Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 193-204

BIANCA MANFREDI (*)

Una relazione fra le trasformazioni termoelastiche linearizzate di mezzi comprimibili ed incomprimibili. (**)

1. - Introduzione.

L'attuale rinnovato interesse per la Termoelasticità (dovuto forse all'estesa applicazione di essa alla moderna Aereodinamica) ha ottenuto, recentemente, risultati notevoli in svariati problemi concreti relativi a mezzi comprimibili (1). Molto meno estesa appare invece la letteratura relativa ai mezzi termoelastici incomprimibili (2). D'altra parte, *nell'ambito della teoria linearizzata* relativa alla statica non isoterma di mezzi elastici omogenei ed isotropi, in $[10]_4$ si delinea la possibilità di ignorare il vincolo d'incomprimibilità mediante una conveniente correzione della forma quadratica che compare nel teorema di MENABREA, e in $[6]_2$ si dimostra, proprio come avviene nel caso comprimibile, la completezza della soluzione generale del problema incomprimibile espressa mediante le funzioni potenziali di NEUBER e PAPKOVITCH. È naturale, perciò, che si ponga la questione della riconducibilità della soluzione di problemi termoelastici stazionari comprimibili alla soluzione di analoghi problemi incomprimibili, e viceversa.

Tale questione è precisamente l'oggetto di questa Nota. Si prova (n. 2) che: un opportuno cambiamento della distribuzione della temperatura [definito dalla relazione funzionale (2), riducibile, nei casi

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 24-IV-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito delle attività del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62.

(1) Si veda, ad esempio, la Bibliografia riportata in [7].

(2) Sono fondamentali in proposito le Memorie di A. SIGNORINI [10]; si veda inoltre [6].

più comuni, alla relazione lineare (7)], insieme con una conveniente definizione [data da (5)] dello scalare corrispondente al vincolo d'incomprimibilità, è sufficiente perchè lo spostamento e la deformazione caratteristici di una trasformazione stazionaria (supposta unica) di un solido comprimibile, S, omogeneo, isotropo e senza forze di massa, individuino anche una trasformazione stazionaria di un solido incomprimibile senza forze di massa e avente in comune con S le costanti termoelastiche e le forze superficiali esterne. È valida anche l'affermazione inversa (n. **3**). I risultati ottenuti si estendono poi al caso di solidi termoelastici soggetti a forze di massa conservative, del tipo delle forze gravitazionali e centrifughe (n. **5**).

Da ultimo (n. **6**) la risoluzione di un problema particolare comprova l'utilità della corrispondenza stabilita.

2. - Passaggio da una trasformazione comprimibile ad una incomprimibile.

Sia S un mezzo continuo, termoelastico, comprimibile, omogeneo e isotropo, di costanti termiche ed elastiche h, a, l e m. In assenza di forze di massa, per effetto di un'assegnata temperatura superficiale, Θ, e di un'assegnata forza superficiale, $\boldsymbol{F}$, il mezzo, S, subisca una trasformazione termoelastica linearizzata e stazionaria, a partire da una configurazione C^*, a contorno regolare $\sum^*$, di equilibrio naturale e stabile. Se si indica con $\boldsymbol{U}$ lo spostamento e con T l'incremento unitario della temperatura assoluta, la trasformazione $(\boldsymbol{U}, T)$ sia univocamente [3] definita dal sistema (cfr. [**1**], pag. 77):

$$\text{I} \qquad \begin{cases} \Delta T = 0 & \ldots \quad C^* \\ \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = h(T - \Theta) & \ldots \quad \sum^* \\ m\,\Delta \boldsymbol{U} + (l+m)\,\nabla\nabla.\,\boldsymbol{U} = \nabla(aT) & \ldots \quad C^* \\ \Phi\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \ldots \quad \sum^*, \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale interna e

$$(1) \qquad \Phi \equiv \| \Phi_{hk} \| \equiv \| aT\delta_{hk} - l\nabla.\boldsymbol{U}\delta_{hk} - 2mE_{hk} \| .$$

---

(3) Per l'unicità della trasformazione in esame si veda [**1**], pag. 38.

