Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 205-211

GIACOMINO BATTIONI (*)

Sulla fattorizzazione degli operatori alle differenze, lineari. (**)

Introduzione.

Nella presente Nota si mira a sviluppare l'argomento della « fattorizzazione degli operatori alle differenze, lineari » in guisa tale che i procedimenti seguiti e i risultati ottenuti diano, con un semplice passaggio al limite (1), procedimenti e risultati del Calcolo infinitesimale. Non mi risulta che ciò sia stato fatto.

In parallelismo con la notazione $D_x f(x)$ per la derivata di $f(x)$ userò la notazione $D_{x,h} f(x)$ per il rapporto incrementale $\{ f(x+h) - f(x) \}/h$. Pongo inoltre $\theta_{x,h} f(x) = f(x+h)$. Un operatore alle differenze, lineare, si può allora scrivere:

$$\mathfrak{L} \equiv a_n D^n_{x,h} + a_{n-1} D^{n-1}_{x,h} + \ldots + a_1 D_{x,h} + a_0 ,$$

con $a_r = a_r(x) \quad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Provo dapprima (n. 1): *Considerato un operatore $\mathfrak{L}$ alle differenze, lineare, d'ordine $n > 0$, e una funzione $\alpha = \alpha(x)$, esiste sempre un ben determinato operatore alle differenze, lineare,*

$$\overline{\mathfrak{L}} \equiv b_{n-1} D^{n-1}_{x,h} + b_{n-2} D^{n-2}_{x,h} + \ldots + b_1 D_{x,h} + b_0 ,$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 30-V-1962.
Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62.
(1) Precisamente, il passaggio al limite $\lim\limits_{h \to 0}$, come risulterà dal seguito.

[con $b_r = b_r(x)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, n-1)]$ *e una ben determinata funzione* $\varrho = \varrho(x)$, *in modo che si abbia*

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\cdot(\mathrm{D}_{x,h} - \alpha)} + \varrho\,. \tag{1}$$

In particolare (n. **2**): *Se* $\mu = \mu(x) \neq 0$ *è uno zero di* $\mathfrak{L}$ *e* α *è dato da*

$$\alpha = \frac{\mathrm{D}_{x,h}\,\mu}{\mu}\,, \tag{2}$$

si ha semplicemente

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\cdot(\mathrm{D}_{x,h} - \alpha)}\,. \tag{3}$$

Ne segue (n. **3**): *Dato un operatore* $\mathfrak{L}$ *alle differenze, lineare, esistono n funzioni opportune* $\alpha_1 = \alpha_1(x), \ldots, \alpha_n = \alpha_n(x)$ *tali che sia*

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{a_n\cdot(\mathrm{D}_{x,h} - \alpha_n)\ldots(\mathrm{D}_{x,h} - \alpha_1)}\,. \tag{4}$$

Infine (n. **4**): *La* (4) *si può anche scrivere nella forma*

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{a_n(\theta_{x,h}\,\mu_n)\,\mathrm{D}_{x,h}\,\frac{1}{\mu_n}\ldots(\theta_{x,h}\,\mu_1)\,\mathrm{D}_{x,h}\,\frac{1}{\mu_1}}\,, \tag{5}$$

essendo $(\mathrm{D}_{x,h}\,\mu_r)/\mu_r = \alpha_r$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Dalla (5) appare chiaramente (n. **5**) come si possa procedere per la *inversione dell'operatore* $\mathfrak{L}$: basta invertire successivamente (e in ordine inverso a quello indicato dalla sottolineatura orientata) gli operatori elementari figuranti nel secondo membro di (5). Pertanto: *La risoluzione di un'equazione alle differenze, lineare,*

$$\mathfrak{L}\,y(x) = f(x)\,, \tag{6}$$

omogenea o no, si riconduce a stabilire per l'operatore $\mathfrak{L}$ *la decomposizione* (5).

1. - Dimostrazione della (1).

Anzitutto, essendo $u = u(x)$, $v = v(x)$, e posto

$$\overline{\mathfrak{L}}^{(r)} = \frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}\mathrm{D}^r_{x,h}}\, \overline{\mathfrak{L}},$$

abbiamo la formula

$$\overline{\mathfrak{L}}(u\cdot v) = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}} u}\, v = \sum_0^{n-1}{}_r \frac{1}{r!}\,(\overline{\mathfrak{L}}^{(r)}\, \theta^r_{x,h}\, u)\mathrm{D}^r_{x,h} v\,,$$

la quale si verifica facilmente tenendo presente le espressioni di $\mathrm{D}^r_{x,h}(u\cdot v)$ per $r = 1, 2, \ldots, n-1$.

