Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 169-191

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Alcuni criteri di non prolungabilità per le serie di potenze. (**)

1. - Posizione del problema.

La serie di potenze

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n \tag{1.1}$$

abbia raggio di convergenza 1, cioè sia $\overline{\lim}_{n\to+\infty} | a_n |^{1/n} = 1$ (1).

Denotiamo con $\{ n_h \}$ una successione crescente di interi assoluti

$$\{ n_h \} \qquad n_1,\ n_2,\ n_3,\ \ldots,\ n_h,\ \ldots .$$

Sia θ un numero reale $0 < \theta < 1$ e denotiamo con I_h il « tratto » di interi assoluti

$$I_h: \qquad (1-\theta)n_h \leqq m \leqq (1+\theta)n_h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Poniamo $I = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_h \cup \ldots$. Sia $\{ \Lambda_h \}$ una successione di numeri reali e positivi e sia J_h il tratto di interi assoluti

$$J_n: \qquad n_h - \Lambda_h \leqq m \leqq n_h + \Lambda_h \qquad (h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Parma, Italia.

(**) Studio eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 14 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1960-61.

Ricevuto il 20-III-1962.

(1) Per semplicità denoteremo con $|a_n|^{1/n}$ la radice n-esima aritmetica di $| a_n |$.

Poniamo $J = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_h \cup \ldots$. Quando $\Lambda_h \leqq \theta n_h$ risulta $J_h \subseteq I_h$. Siano $\{\tau_h\}$, $\{\varphi_h\}$, $\{\nu_h\}$ tre successioni di numeri reali e positivi e i ν_h siano inoltre interi.

Definizione. Sia

$$\tau_h \leqq n_h/2, \qquad \varphi_h \leqq n_h/2, \qquad 1 \leqq \nu_h \leqq 2\Lambda_h \leqq 2\theta n_h .$$

Diremo che *la serie di potenze* (1.1) *appartiene alla classe*

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$$

lungo la successione di tratti I_h, e scriveremo $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$, quando sono verificate le condizioni seguenti:

(a) $$\overline{\lim} \, | a_n |^{1/n} = 1,$$

(b) $$| a_{n_h} |^{1/\varphi_h} \to 1 \quad [2],$$

(c) $$| a_m | \leqq \exp(-\varphi_h) \cdot | a_{n_h} | \quad \text{per} \quad m \in J_h \quad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

(d) $$| a_m | \leqq \exp \tau_h \cdot | a_{n_h} | \quad \text{per} \quad m \in I_h - J_h \quad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

(e) salvo al più ν_h valori eccezionali di m in I_h, per i quali a_m può non soddisfare nè a (c) nè a (d), vincolato soltanto dalla (a).

Queste condizioni vincolano in diversa maniera la grandezza del modulo di a_m per i valori di $m \in J_h$, prossimi a n_h, e per i valori di $m \in I_h - J_h$, più lontani da n_h, ammettendo anche delle eccezioni; queste, al più, in numero di ν_h.

Ci poniamo il seguente problema:

È possibile scegliere le quattro successioni $\{\tau_h\}$, $\{\varphi_h\}$, $\{\Lambda_h\}$, $\{\nu_h\}$ *(soddisfacenti alle condizioni sopra dichiarate), in guisa che ogni* $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$ *non sia prolungabile?*

La risposta è affermativa e la condizione sufficiente che risponde al problema sarà tanto più significativa quanto più ampia potrà essere la scelta delle quattro successioni impegnate.

Osservazioni. 1) Se $\{\overline{n}_l\} \subseteq \{n_h\}$, allora, con ovvio significato dei simboli,

$$\mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h) \text{ (lungo } \{I_h\}) \subseteq \mathcal{S}(\overline{\tau}_l, \overline{\varphi}_l; \overline{\Lambda}_l, \overline{\nu}_l) \text{ (lungo } \{\overline{I}_l\}) .$$

---

[2] Essendo $\varphi_h \leqq n_h/2$, la (b) implica che sia anche $| a_{n_h} |^{1/n_h} \to 1$.

2) Se esiste $\gamma > 0$ tale che $\tau_h > \gamma n_h$ (cioè $\underline{\lim}\,(\tau_h/n_h) > 0$), allora la (d) è verificata, senza eccezioni, per h abbastanza grande, in forza di (a). Non si lede pertanto la generalità col supporre, ad es., $\tau_h \leqq n_h/2$.

