti autori sono state date estensioni della nozione di determinante al caso non commutativo. Nella maggior parte di queste generalizzazioni [3], [5], [6] il determinante della matrice quadrata $A$ viene inteso come una funzione degli elementi di $A$ che si annulla se, e solamente se, $A$ è singolare e che, se $A$ è invertibile, permette di risolvere, con una regola analoga a quella di CRAMER, un sistema lineare la cui matrice dei coefficienti delle incognite sia $A$.

Invece i determinanti introdotti da J. DIEUDONNÉ [1] forniscono una rappresentazione del gruppo delle matrici quadrate invertibili ad elementi in un corpo $K$ sopra il gruppo $K^*/C$, essendo $K^*$ il gruppo moltiplicativo di $K$, e $C$ il suo derivato, ma non sono adatti alla risoluzione dei sistemi lineari. Di essi è stata data una definizione assiomatica da J. GÁSPÁR [2].

Una terza specie di determinanti è stata considerata da O. ORE [4]. I determinanti introdotti da ORE hanno però l'inconveniente di essere definiti a meno di una relazione d'equivalenza comprendente due sole classi: quella delle matrici regolari e quella delle matrici singolari.

In questa Nota si dà una definizione assiomatica dei determinanti intesi nel primo dei sensi da noi ricordati. Pur essendo diversi, essi hanno qualche proprietà in comune con i determinanti di R. RICHARDSON [5]. Nel caso commutativo i determinanti qui introdotti coincidono con gli ordinari determinanti e ci sembra che per la sua semplicità la nostra definizione possa avere interesse anche dal punto di vista didattico.

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 6-V-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 8 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62.

Sia $K$ un corpo qualunque e sia $I$ l'insieme delle matrici quadrate ad elementi in $K$. Sia poi $f$ un'applicazione di $I$ in $K$.

Diremo che $f(A)$ è il determinante destro della matrice quadrata $A = \| a_{ij} \|$, e scriveremo $f(A) = | a_{ij} \|$ o anche $f(A) = | A \|$, se $f$ soddisfa alle seguenti condizioni:

a) Il determinante di una matrice quadrata $A$ viene moltiplicato a sinistra per un elemento $h$ di $K$ se tutti gli elementi dell'ultima colonna di $A$ vengono moltiplicati a sinistra per $h$.

b) Il determinante di una matrice quadrata $A$ non muta se all'ultima colonna di $A$ viene aggiunta una combinazione lineare sinistra (cioè con coefficienti a sinistra appartenenti a $K$) delle altre colonne.

c) Siano $A_{1n}, A_{2n}, \ldots, A_{nn}$ i minori complementari degli elementi dell'ultima colonna della matrice $A$. Se $| A_{1n} \| = \ldots = | A_{nn} \| = 0$, allora $| A \| = 0$.

d) Se $| A_{1n} \|, \ldots, | A_{nn} \|$ non sono tutti nulli e $| A_{in} \|$ è l'ultimo di essi diverso da zero, allora:

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & \ldots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{matrix} \right\| = (-1)^{i+n} \, | A_{in} \| \, .$$

e) Si ha $| a_{11} \| = a_{11}$.

Cominciamo col dimostrare il

T e o r e m a 1. *Se il sistema lineare*

$$x_1 a_{i1} + \ldots + x_n a_{in} = \alpha_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

*ammette la soluzione* $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ *si ha*

$$\bar{x}_n \, | A \| = | A_n \| \, ,$$

*dove* $| A_n \|$ *è il determinante della matrice che si ottiene sostituendo l'ultima colonna della matrice* $| A \| = | a_{ij} \|$ *con la colonna dei termini noti.*

Infatti, tenuto conto delle (1), si ha che $| A_n \|$ si ottiene da $| A \|$ moltiplicandone a sinistra l'ultima colonna per $\overline{x}_n$ e aggiungendo le altre $n-1$ colonne moltiplicate rispettivamente a sinistra per $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}$. Pertanto per a) e per b)

$$\overline{x}_n \, | A \| = | A_n \| .$$

Corollario. *Se il sistema* (1) *è risolubile ed è* $| A \| = 0$, *allora anche* $| A_n \| = 0$ .