Ne segue, per il secondo membro di (1),

$$\underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\cdot(D_{x,h} - \alpha)} + \varrho = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\,\mathrm{D}_{x,h}} - \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\,\alpha} + \varrho =$$

$$= \sum_1^{n}{}_r\, b_{r-1}\mathrm{D}^r_{x,h} - \sum_0^{n-1}{}_r \frac{1}{r!}\,(\overline{\mathfrak{L}}^{(r)}\theta^r_{x,h}\alpha)\,\mathrm{D}^r_{x,h} + \varrho =$$

$$= b_{n-1}\mathrm{D}^n_{x,h} + \sum_1^{n-1}{}_r \left(b_{r-1} - \frac{1}{r!}\,\overline{\mathfrak{L}}^{(r)}\theta^r_{x,h}\alpha\right)\mathrm{D}^r_{x,h} + (\varrho - \overline{\mathfrak{L}}\alpha)\,,$$

e affinchè valga la (1) dovrà aversi:

$$\left\{\begin{array}{ll} b_{n-1} = a_n & \\ b_{r-1} - \dfrac{1}{r!}\,\overline{\mathfrak{L}}^{(r)}\theta^r_{x,h}\alpha = a_r & \quad (r = n-1,\ n-2,\ \ldots,\ 2,\ 1) \\ \varrho - \overline{\mathfrak{L}}\alpha = a_0\,. & \end{array}\right. \tag{7}$$

Tali eguaglianze determinano successivamente (in modo ricorrente) b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_1, b_0, ϱ (come si vede facilmente tenendo presente che $\overline{\mathfrak{L}}^{(r)}$ si esprime a mezzo dei soli b_{n-1}, b_{n-2}, ..., b_{r+1}, b_r).

2. - Dimostrazione della (3).

Se in (1) la funzione α è data da (2), la (1) stessa ci dà

$$\mathfrak{L}\,\mu = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\left(D_{x,h} - \frac{D_{x,h}\,\mu}{\mu}\right)}\,\mu + \varrho\,\mu\,,$$

ossia, essendo nullo il primo termine del secondo membro,

$$\mathfrak{L}\,\mu = \varrho\,\mu\,,$$

da cui

$$\varrho = \frac{\mathfrak{L}\,\mu}{\mu}.$$

Dunque: Se α è dato da (2), la (1) si scrive

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{\overline{\mathfrak{L}}\cdot(D_{x,h} - \alpha)} + \frac{\mathfrak{L}\,\mu}{\mu}\,. \tag{8}$$

Pertanto, se $\mu = \mu(x) \neq 0$ è uno zero di $\mathfrak{L}$, la (8) ci dà la formula (3) da dimostrare.

3. - Dimostrazione della (4).

Considerato un operatore $\mathfrak{L}$ alle differenze, lineare, di ordine $n > 0$, detto $\mu_1 = \mu_1(x) \neq 0$ un suo zero e posto $\alpha_1 = (D_{x,h}\,\mu_1)/\mu_1$, risulta, per la (3),

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{\mathfrak{L}_1\cdot(D_{x,h} - \alpha_1)}\,, \tag*{(9)$_1$}$$

dove $\mathfrak{L}_1$ è un opportuno operatore alle differenze, lineare, di ordine $n-1$, nel quale il coefficiente di $D_{x,h}^{n-1}$ è a_n [in virtù della prima delle (7)]. Qualora sia $n-1 > 0$, detto $\mu_2 = \mu_2(x) \neq 0$ uno zero di $\mathfrak{L}_1$ e posto $\alpha_2 = (D_{x,h}\,\mu_2)/\mu_2$, risulta parimenti

$$\mathfrak{L}_1 = \underleftarrow{\mathfrak{L}_2\cdot(D_{x,h} - \alpha_2)}\,, \tag*{(9)$_2$}$$

dove $\mathfrak{L}_2$ è un opportuno operatore alle differenze, lineare, di ordine $n-2$, nel quale il coefficiente di $D_{x,h}^{n-2}$ è ancora a_n. Proseguendo analogamente si avrà per $\mathfrak{L}_2$ una decomposizione della forma

$$(9)_3 \qquad \mathfrak{L}_2 = \underleftarrow{\mathfrak{L}_3 \cdot (D_{x,h} - \alpha_3)} .$$

Così continuando si otterrà

$$(9)_{n-1} \qquad \mathfrak{L}_{n-2} = \underleftarrow{\mathfrak{L}_{n-1} \cdot (D_{x,h} - \alpha_{n-1})} ,$$

dove $\mathfrak{L}_{n-1}$ è un opportuno operatore alle differenze, lineare, di primo ordine, della forma $a_n D_{x,h} + c$. Posto $\alpha_n = -c/a_n$, si ha

$$(9)_n \qquad \mathfrak{L}_{n-1} = \underleftarrow{a_n \cdot (D_{x,h} - \alpha_n)} .$$

Ciò premesso, si vede facilmente che l'espressione di $\mathfrak{L}$ data da (4) si ottiene subito nel modo seguente: in $(9)_1$ sostituiamo ad $\mathfrak{L}_1$ la sua espressione data da $(9)_2$, nell'eguaglianza così ottenuta sostituiamo ad $\mathfrak{L}_2$ la sua espressione data da $(9)_3$, e così via successivamente, fino a sostituire ad $\mathfrak{L}_{n-1}$ la sua espressione data da $(9)_n$.