3) Se esiste $\gamma > 0$ tale che $\varphi_h > \gamma n_h$ (cioè $\underline{\lim}\,(\varphi_h/n_h) > 0$), allora la (c) impone a $|a_m|$ una condizione tale che

$$\overline{\lim}\, |a_m|^{1/m} \leqq \exp(-\gamma) < 1, \qquad m \to +\infty, \qquad m \in J,$$

e quindi la serie parziale $\sum a_m z^m$, $(m \in J)$, ha raggio di convergenza > 1 e costituisce una perturbazione di $f(z)$ che non influisce sulla non prolungabilità. Ne segue che, nello studio della non prolungabilità, la condizione $\varphi_h \leqq n_h/2$ non lede la generalità.

4) Come si è già osservato in 1), passando da $\{n_h\}$ ad una successione parziale si amplia la classe $\mathcal{S}$. Si può pertanto pensare di scegliere una successione parziale in guisa che esistano i limiti delle espressioni $\tau_h/\log n_h$, $\varphi_h/\log n_h$, Λ_h/n_h, ν_h.

2. - Il teorema principale.

Lo studio del problema posto al n. 1 ci conduce al seguente teorema generale, dal quale dedurremo poi alcuni criteri particolari, più semplici ed espressivi. Ci riferiamo alle notazioni introdotte nel n. **1**.

Teorema I. *Ogni serie di potenze $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$ non è prolungabile quando esistono $\varepsilon > 0$ e h_0 tali che le quattro successioni $\{\tau_h\}$, $\{\varphi_h\}$, $\{\Lambda_h\}$, $\{\nu_h\}$ verifichino, per $h \geqq h_0$, simultaneamente le condizioni seguenti:*

la condizione (C),

una delle condizioni (A_r), $(r = 1, 2)$,

una delle condizioni (B_s), $(s = 1, 2)$,

e cioè

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} \tau_h \leqq n_h/2, \qquad \varphi_h \leqq n_h/2, \qquad 1 \leqq \nu_h \leqq 2\Lambda_h \leqq 2\theta n_h \\ \qquad\qquad \nu_h = o(\Lambda_h), \end{cases}$$

$$(\mathrm{A}_1) \qquad \varphi_h/\log n_h \to +\infty, \qquad \nu_h \log(n_h/\nu_h) < (2-\varepsilon)\varphi_h,$$

$$(\mathrm{A}_2)\quad \varphi_h/\log n_h \to \varrho > 1, \qquad \nu_h < 2\varrho - 1,$$

$$(\mathrm{B}_1)\quad \tau_h/\log n_h \to +\infty, \qquad A_h^2/n_h > (1+\varepsilon)\{\nu_h \log (A_h/\nu_h) + \tau_h\},$$

$$(\mathrm{B}_2)\quad \tau_h/\log n_h \to \varrho_1 \geqq 0, \qquad A_h^2/n_h > (1+\varepsilon)\{\nu_h \log (A_h/\nu_h) + (1+\varrho_1)\log n_h\}.$$

3. - I due casi: $\nu_h \to \nu_0$ (finito), $\nu_h \to +\infty$.

Premettiamo alcune osservazioni sulle condizioni (A_r) e (B_s) del Teorema I.

1) La validità di (B_s), $(s = 1, 2)$, implica che A_h^2 superi ciascuna delle espressioni

$$n_h\tau_h, \qquad n_h \log n_h, \qquad n_h\nu_h \log (A_h/\nu_h);$$

questo fatto porta come conseguenza che $2 \log A_h$ supera ciascuna delle tre espressioni

$$\log n_h + \log \tau_h, \quad \log n_h + \log\log n_h, \quad \log n_h + \log \nu_h + \log\log (A_h/\nu_h).$$

In particolare, poichè $A_h > \sqrt{n_h\nu_h}$, risulta in ogni caso

$$A_h^2 > \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\, n_h\nu_h \log (n_h/\nu_h).$$