Si prova che *la distribuzione stazionaria di spostamenti, strains e stresses individuata in S da $(\boldsymbol{U}, T)$ compete anche ad un mezzo, s, continuo, incomprimibile, omogeneo e isotropo, di costanti termiche ed elastiche, h, a, l, m, b* (con b costante caratteristica dell'incomprimibilità di s), *occupante il campo $C^* + \sum^*$, quando, sotto l'azione della forza superficiale $\boldsymbol{F}$ e in assenza di forze di massa, il mezzo s venga assoggettato ad una conveniente distribuzione stazionaria della temperatura, τ, e quando si ponga $q = a(T - \tau)$*, essendo q lo scalare atto a rappresentare la reazione vincolare interna di s.

Precisamente τ, armonica in C^*, soddisfi su $\sum^*$ alla condizione $\dfrac{d\tau}{dn} = h(\tau - \theta)$, con θ definita dalla relazione:

$$h\theta = -\frac{1}{b}\left\{\frac{d}{dn}\nabla.\boldsymbol{U} - h\nabla.\boldsymbol{U}\right\} \quad . \; . \; . \quad \textstyle\sum^*. \tag{2}$$

Dimostrazione. Il mezzo incomprimibile, s, soggetto alla forza superficiale $\boldsymbol{F}$ e alla temperatura superficiale θ data dalla (2), subisca, a partire da $C^* + \sum^*$, la trasformazione linearizzata e stazionaria $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ (con $\boldsymbol{u}$ spostamento) definita univocamente ([4]) dal sistema (cfr. [6], pag. 161):

$$\mathrm{II} \qquad \begin{cases} \Delta\tau = 0 & . \; . \; . \quad C^* \\ \dfrac{d\tau}{dn} = h(\tau - \theta) & . \; . \; . \quad \sum^* \\ m\,\Delta\boldsymbol{u} + (l + m)\nabla\nabla.\boldsymbol{u} = \nabla(q + a\tau) & . \; . \; . \quad C^* \\ \nabla.\boldsymbol{u} = b\tau & . \; . \; . \quad C^* \\ \varphi\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & . \; . \; . \quad \sum^*, \end{cases}$$

([4]) L'unicità della soluzione di II può, ad esempio, così provarsi: nota univocamente τ (cfr. [2], pag. 25), ammesse possibili due soluzioni distinte $(\boldsymbol{u}', q')$ e $(\boldsymbol{u}'', q'')$ del problema elastico rappresentato dalle equazioni II_3, II_4, II_5, e posto $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}''$, $\chi = q' - q''$, risulta $\boldsymbol{w}$ solenoidale per l'unicità della soluzione del problema termico, e, quindi, dalla linearità delle suddette equazioni segue:

$$\begin{cases} m\,\Delta\boldsymbol{w} - \nabla\chi = 0 & . \; . \; . \quad C^* \\ \nabla.\boldsymbol{w} = 0 & . \; . \; . \quad C^* \\ \psi\boldsymbol{n} = 0 & . \; . \; . \quad \sum^* \end{cases}$$

con

$$\psi \equiv \| \psi_{hk} \| \equiv \| \chi\delta_{hk} - 2m\varepsilon_{hk} \| \qquad (\varepsilon_{hk} = e'_{hk} - e''_{hk}) .$$

Ora tale sistema caratterizza la statica elastica *isoterma* e linearizzata di un mezzo incomprimibile non soggetto nè a forze di massa, nè a forze superficiali esterne. Pertanto ammette al più una soluzione (cfr. [10]$_3$, pag. 159), che, per l'omogeneità delle equazioni, è la banale.