4. - Dimostrazione della (5).

Applicando la formula

$$D_{x,h}(u \cdot v) = \underleftarrow{D_{x,h} u}\, v = (\theta_{x,h} u) \cdot D_{x,h} v + (D_{x,h} u) \cdot v ,$$

cioè, fra operatori, la formula

$$\underleftarrow{D_{x,h}\, u} = (\theta_{x,h}\, u) D_{x,h} + D_{x,h} u ,$$

si ha

$$\underleftarrow{(\theta_{x,h}\, \mu) D_{x,h} \frac{1}{\mu}} = (\theta_{x,h}\, \mu) \left\{ \left(\theta_{x,h} \frac{1}{\mu}\right) D_{x,h} + D_{x,h} \frac{1}{\mu} \right\} =$$

$$= (\theta_{x,h}\, \mu) \left\{ \frac{1}{\theta_{x,h}\, \mu} D_{x,h} - \frac{D_{x,h}\, \mu}{\mu \cdot \theta_{x,h}\, \mu} \right\} = D_{x,h} - \frac{D_{x,h}\, \mu}{\mu} ,$$

ossia

$$\underleftarrow{D_{x,h} - \alpha = (\theta_{x,h}\,\mu)\,D_{x,h}} \frac{1}{\mu}\,. \tag{10}$$

Applicando ripetutamente la (10), facendo ordinatamente $\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, la (4) prende la forma (5).

5. - Sulla risoluzione delle equazioni alle differenze, lineari.

A maggior chiarimento dell'affermazione fatta alla fine della «Introduzione» relativamente alla risoluzione di un'equazione (6) alle differenze, lineare, può giovare un esempio.

Sia da risolvere l'equazione

$$x(x+h)D^2_{x,h}\,y(x) - x\,D_{x,h}\,y(x) + y(x) = 1\,.$$

Si osserva subito che una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente è $y(x) = x$; ciò permette di scrivere facilmente l'operatore $\mathfrak{L} \equiv x(x+h)D^2_{x,h} - x\,D_{x,h} + 1$ nella forma (5):

$$\mathfrak{L} = \underleftarrow{x(x+h)\,D_{x,h}\,(x+h)\,D_{x,h}\,\frac{1}{x}}\,,$$

e quindi l'equazione proposta nella forma

$$\underleftarrow{x(x+h)D_{x,h}(x+h)D_{x,h}\,\frac{1}{x}}\;y(x) = 1\,.$$

Di qui segue successivamente

$$\underleftarrow{D_{x,h}(x+h)D_{x,h}\,\frac{1}{x}}\;y(x) = \frac{1}{x(x+h)}\,, \qquad \underleftarrow{(x+h)D_{x,h}\,\frac{1}{x}}\;y(x) = -\frac{1}{x} + \pi_1,$$

$$D_{x,h}\left(\frac{1}{x}\,y(x)\right) = -\frac{1}{x(x+h)} + \pi_1\,\frac{1}{x+h}\,, \qquad \frac{1}{x}\,y(x) = \frac{1}{x} + \pi_1\,\Psi_h(x+h) + \pi_2\,,$$

dove π_1 e π_2 sono arbitrarie funzioni periodiche di periodo h ed è $\Psi_h(x) = h\,D_x \log\Gamma(x/h)$. Infine risulta

$$y(x) = 1 + \pi_1\,x\,\Psi_h(x+h) + \pi_2\,x\,.$$

Riferimenti.

G. BOOLE, *Calculus of Finite Differences*, edited by J. F. MOULTON, Chelsea Publishing Company, New York.

S. PINCHERLE e U. AMALDI, *Le operazioni distributive e la loro applicazione all'Analisi*, Zanichelli, Bologna 1901 (cfr. Cap. X).

N. E. NÖRLUND, *Leçons sur les équations linéaires aux differences finies*, Gauthier-Villars, Paris 1929.

L. M. MILNE-THOMSON, *The Calculus of Finite Differences*, Mac Millan, London 1951.

A. MAMBRIANI, *Sulla risoluzione delle equazioni differenziali lineari*, Atti I° Congr. Un. Mat. Ital., Firenze 1938, pp. 231-237.

* * *