Inoltre, poichè la funzione $x \log (A/x)$ è crescente per $1 \leqq x < A/e$, si vede che

$$\frac{1}{2}\log n_h < \nu_h \log (A_h/\nu_h) < \nu_h \log n_h.$$

2) Se $\nu_h \to \nu_0$ (ossia, essendo i ν_h interi positivi, se risulta definitivamente $1 \leqq \nu_h = \nu_0$), allora da $\varphi_h/\log n_h \to +\infty$ segue $\nu_h \log (n_h/\nu_h) = o(\varphi_h)$ e da $\tau_h/\log n_h \to +\infty$ segue $\nu_h \log (A_h/\nu_h) = o(\tau_h)$. Inoltre, per l'espressione che figura alla fine di (B_2) abbiamo

$$\nu_h \log (A_h/\nu_h) + (1+\varrho_1)\log n_h \leqq (\nu_0 + 1 + \varrho_1)\log n_h.$$

3) Se $\nu_h \to +\infty$, allora (A_2) è impossibile; la validità di (A_1) ci dice che è necessariamente $\varphi_h/\log n_h \to +\infty$. Inoltre osserviamo ancora che, essendo $A_h > \sqrt{n_h\nu_h}$, per l'espressione che figura alla fine di (B_2) abbiamo

$$\nu_h \log (A_h/\nu_h) + (1+\varrho_1)\log n_h = (1+o(1))\nu_h \log (A_h/\nu_h).$$

Le osservazioni che precedono ci consentono di ricavare dal Teorema I i seguenti due teoremi, che riguardano rispettivamente i due casi: 1°) quando il numero ν_h maggiorante delle eccezioni in ogni tratto I_h è limitato; 2°) quando è invece $\nu_h \to +\infty$.

1° caso: $\nu_h \to \nu_0$ (finito), ossia $\nu_h = \nu_0$ per $h \geqq h_0$.

Teorema II. *Ogni* $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_0)$ *non è prolungabile se esistono* $\varepsilon > 0$ *e* h_0 *tali che le tre successioni* $\tau_h, \varphi_h, \Lambda_h$ *verifichino, per* $h \geqq h_0$, *simultaneamente le condizioni seguenti*

$$\tau_h \leqq n_h/2, \qquad \varphi_h \leqq n_h/2,$$

$$\varphi_h > \frac{1}{2}(\nu_0 + 1 + \varepsilon) \log n_h, \qquad (\nu_0 \geqq 1),$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \tau_h/\log n_h \to +\infty, & \Lambda_h > \sqrt{(1+\varepsilon) n_h \tau_h}\,, \\ \textit{oppure} & \\ \tau_h/\log n_h \to \varrho_1 \geqq 0, & \Lambda_h > \sqrt{(\nu_0 + 1 + \varrho_1 + \varepsilon) n_h \log n_h}. \end{array}\right.$$

2° caso: $\nu_h \to +\infty$.

Teorema III. *Ogni* $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$ *non è prolungabile se esistono* $\varepsilon > 0$ *e* h_0 *tali che le quattro successioni* $\tau_h, \varphi_h, \Lambda_h, \nu_h$ *verifichino, per* $h \geqq h_0$, *simultaneamente le condizioni seguenti*

$$\tau_h \leqq n_h/2, \qquad \varphi_h \leqq n_h/2, \qquad \nu_h \to +\infty, \qquad \nu_h = o(\Lambda_h)\,,$$

$$\varphi_h > (1/2 + \varepsilon)\nu_h \log (n_h/\nu_h) \text{ (}^3\text{)},$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \tau_h/\log n_h \to +\infty, & \Lambda_h^2/n_h > (1+\varepsilon)\left\{\nu_h \log(\Lambda_h/\nu_h) + \tau_h\right\}, \\ \textit{oppure} & \\ \tau_h/\log n_h \to \varrho_1 \geqq 0, & \Lambda_h^2/n_h > (1+\varepsilon)\nu_h \log(\Lambda_h/\nu_h)\,. \end{array}\right.$$

(3) Da quest'ultima relazione, essendo $\nu_h \to +\infty$, segue $\varphi_h/\log n_h \to \infty$.

4. - Il tratto I_h coincidente con J_h. Il teorema di E. Fabry.