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale interna e

$$\varphi \equiv \| \varphi_{hk} \| \equiv \| a\tau\delta_{hk} - l\nabla.\boldsymbol{u}\delta_{hk} - 2me_{hk} + q\delta_{hk} \| . \tag{3}$$

D'altra parte, osservato che si ha [5]

$$\Delta\nabla.\boldsymbol{U} = 0 ,$$

segue subito dalla (2) che la soluzione unica del problema termico II_1 e II_2 è data da

$$\tau = (\nabla.\boldsymbol{U})/b . \tag{4}$$

Confrontando ora le equazioni I_3 e I_4 rispettivamente con II_3 e II_5, per l'unicità delle soluzioni dei sistemi I e II, risulta che è

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} ,$$

se, e solo se, è

$$q = a(T - \tau) , \tag{5}$$

rimanendo poi senz'altro verificata l'equazione II_4, attesa la relazione (4).

Osservazioni. a) Se, in particolare, si ha

$$\nabla.\boldsymbol{U} = AT + B \qquad \ldots \qquad C^* , \tag{6}$$

con A e B costanti, la relazione funzionale (2) diventa [6]:

$$\theta = (A\Theta + B)/b \qquad \ldots \qquad \Sigma^* . \tag{7}$$

---

[5] Basta applicare l'operatore $\nabla.$ ad ambo i membri di I_3 e tenere presente la I_1.

[6] Si ha infatti:

$$h\theta = -\frac{1}{b}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\,\nabla.\boldsymbol{U} - h\nabla.\boldsymbol{U}\right\}_{\Sigma^*} = -\frac{1}{b}\left\{A\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} - hT\right) - hB\right\}_{\Sigma^*} = $$
$$= -\frac{1}{b}\left\{A(-h\Theta) - hB\right\}_{\Sigma^*} ,$$

cioè proprio la (7).

Viceversa, vera la (7), necessariamente è valida la (6). Infatti dal confronto dei problemi termici corrispondenti ai sistemi I e II, da (7) discende $\tau = (AT + B)/b$, e quindi la (6), attesa la relazione (4).

Ricordando l'espressione della soluzione completa data da NEUBER e PAPKOVITCH (cfr [**1**], pag 83), cioè

$$\boldsymbol{U} = \nabla\{ G + \boldsymbol{\Omega} \times (P^* - 0) \} - \frac{l + 2m}{l + m} 2\, \boldsymbol{\Omega},$$

con P^* punto variabile di C^* ed O punto fisso di C^*, ed essendo

$$\Delta G = [a/(l + 2m)]T, \qquad \Delta \boldsymbol{\Omega} = 0\,,$$

la (6) risulta verificata *se, e solo se,* $\nabla . \boldsymbol{\Omega}$ è funzione lineare di T.

b) Se I_Φ indica l'invariante primo del tensore degli sforzi relativi a mezzo comprimibile S, da (1) discende:

(8) $$\nabla . \boldsymbol{U} = (3aT - I_\Phi)/(3l + 2m)\,,$$

e la (2) può scriversi anche nella forma:

(2′) $$h\theta = \frac{1}{b(3l + 2m)} \left\{ h\Theta + \frac{dI_\Phi}{dn} - hI_\Phi \right\} \quad . \; . \; . \quad \Sigma^*,$$

relazione che si riduce alla (7) *se, e solo se,* I_Φ risulta funzione lineare di T (cfr. (8)).

c) Quando si tenga presente la difficoltà della risoluzione di un problema termoelastico incomprimibile, pare opportuno sottolineare come la proprietà provata permetta di risalire facilmente, *e in modo univoco,* dalla risoluzione dei problemi comprimibili (in proposito dei quali la letteratura risulta assai vasta) a quella dei problemi incomprimibili, essendo:

$$\begin{cases} \tau = (\nabla . \boldsymbol{U})/b \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{U} \\ q = a\{ T - (\nabla . \boldsymbol{U})/b \}. \end{cases}$$

Per esempio, nel n. **6**, si otterrà subito, sfruttando tali relazioni, la soluzione di un problema incomprimibile semplice ed espressivo.