Teorema 2. *Se è* $A = | a_{ij} \| \neq 0$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ *il sistema lineare* (1) *ammette una e una sola soluzione.*

Il Teorema è vero per sistemi di una sola equazione ad una incognita. Supponiamolo vero per sistemi di $n-1$ equazioni ad $n-1$ incognite e dimostriamo che, se è $| A \| \neq 0$, il sistema (1) ammette una e una sola soluzione. Siccome è $| A \| \neq 0$, si ha che $| A_{1n} \|, \ldots, | A_{nn} \|$ non saranno tutti nulli: sia $| A_{in} \|$ l'ultimo di essi diverso da zero.

Il sistema lineare

$$(2) \qquad \begin{cases} x_1 a_{j1} + \ldots + x_{n-1} a_{j,n-1} = a_{jn} & (j = 1, \ldots, i-1) \\ x_1 a_{l1} + \ldots + x_{n-1} a_{l,n-1} = a_{ln} & (l = i+1, \ldots, n) \end{cases}$$

avrà una e una sola soluzione $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1})$ e quindi avrà una e una sola soluzione $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{n-1}, \overline{y})$ anche il sistema formato dalle equazioni (2) e dall'equazione

$$(3) \qquad x_1 a_{i1} + \ldots + x_{n-1} a_{i,n-1} + y = a_{in} .$$

Per il Teorema 1 si avrà

$$\overline{y} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,n-1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix} = | A \| ,$$

ossia per la d) sarà:

$$(4) \qquad (-1)^{i+n}\ \overline{y}\ |A_{in}\| = |A\|,$$

e poichè $|A\| \neq 0$ risulterà $\overline{y} \neq 0$.

Analogamente avrà una e una sola soluzione $(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, y^*)$ il sistema:

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 a_{j1} + \dots + x_{n-1} a_{j,n-1} = \alpha_j & (j = 1, \dots, i-1) \\ x_1 a_{i1} + \dots + x_{n-1} a_{i,n-1} + y = \alpha_i & \\ x_1 a_{l1} + \dots + x_{n-1} a_{l,n-1} = \alpha_l & (l = i+1, \dots, n). \end{cases}$$

Tenuto conto delle (2), (3) il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} (x_1 + x_n \overline{x}_1) a_{j1} + \dots + (x_{n-1} + x_n \overline{x}_{n-1}) a_{j,n-1} = \alpha_j & (j = 1, \dots, i-1) \\ (x_1 + x_n \overline{x}_1) a_{i1} + \dots + (x_{n-1} + x_n \overline{x}_{n-1}) a_{i,n-1} + x_n \overline{y} = \alpha_i & \\ (x_1 + x_n \overline{x}_1) a_{l1} + \dots + (x_{n-1} + x_n \overline{x}_{n-1}) a_{l,n-1} = \alpha_l & (l = i+1, \dots, n). \end{cases}$$

Di conseguenza, se il sistema (1) ha la soluzione $(x_1, \dots, x_n)$, poichè $(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, y^*)$ è l'unica soluzione del sistema (5), si avrà

$$(6) \qquad x_j + x_n \overline{x}_j = x_j^* \qquad (j = 1, \dots, n-1),$$

$$(7) \qquad x_n\ \overline{y} = y^*.$$

Ma è $\overline{y} \neq 0$, quindi la (7) determina univocamente $x_n$ e le (6) determinano pure univocamente $x_1, \dots, x_{n-1}$. Si verifica facilmente che i valori $x_1, \dots, x_n$ forniti dalle (6) e (7) verificano il sistema (1) e il Teorema è dimostrato.