Vale il seguente

Teorema IV. *Ogni* $f(z) \in \mathcal{F}(\tau_h, \varphi_h; \theta n_h, \nu_h)$ *non è prolungabile se,* τ_h *essendo completamente libera, le due successioni* φ_h *e* ν_h *verificano le condizioni seguenti (con* $\varepsilon > 0$ *e* $h \geqq h_0$)

$$\nu_h = \nu_0, \qquad (\nu_0 \geqq 1),$$

$$\varphi_h > \frac{1}{2}(\nu_0 + 1 + \varepsilon) \log n_h,$$

oppure

$$\nu_h \to +\infty, \qquad \nu_h = o(n_h),$$

$$\varphi_h > (1/2 + \varepsilon)\nu_h \log(n_h/\nu_h).$$

Dimostrazione. Essendo $\Lambda_h = \theta n_h$, risulta $J_h = I_h$, ossia $I_h - J_h$ vuoto ($h = 1, 2, 3, \ldots$); pertanto la condizione (d) (n. **1**) non è operante e possiamo assumere τ_h arbitrariamente: in particolare τ_h può essere scelto in guisa che, quando $\nu_h \to \nu_0$, siano verificate le condizioni del Teorema II, con $\Lambda_h = \theta n_h$; quando $\nu_h \to +\infty$, siano verificate le condizioni del Teorema III, con $\Lambda_h = \theta n_h$.

Osservazioni. 1) Il caso $\Lambda_h = \theta n_h$ rientra nei casi classici nei quali non si contempla il tratto ridotto J_h. Assumendo $\varphi_h = n_h/2$, la condizione (b) (n. **1**) ci dice che la successione $\{a_{n_h}\}$ è massimizzante (ossia $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$), mentre la condizione (c) richiede $|a_m|$ piccolissimo: essa è molto restrittiva e consente soltanto una perturbazione additiva, con raggio di convergenza >1, sulla serie i cui coefficienti a_m, con $m \in I_h$, $m \neq n_h$, sono nulli. In altri termini la classe $\mathcal{F}(\tau_h, n_h/2; \theta n_h, \nu_h)$ è quella del classico teorema di E. FABRY [2] (4), che ritroviamo qui come caso molto particolare. D'altronde in questo caso è $\nu_h \log(n_h/\nu_h) = o(n_h) = o(\varphi_h)$, quindi:

Ogni $f(z) \in \mathcal{F}(\tau_h, n_h/2; \theta n_h, \nu_h)$ *(con* τ_h *arbitraria),* $0 < \theta < 1$, $\nu_h = o(n_h)$, *non è prolungabile* (E. FABRY).

---

(4) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia riportata alla fine del lavoro.

2) Il caso $\Lambda_h = \theta n_h$ esaminato qui si adatta anche, con lievi modificazioni, a quello in cui $\Lambda_h \sim c n_h (c > 0)$ e anche a quello in cui $\Lambda_h > c n_h$ $(c > 0)$ per $h \geqq h_0$, poichè, per $\theta' < c$ risulta, con ovvio significato dei simboli,

$$\mathcal{S}(\tau_h,\ \varphi_h;\ \Lambda_h,\ \nu_h)\ (\text{lungo } \{ I_h \}) \subseteq \mathcal{S}(\tau_h,\ \varphi_h;\ \theta' n_h,\ \nu_h)\ (\text{lungo } \{ I'_h \}),$$

essendo $J'_h = I'_h \subseteq J_h \subseteq I_h$. Pertanto nel seguito supporremo sempre $\Lambda_h = o(n_h)$ e quindi

$$1 \leqq \nu_h = o(\Lambda_h), \qquad \Lambda_h = o(n_h) .$$

5. - Confronto con un criterio di F. Lösch.

Un interessante criterio di non prolungabilità è stato stabilito da F. Lösch [3] (vedasi anche [1], p. 60, oppure [4], p. 10). Ci proponiamo di confrontare qui questo criterio col nostro Teorema I.