3. - Passaggio da una trasformazione incomprimibile ad una comprimibile.

Nel campo $C^*+\sum^*$ sia $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ una trasformazione incomprimibile, linearizzata e stazionaria che un mezzo, s, di costanti termiche ed elastiche h, a, l, m, b, subisce, in assenza di forze di massa, per effetto di un'assegnata temperatura superficiale θ e di un'assegnata forza superficiale $\boldsymbol{F}$.

$(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ sia definita *univocamente* (cfr. ([4])) dalla soluzione di un sistema del tipo II.

Si prova: *la distribuzione stazionaria di spostamenti, strains e stresses individuata, in s, da $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ compete anche ad un mezzo, S, continuo, comprimibile, omogeneo e isotropo, di costanti termiche ed elastiche h, a, l, m, occupante il campo $C^* + \sum^*$, quando sotto l'azione della forza superficiale $\boldsymbol{F}$ e in assenza di forze di massa, il mezzo S venga assoggettato ad una conveniente distribuzione stazionaria della temperatura, T.*

Precisamente T, armonica in C^*, soddisfi su $\sum^*$ alla condizione $\dfrac{dT}{dn} = h(T - \Theta)$, con Θ definita dalla relazione:

$$h\,\Theta = h\,\theta - \frac{1}{a}\left\{\frac{dq}{dn} - hq\right\} \qquad \dots \qquad \textstyle\sum^* . \tag{9}$$

Dimostrazione. Il mezzo comprimibile S sia soggetto alla trasformazione definita *univocamente* (cfr. [1], pag. 38) da un sistema di tipo I, essendo Θ data dalla relazione (9). Per II_2 la (9) può scriversi nella forma:

$$a\,h\,\Theta = -\left\{\frac{d}{dn}(q + a\tau) - h(q + a\tau)\right\} \qquad \dots \qquad \textstyle\sum^*;$$

d'altra parte, essendo ([7])

$$\nabla\cdot\nabla q = 0\,,$$

si ha che il problema termico relativo al sistema I ha l'unica soluzione

$$T = (q + a\,\tau)/a\,. \tag{10}$$

Dal confronto poi delle equazioni II_3, II_5 rispettivamente con le equazioni I_3, I_4 risulta, per la (10),

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}\,.$$

([7]) Basta applicare l'operatore $\nabla\cdot$ ad ambo i membri di II_3 e tenere presenti le equazioni II_4 e II_1.

Osservazioni. a) Se, in particolare, q risulta funzione lineare di τ, per la (10) T risulta legata a $\nabla . U$ da una relazione del tipo (6) e quindi, *necessariamente*, la relazione funzionale (9) si trasformerà in una relazione lineare fra θ e Θ, come è facile verificare [8].

Quando si tenga presente l'espressione della soluzione completa di $\boldsymbol{u}$ (ottenuta recentemente in [**6**]$_2$) mediante le funzioni di Neuber e Papkovitch:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \nabla \left\{ g - \dfrac{1}{2}(P^* - 0) \times \boldsymbol{\omega} \right\} + \boldsymbol{\omega} \\ \\ q = (l + 2m - b/a)\Delta g - m\nabla . \boldsymbol{\omega} \, , \end{cases}$$

essendo:

$$\Delta g = b\tau, \qquad \Delta \boldsymbol{\omega} = 0 \, ,$$

si vede che la funzione q è lineare in τ, *se, e solo se*, è tale la funzione $\nabla . \boldsymbol{\omega}$.

b) Se I_φ indica l'invariante primo del tensore degli sforzi relativi al mezzo incomprimibile s, da (3) discende:

$$q = (\varrho\tau + I_\varphi)/3 \qquad \text{con} \quad \varrho = (3l + 2m)b - 3a \, , \tag{11}$$

e la relazione (9) può scriversi anche nella forma:

$$h\Theta = \frac{b(3l + 2m)}{3a}\, h\theta - \frac{1}{3a}\left(\frac{\mathrm{d}I_\varphi}{\mathrm{d}n} - hI_\varphi\right) \quad . \; . \; . \quad \Sigma^*, \tag{9'}$$

relazione che si riduce alla (7) *se, e solo se*, I_φ è funzione lineare di τ.