Abbiamo così anche dimostrato il seguente

Teorema 3. *Se $|A_{1n}\|, \dots, |A_{nn}\|$ non sono tutti nulli e $|A_{in}\|$ è l'ultimo di essi diverso da zero, allora*

$$|A\| = (-1)^{i+n}\ \overline{y}\ |A_{in}\|,$$

*dove $\overline{y}$ è l'unico valore di $y$ che soddisfi il sistema delle* (2), (3).

Pertanto:

Teorema 4. *Esiste al massimo un'applicazione $f$ di $I$ in $K$ soddisfacente alle condizioni* a), ..., e).

Infatti per induzione, tenuto conto dei teoremi 2 e 3, risulta univocamente determinato $|A\|$, essendo $A$ una qualunque matrice quadrata.

Teorema 5. *Esiste un'applicazione $f$ di $I$ in $K$ tale che posto $f(A) = |A\|$ risultino verificate le* a), ..., e).

Siccome esiste un'applicazione $f_1$ dell'insieme $I_1$ delle matrici d'ordine 1 in $K$ soddisfacente le a), ..., e), ci basterà dimostrare che, supposta l'esistenza di un'applicazione $f_{n-1}$ dell'insieme $I_{n-1}$ delle matrici quadrate d'ordine minore di $n$ in $K$ soddisfacente le condizioni a), ..., e), esiste anche un'applicazione $f_n$ dell'insieme $I_n$ delle matrici quadrate d'ordine $n$ in $K$ soddisfacente le condizioni a), ..., e) e la cui restrizione a $I_{n-1}$ è $f_{n-1}$.

Sia $A$ una qualunque matrice quadrata d'ordine $n$; se tutti i determinanti $|A_{1n}\|$, ..., $|A_{nn}\|$, d'ordine $n-1$, sono nulli, porremo:

$$f_n(A) \equiv |A\| = 0 .$$

In caso contrario, sia $|A_{in}\|$ l'ultimo dei determinanti $|A_{1n}\|$, ..., $|A_{nn}\|$ diverso da zero. Poichè $f_{n-1}$ verifica le condizioni a), ..., e), per sistemi di $n-1$ equazioni a $n-1$ incognite, potremo usare il Teorema 1 e il Teorema 2. Allora il sistema delle (2) ammetterà una e una sola soluzione e ammetterà una e una sola soluzione $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1}, \bar{y})$ anche il sistema delle (2), (3). Porremo

$$f_n(A) \equiv |A\| = (-1)^{i+n}\, \bar{y}\, |A_{in}\| . \tag{8}$$

Posto poi $f_n(B) = f_{n-1}(B)$, se $B$ è una matrice quadrata d'ordine $< n$, dimostreremo che anche $f_n$ verifica a), ..., e).

a) Sia $A'$ la matrice che si ottiene dalla matrice $A = \| a_{ij} \|$ con la sostituzione degli elementi $a_{in}$ $(i = 1, ..., n)$ dell'ultima colonna rispettivamente con $h\, a_{in}$ $(i = 1, ..., n)$. Dobbiamo provare che $|A'\| = h\, |A\|$. Se $|A_{1n}\| = ... = |A_{nn}\| = 0$, allora si ha $|A'\| = |A\| = 0$. Se invece $|A_{in}\|$ è l'ultimo dei determinanti $|A_{1n}\|$, ..., $|A_{nn}\|$ diverso da zero, si osservi che, detta $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1}, \bar{y})$ l'unica soluzione del sistema (2), (3), l'unica soluzione del sistema che si ottiene da (2), (3) sostituendo $a_{1n}, ..., a_{nn}$ rispettivamente con $h\, a_{1n}, ..., h\, a_{nn}$ è $(h\,\bar{x}_1, ..., h\,\bar{x}_{n-1}, h\,\bar{y})$. Perciò $|A'\| = h\, |A\|$.