Denotiamo con $\mathfrak{L}(\Phi, K)$ la classe delle serie di potenze (1.1) che soddisfano alle seguenti condizioni di non prolungabilità del criterio di F. Lösch:

$$(\mathrm{L}_1) \qquad \overline{\lim}\, | a_n |^{1/n} = 1,$$

$$(\mathrm{L}_2), \quad \begin{cases} \{ \Phi(n) \} \text{ monotona non decrescente, } \Phi(n) > 0, \\ \Phi(2n) = O(\Phi(n)), \qquad \Phi(n) \log n = o(n) , \end{cases}$$

$$(\mathrm{L}_3) \quad | a_n | < n^{K\Phi(n)} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad | a_{n_h} | > n_h^{-K\Phi(n_h)} \quad (h = 1,\ 2,\ \ldots;\ K > 0),$$

$$(\mathrm{L}_4) \quad \begin{cases} a_m = 0 \quad \text{per} \quad m \neq n_h, \quad m \in J_h, \qquad \text{dove} \\ J_h \equiv \{ n_h - \sqrt{n_h \Phi(n_h) \log n_h} \leqq m \leqq n_h + \sqrt{n_h \Phi(n_h) \log n_h} \}. \end{cases}$$

Si vede facilmente che assumendo, per un $\varepsilon > 0$,

$$(5.1) \quad \begin{cases} \tau_h = (1 + k(\theta) + \varepsilon) K \Phi(n_h) \log n_h, & \varphi_h = n_h/2, \\ \Lambda_h = \sqrt{n_h \Phi(n_h) \log n_h}, & \nu_h = 1, \end{cases}$$

dove

$$(5.2) \qquad k(\theta) = \overline{\lim_{h \to +\infty}} \{ \Phi((1 + \theta) n_h)/\Phi(n_h) \} \qquad (k(\theta) \geqq 1),$$

risulta

$$\mathfrak{L}(\Phi,\ K) \subseteq \mathcal{S}(\tau_h,\ n_h/2;\ \Lambda_n,\ 1)\,. \tag{5.3}$$

Infatti: (L_1) non è altro che (a); la (b) è verificata come conseguenza dell'ultima delle (L_2) e delle (L_3); la (c), per (L_4), è verificata con la sola eccezione $m = n_h$; la (d) risulta verificata senza eccezioni in base alla scelta (5.1) di τ_h (onde $\nu_h = 1$). Per provare l'ultima affermazione fatta, cominciamo con l'osservare che, per $m \in I_h - J_h$, risulta $\Phi(m) \leqq \Phi((1+\theta)n_h)$ e dalla prima delle (L_3) si deduce

$$|\,a_m\,| < \exp\{\,K\Phi((1+\theta)n_h)\cdot(\log n_h + \log(1+\theta))\,\};$$

tenendo presente (5.2), prefissato $\varepsilon > 0$ arbitrario, si ha poi, per $h \geqq h_0(\varepsilon)$,

$$\Phi((1+\theta)n_h) < (k(\theta) + \varepsilon/2)\Phi(n_h)$$

e ne segue, tenendo presente la seconda delle (L_3),

$$\begin{aligned}|\,a_m\,| &< \exp\{\,K(k(\theta)+\varepsilon/2)\Phi(n_h)\cdot(\log n_h + \log(1+\theta)) + \\ &\qquad + K\Phi(n_h)\log n_h - K\Phi(n_h)\log n_h\,\} \\ &< \exp\{\,(1 + k(\theta) + \varepsilon/2 + o(1))K\Phi(n_n)\log n_h\,\}\cdot|\,a_{n_h}\,| \\ &< \exp\tau_h\cdot|\,a_{n_h}\,|\,,\end{aligned}$$

ossia la (d).

Poniamo

$$\lim_{h\to+\infty}\Phi(n_h) = \Phi_0 \qquad (0 < \Phi_0 \leqq +\infty),$$

$$\lim_{\theta\to 0+} k(\theta) = k_0 \qquad (k_0 = 1 \text{ quando } \Phi_0 \text{ è finito}).$$

Vale allora la seguente proposizione di confronto fra il Teorema I e il criterio di F. Lösch:

Ogni $f(z) \in \mathcal{S}(\tau_h,\ n_h/2;\ \Lambda_h,\ 1)$, *con* τ_h *e* Λ_h *dati da* (5.1), *non è prolungabile se*

$$K < 1/(1+k_0) \qquad \textit{quando} \qquad \Phi_0 = +\infty\,, \tag{5.4}$$

oppure

$$K < 1/2 - 3/(4\Phi_0) \qquad \textit{quando } \Phi_0 \textit{ è finito.} \tag{5.5}$$

Infatti, nelle ipotesi qui dichiarate, si constata che sono verificate le condizioni del Teorema I.