---

[8] Se, infatti, è $q = a'\tau + b'$, risulta:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}n} - hq = a'\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n} - h\tau\right) - hb;$$

in particolare si ha:

$$\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}n} - hq\right)_{\Sigma^*} = - h(a'\,\theta + b') \, .$$

Sostituendo in (9) si ottiene:

$$\Theta = (1 + a'/a)\theta + b'/a \, ,$$

proprio come si voleva provare.

4. - Corrispondenza involutoria fra θ e Θ.

Si può provare *le relazioni funzionali fra θ e Θ date da* (2) *e da* (9) *sono l'una l'inversa dell'altra.*

Infatti considerate tali relazioni nelle forme equivalenti (2') e (9'), ed osservato che per $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}$ e $T = \tau + q/a$ è $I_\Phi = I_\varphi$, la (2') si riduce ad un'identità, quando si sostituisce nel secondo membro di essa alla funzione $h\Theta$ la sua espressione data da (9').

Ne segue: a) *La relazione funzionale* (2) *esplicitata rispetto a Θ si trasforma nella relazione funzionale* (9), *e viceversa.* b) *Le funzioni θ e Θ si corrispondono in doppio modo*, rappresentando la (2) [oppure la (9)] la legge di corrispondenza.

5. - Estensione.

I risultati precedenti si mantengono validi anche se il mezzo è soggetto a forze di massa del tipo gravitazionale o a forze centrifughe.

Nel primo caso, infatti, la forza di massa, $\mathcal{F}$, è conservativa e a potenziale armonico; essendo cioè:

$$\mathcal{F} = \nabla(a\Psi) \qquad \text{con} \qquad \Delta\Psi = 0 \, ,$$

basta assumere:

$$T' = T + \Psi, \qquad \Theta' = \Theta - \left\{ \frac{1}{h} \frac{d\psi}{dn} - \Psi \right\}_{\Sigma*}, \qquad F'_h = F_h + a(\Psi)_{\Sigma*} \delta_{hk} n_k \, ,$$

e leggere nel sistema I invece delle funzioni T, Θ, e F_h, rispettivamente le funzioni T', Θ' e F'_h.

Nel secondo caso, invece, si ha $\Delta\Psi =$ costante; analoghe opportune sostituzioni portano ancora ai risultati dei nn. precedenti.

6. - Un' applicazione.

Il mezzo comprimibile S riempia un manicotto cilindrico limitato lateralmente dalle superficie $r = \mathfrak{R}'$ e $r = \mathfrak{R}''$, con $\mathfrak{R}' < \mathfrak{R}''$. In S la superficie interna sia mantenuta a temperatura costante Θ non nulla e la superficie esterna sia mantenuta a temperatura nulla; inoltre siano nulle le pressioni sulle superficie laterali di S. In queste condizioni S subisce una trasformazione linearizzata, che risulta stazionaria e piana.

Per la simmetria assiale di S, le equazioni I_1 e I_2, in coordinate cilindriche, r, α e z diventano:

$$\begin{cases} \Delta T \equiv \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0 & \quad \ldots \quad C^* \\ T = \Theta & \quad \ldots \quad r = \mathfrak{R}' \\ T = 0 & \quad \ldots \quad r = \mathfrak{R}'' , \end{cases}$$

ed ammettono la soluzione:

$$T = K \lg(\mathfrak{R}''/r) \qquad [K = \Theta/\lg(\mathfrak{R}''/\mathfrak{R}')] . \tag{12}$$