b) Si dimostra analogamente, tenendo conto che se $(\bar{x}_1, ..., \bar{x}_{n-1}, \bar{y})$ è l'unica soluzione del sistema (2), (3), l'unica soluzione del sistema che si ottiene da (2), (3) sostituendo $a_{in}$ $(i = 1, ..., n)$ rispettivamente con $h\, a_{i1} + ... + h_{n-1}\, a_{in-1} + a_{in}$ è $(\bar{x}_1 + h_1, ..., \bar{x}_{n-1} + h_{n-1}, \bar{y})$.

c) Evidentemente la c) è verificata.

d) Per $a_{in} = 1$, $a_{jn} = 0$ $(j \neq i)$ e $|A_{in}\| \neq 0$, il sistema (2), (3) ha l'unica soluzione (0, ..., 0, 1). Dalla (8) discende allora la d).

e) Evidentemente è verificata.

Vogliamo ora dimostrare il

Teorema 5. *Si ha*

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} + a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} + a'_{nn} \end{matrix}\right\| = \left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{matrix}\right\| + \left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a'_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a'_{nn} \end{matrix}\right\|.$$

La dimostrazione si ottiene subito osservando che se il sistema (2), (3) e i sistemi che si ottengono da esso sostituendo $a_{jn}$ con $a'_{jn}$ o con $a_{jn} + a'_{jn}$ $(j = 1, \dots, n)$ hanno rispettivamente le soluzioni $(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$, $(x'_1, \dots, x'_{n-1}, y')$, $(x''_1, \dots, x''_{n-1}, y'')$, si ha $x''_i = x_i + x'_i$ $(i = 1, \dots, n)$ e $y'' = y + y'$.

Teorema 6. *Se due matrici d'ordine $n$ si ottengono l'una dall'altra mediante lo scambio di righe o mediante lo scambio di colonne, allora o i loro determinanti sono entrambi uguali a zero o entrambi diversi da zero.*

Siano $A$ e $A'$ due matrici tali che l'una si ottenga dall'altra mediante lo scambio di due colonne. Ci basterà dimostrare che se $|A\| = 0$, anche $|A'\| = 0$. Se $|A_{in}\| = |A'_{in}\| = 0$ $(i = 1, \dots, n)$ il Teorema è verificato. Supponiamo allora che $|A_{1n}\|, \dots, |A_{nn}\|$ non siano tutti nulli. Per il Teorema 3 esisteranno degli $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}$ non tutti nulli tali che si abbia

$$\bar{x}_1 a_{i1} + \dots + \bar{x}_{n-1} a_{i,n-1} = a_{in} \qquad (i = 1, \dots, n).$$

Avrà pertanto almeno una soluzione non banale il sistema

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = 0 \qquad (i = 1, \dots, n),$$

e quindi per il Teorema 2 sarà $|A'\| = 0$. Il resto del Teorema si dimostra facilmente per induzione.

Diciamo ora *caratteristica* di una matrice $M$ (non necessariamente quadrata) ad elementi appartenenti a $K$ il massimo ordine dei minori a determinante non nullo ottenibili da $M$.

Teorema 7. *Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema*

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_n a_{in} = a_{i,n+1} \qquad (i = 1, \dots, m) \tag{9}$$

*sia risolubile è che le due matrici*

$$A = \| a_{ij} \| \qquad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n),$$

$$A' = \| a_{st} \| \qquad (s = 1, \dots, m; \quad t = 1, \dots, n+1)$$

*abbiano la stessa caratteristica r.*

Supponiamo che $A$ e $A'$ abbiano entrambe la caratteristica $r$ e sia $B$ un minore qualunque d'ordine $r$ estratto da $A$ e tale che sia $| B \| \neq 0$. Modificando opportunamente, se è necessario, l'ordine delle equazioni e l'ordine delle incognite del sistema (9), possiamo supporre che sia $B = \| a_{ij} \|$ $(i, j = 1, \dots, r)$. Indichiamo $n - r$ elementi arbitrari di $K$ con $x'_{r+1}, \dots, x'_n$ e poniamo

$$\beta_i = a_{i,n+1} - x'_{r+1} a_{i,r+1} - \dots - x'_n a_{in} \qquad (i = 1, \dots, m).$$