Osserviamo che la classe $\mathcal{S}(\tau_h, n_h/2; \Lambda_h, 1)$ che figura in (5.3) è più ampia della $\mathfrak{L}(\Phi, K)$ poichè la $\mathcal{S}$ vincola i coefficienti soltanto lungo $\{I_h\}$; osserviamo ancora che il criterio di F. Lösch non impone le condizioni (5.4) o (5.5) al parametro K: pertanto il criterio di Lösch e quello della classe $\mathcal{S}$ che figura in (5.3), pur interferendo fra loro, non sono l'uno contenuto nell'altro.

6. - Confronto con alcuni criteri di G. Ricci.

In G. Ricci ([4], pp. 8-9 e 29-31), sono contenuti i tre seguenti criteri, contrassegnati con (III*), (IV*), (V*), che dànno condizioni sufficienti di non prolungabilità e che qui riportiamo:

« La serie di potenze $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, avente raggio di convergenza 1, non è prolungabile se è possibile determinare

(III*) la successione $\{n_h\}$ crescente e due numeri reali $\theta > 0$, $\sigma > 0$ tali che $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ e inoltre:

1°) il numero ν_h^* dei coefficienti

$$a_m \neq 0, \qquad n_h - n_h/\log^\sigma n_h \leqq m \leqq n_h + n_h/\log^\sigma n_h$$

risulti $\nu_h^* \leqq n_h/\log^{1+2\sigma} n_h$;

$$2°) \begin{cases} |a_m| \leqq \exp\left(n_h/(2\log^{2\sigma} n_h)\right) \cdot |a_{n_h}| \\ (1-\theta)n_h \leqq m < n_h - n_h/\log^\sigma n_h, \quad n_h + n_h/\log^\sigma n_h < m \leqq (1+\theta)n_h; \end{cases}$$

oppure

(IV*) la successione $\{n_h\}$ crescente e due numeri reali $\theta > 0$, $1/2 < \sigma < 1$ tali che $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$ e inoltre:

1°) il numero ν_h^* dei coefficienti

$$a_m \neq 0, \qquad n_h - n_h^\sigma \leqq m \leqq n_h + n_h^\sigma$$

risulti $\nu_h^* \leqq n_h^{2\sigma-1}/\log n_h$;

$$2°) \begin{cases} |a_m| \leqq \exp\left(n_h^{2\sigma-1}/2\right) \cdot |a_{n_h}| \\ (1-\theta)n_h \leqq m < n_h - n_h^\sigma, \quad n_h + n_h^\sigma < m \leqq (1+\theta)n_h; \end{cases}$$

oppure

(V*) le successioni $\{n_h\}$ (crescente) e $\{\nu_h\}$, e il numero reale $\theta > 0$ tali che $|a_{n_h}|^{1/n_h} \to 1$,

$$c \log n_h \leqq \nu_h = o(n_h/\log n_h) \qquad (^5)$$

e inoltre:

1°) il numero ν_h^* dei coefficienti

$$a_m \neq 0, \quad n_h - \sqrt{n_h \nu_h \log n_h} \leqq m \leqq n_h + \sqrt{n_h \nu_h \log n_h}$$

risulti $\nu_h^* \leqq \nu_h$;

$$2°) \begin{cases} |a_m| < \exp((\nu_h \log n_h)/2) \cdot |a_{n_h}| \\ (1-\theta)n_h \leqq m < n_h - \sqrt{n_h \nu_h \log n_h}, \quad n_h + \sqrt{n_h \nu_h \log n_h} < m \leqq (1+\theta)n_h. \end{cases}$$ ».