Nota così T, determino $\boldsymbol{U}$ — secondo il metodo di GOODIER — assumendo come soluzione *particolare* dell'equazione non omogenea I_3 la funzione, a simmetria assiale,

$$\boldsymbol{U}^{(p)} = \nabla G ,$$

dove G è una *particolare* soluzione dell'equazione di POISSON

$$\Delta G = \{ a/(l + 2m) \} T .$$

Tale equazione per la (12), attesa la simmetria assiale, diventa:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r}\right) = K' \lg(\mathfrak{R}''/r), \tag{13}$$

con

$$K' = \{ a/(l + 2m) \} K = \{ a/[(l + 2m) \lg(\mathfrak{R}''/\mathfrak{R}')] \} \Theta ,$$

ed è soddisfatta, in particolare, dalla funzione

$$G = (K'/4) r^2 \{ \lg(\mathfrak{R}''/r) + 1 \} .$$

Poichè $\boldsymbol{U}^{(p)}$ ha la sola componente non nulla $U_r^{(p)}$, ne segue:

$$U_r^{(p)} \equiv \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}r} = (K'/4)r\left\{2 \lg (\mathfrak{R}''/r) + 1\right\}, \tag{14}$$

$$\left\{\begin{aligned} E_{rr}^{(p)} &\equiv \frac{\mathrm{d}U_r^{(p)}}{\mathrm{d}r} = (K'/4)r\left\{2 \lg (\mathfrak{R}''/r) - 1\right\} \\ E_{\alpha\alpha}^{(p)} &\equiv \frac{U_r^{(p)}}{r} = (K'/4)\left\{2 \lg (\mathfrak{R}''/r) + 1\right\} \\ E_{zz}^{(p)} &= E_{\alpha z}^{(p)} = E_{\alpha r}^{(p)} = E_{rz}^{(p)} = 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

$$\left\{\begin{aligned} \Phi_{rr}^{(p)} &= (mK'/4)\left\{2 \lg (\mathfrak{R}''/r) + 1\right\} \\ \Phi_{\alpha\alpha}^{(p)} &= (mK'/4)\left\{2 \lg (\mathfrak{R}''/r) - 1\right\} \\ \Phi_{zz}^{(p)} &= (l + 2m)K' \lg (\mathfrak{R}''/r) \\ \Phi_{r\alpha}^{(p)} &= \Phi_{rz}^{(p)} = \Phi_{\alpha z}^{(p)} = 0. \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Come appare dalle (16), la funzione $\boldsymbol{U}^{(p)}$ determina sulla superficie interna del manicotto la tensione radiale:

$$t' = (\Phi_{rr})_{r=\mathfrak{R}'} = (mK'/4)\left\{2 \lg(\mathfrak{R}''/\mathfrak{R}') + 1\right\},$$

e sulla superficie esterna del manicotto la tensione radiale:

$$t'' = (\Phi_{rr})_{r=\mathfrak{R}''} = mK'/4.$$

Ora poichè, per ipotesi, le pressioni radiali sulle superficie laterali di S si ammettevano nulle, si otterrà la soluzione $\boldsymbol{U}$ del problema in esame, quando si aggiunga alla funzione $\boldsymbol{U}^{(p)}$ la soluzione $\boldsymbol{U}^{(i)}$ del problema *isotermo* elastico relativo allo stesso manicotto soggetto su $r = \mathfrak{R}'$ alla pressione radiale

$$p' = -t' = -(mK'/4)\left\{2 \lg(\mathfrak{R}''/\mathfrak{R}') + 1\right\},$$

e su $r = \mathfrak{R}''$ alla pressione radiale

$$p'' = -t'' = -mK'/4.$$

La soluzione di tale problema è nota (cfr. [5], pag. 144; oppure [7], pag. 29); essa ha l'unica componente non nulla data da

$$U_r^{(i)} = cr + c'/r\,, \tag{17}$$

con

$$c = (p''\mathfrak{R}''^2 - p'\mathfrak{R}'^2)/\{2(l+m)(\mathfrak{R}'^2 - \mathfrak{R}''^2)\}, \quad c' = (p'' - p')\mathfrak{R}'^2\mathfrak{R}''^2/\{2m(\mathfrak{R}'^2 - \mathfrak{R}''^2)\}.$$