Siccome $| B \| \neq 0$, il sistema

$$x_1 a_{i1} + \dots + x_r a_{ir} = \beta_i \qquad (i = 1, \dots, r) \tag{10}$$

ha una e una sola soluzione $(x'_1, \dots, x'_r)$. Bisogna dimostrare che $(x'_1, \dots, x'_n)$ verifica il sistema (9). Ci basterà far vedere che $(x'_1, \dots, x'_n)$ verifica la $s$-ma equazione del sistema (9), con $s > r$. Infatti

$$\left| \begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,n+1} \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & a_{s,n+1} \end{matrix} \right\| = 0,$$

perchè $A'$ ha caratteristica $r$ e perciò per il Teorema 5, tenuto conto che $A$ ha caratteristica $r$, si ha anche

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \beta_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \beta_r \\ a_{s1} & \dots & a_{sr} & \beta_s \end{matrix}\right\| = 0 .$$

Siccome $| a_{ij} \| \neq 0$ $(i, j = 1, \dots, r)$ per il Teorema 3 esisteranno $r$ elementi $k_1, \dots, k_r$ di $K$ tali che sia

$$k_1 a_{i1} + \dots + k_r a_{ir} = \beta_i \qquad (i = 1, \dots, r),$$

$$k_1 a_{s1} + \dots + k_r a_{sr} = \beta_s .$$

Ma il sistema (10) ha l'unica soluzione $(x_1', \dots, x_r')$; quindi si avrà $k_i = x_i'$ $(i = 1, \dots, r)$. Ne viene allora che $(x_1', \dots, x_n')$ verifica la $s$-ma equazione del sistema (9). È così dimostrato che la condizione è sufficiente.

Si vede subito che la condizione è anche necessaria.

Sulla traccia di quanto visto finora si dimostra facilmente il seguente:

Teorema 8. *Sia $A$ una matrice quadrata d'ordine $n$ e tale che tutti i minori d'ordine $n-1$ appartenenti alle sue prime $n-1$ righe abbiano determinante nullo. Allora* $| A \| = 0$ .

Risulta poi evidente il

Teorema 9. *Se tutti gli elementi di una riga o di una colonna della matrice $A$ sono uguali a zero, allora* $| A \| = 0$ .

È ovvio che i determinanti qui introdotti, nel caso di un corpo commutativo coincidono con i determinanti ordinari. Infatti, per i determinanti ordinari valgono le a), ..., e) che caratterizzano i nostri determinanti.

## Bibliografia.


[1] J. DIEUDONNÉ, *Les déterminants sur un corps non commutatif*, Bull. Soc. Math. France **81** (1943), 27-45.

[2] J. GÁSPÁR, *Eine axiomatische Theorie der Dieudonnéschen Determinanten*, Publ. Math. Debrecen **6** (1959), 298-302.

[3] A. HEYTING, *Die Theorie der linearen Gleichungen in einer Zahlenspezies mit nichtkommutativer Multiplication*, Math. Ann. **98** (1927), 465-490.

[4] O. ORE, *Linear equations in non commutative fields*, Ann. of Math. **32** (1931), 463-477.

[5] R. RICHARDSON, *Simultaneous linear equations over a division algebra*, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1928), 395-420.

[6] E. STUDY, *Zur Theorie der linearen Gleichungen*, Acta Math. **42** (1920), 1-61.


## Summary.


*It is introduced determinantes through assiomatic way over a non-commutative field. Their properties are studied and they are applied to the resolution of the linear equations' systems.*


* * *