Si ha allora per (14) e per (17) (essendo $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^{(p)} + \boldsymbol{U}^{(i)}$):

$$\nabla.\boldsymbol{U} \equiv \nabla.\boldsymbol{U}^{(p)} + \nabla.\boldsymbol{U}^{(i)} = K' \lg(\mathfrak{R}''/r) + 2c',$$

ed anche, per la (12),

$$\nabla.\boldsymbol{U} = [a/(l+2m)]T + 2c',$$

risultando così $\nabla.\boldsymbol{U}$ del tipo (6). Ne segue, per la (7),

$$\begin{cases} \theta = \{a/[b(l+2m)]\}\Theta + 2c'/b & \ldots \quad r = \mathfrak{R}'' \\ \theta = 2c'/b & \ldots \quad r = \mathfrak{R}'. \end{cases} \tag{18}$$

Si può pertanto affermare: a) l'effetto del vincolo d'incomprimibilità nel manicotto in esame è assimilabile ad un effetto termico ottenuto da un cambiamento [conforme alle (18)] delle temperature uniformi sulle superficie laterali del mezzo; b) le funzioni

$$\begin{cases} \tau = (\nabla.\boldsymbol{U})/b = \gamma \lg(\mathfrak{R}''/r) + 2c'/b \\ u_n = U_r = (K'/4)r\{2\lg(\mathfrak{R}''/r) + 1\} + cr + c'/r \\ q = a(T - \tau) = a\{(K - \gamma)\lg(\mathfrak{R}''/r) - 2c'/b\}, \end{cases}$$

con

$$\gamma = a/[b(l+2m)],$$

dànno la soluzione del problema relativo al manicotto incomprimibile che, sulle pareti laterali, è libero di pressioni e soggetto a temperature uniformi.

Bibliografia.

[1] B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, Wiley, New York 1960.

[2] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon Press, Oxford 1948.

[3] R. A. EUBANKS, E. STENBERG, *On the completeness of the Boussinesq-Papkovitch stress function*, J. Rat. Mech. Anal. **5** (1956), 735-746.

[4] J. W. GIBBS, *Vector Analysis*, J. Wilson, Cambridge 1901.

[5] A. E. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York 1927.

[6] T. MANACORDA, *Sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità nella Elasticità di secondo grado per solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma **10** (1959), 19-33. *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **1** (1960), 149-170.

[7] E. MELAN, H. PARKUS, *Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder*, Springer-Verlag, Wien 1953.

[8] R. MINDLIN, *Note on the Galerkin and Papkovich stress function*, Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 373-376.

[9] P. M. NAGHI, C. S. HSU, *On the Representation of Displacements in linear Elasticity in Terms of three Stress Functions*, J. Mat. Mech. **10** (1961), 233-245.

[10] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. I, II, III, IV, Ann. Mat. Pura Appl.: (4) **22** (1943), 33-143; (4) **30** (1949), 1-72; (4) **39** (1955), 147-201; (4) **51** (1960), 329-372.

[11] I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical theory of elasticity*, Mc Graw-Hill, New York 1956.

[12] C. TRUESDELL, *The Mechanical Foundations of Elasticity and Fluid Dynamics*, J. Rat. Mech. and Analysis **1** (1952), 125-300.

Summary.

A relation between linear, thermoelastic, steady-state transformations of compressible bodies and those of incompressible bodies is obtained. Precisely, it is proved: when there are no body forces, the steady-state displacements and stresses in a homogeneous, isotropic, compressible body will be the same as those in an incompressible body of the same shape and constants, if the incompressible body is subjected to the same surface tractions and to a convenient steady-state temperature distribution, and if, furthemore, incompressibility scalar is opportunely defined. And conversely.

Further the results are extended to bodies with conservative body forces, and, at last, are applied in a particular problem.