Osserviamo che ciascuno di questi criteri contempla funzioni $f(z)$ appartenenti ad una classe $\mathcal{F}(\tau_h, n_h/2; \Lambda_h, \nu_h)$ quando si assumano per (III*), (IV*), (V*), rispettivamente le terne di successioni

$$(6.1) \qquad \tau_h = n_h/(2 \log^{2\sigma} n_h), \quad \Lambda_h = n_h/\log^{\sigma} n_h, \quad \nu_h = n_h/\log^{1+2\sigma} n_h \qquad (\sigma > 0),$$

$$(6.2) \qquad \tau_h = n_h^{2\sigma-1}/2, \qquad \Lambda_h = n_h^{\sigma}, \qquad \nu_h = n_h^{2\sigma-1}/\log n_h \quad (1/2 < \sigma < 1),$$

$$(6.3) \qquad \tau_h = (\nu_h \log n_h)/2, \quad \Lambda_h = \sqrt{n_h \nu_h \log n_h}, \quad c \log n_h \leqq \nu_h = o(n_h/\log n_h).$$

Ciascuno di questi criteri consente ν_h eccezioni tutte necessariamente contenute nel tratto ridotto J_h, mentre alle funzioni della classe $\mathcal{F}(\tau_h, n_h/2; \Lambda_h, \nu_h)$ sono consentite ν_h eccezioni comunque ripartite ν_h' in J_h e ν_h'' in $I_h - J_h$, con $\nu_h' + \nu_h'' = \nu_h$; pertanto la classe di funzioni contemplata da ciascuno dei detti criteri è una classe particolare contenuta come parte propria nella corrispondente classe $\mathcal{F}(\tau_h, n_h/2; \Lambda_h, \nu_h)$.

Dimostriamo che i due criteri (III*) e (IV*) di G. RICCI sono contenuti nel nostro Teorema III (v. n. 3), riguardante il caso $\nu_h \to +\infty$. Intanto osserviamo che (III*) e (IV*) sono conseguenza di (V*) e si ottengono da questo assu-

---

(5) Nell'enunciato (V*) di G. RICCI ([4], p. 9) figura $c = e^8 + 1$. Il prof. G. RICCI mi comunica che tale costante c può essere fissata anche più piccola di $e^8 + 1$.

mendo rispettivamente per ν_h i valori riportati in (6.1) e (6.2), dopo di che anche τ_h e Λ_h assumono rispettivamente i valori riportati in (6.1) e (6.2). Esaminiamo poi fino a qual punto il criterio (V*) di G. RICCI è conseguenza del nostro Teorema III.

Teniamo conto che $\nu_h > c \log n_h$ (con c costante opportuna >1) e quindi $\nu_h \to +\infty$: controlliamo la validità delle ipotesi del Teorema III. Per h abbastanza grande risulta evidentemente $\tau_h \leqq n_h/2$, $\varphi_h \leqq n_h/2$, $\nu_h \to +\infty$, $\Lambda_h/\nu_h = \{(n_h \log n_h)/\nu_h\}^{1/2} \to +\infty$ (per l'ipotesi in (V*)) e quindi $\nu_h = o(\Lambda_h)$. D'altronde l'espressione

$$\nu_h \log (n_h/\nu_h) = o(n_h/\log n_h) \cdot \log (n_h/\nu_h) = o(n_h) < n_h/2 = \varphi_h$$

ci mostra che è soddisfatta anche la condizione per φ_h. Risulta poi $\tau_h/\log n_h = \nu_h/2 \to +\infty$ e l'ipotesi del Teorema III richiede ancora

$$\Lambda_h^2/n_h > (1 + \varepsilon)\{\nu_h \log (\Lambda_h/\nu_h) + \tau_h\}. \tag{6.4}$$

Controlliamo fino a qual punto la (6.4) è verificata. Calcoliamo separatamente

$$\Lambda_h^2/n_h = \nu_h \log n_h,$$

$$\nu_h \log (\Lambda_h/\nu_h) + \tau_h = \nu_h \log n_h + \frac{1}{2}\, \nu_h \log ((\log n_h)/\nu_h)\,.$$

Nelle condizioni dei criteri (III*) e (IV*) di G. RICCI è $\nu_h > n_h^\delta$, con $\delta > 0$ conveniente, e quindi

$$\log ((\log n_h)/\nu_h) < \log \log n_h - \delta \log n_h$$

e risulta

$$\nu_h \log (\Lambda_h/\nu_h) + \tau_h < (1 - \delta/2)\nu_h \log n_h + (\nu_h/2) \log \log n_h\,.$$

Pertanto la (6.4) è verificata, per h abbastanza grande, assumendo $\varepsilon < \delta/(2 - \delta)$.

Si conclude che (III*) e (IV*) sono conseguenza del nostro Teorema III.

La situazione è diversa per il criterio (V*), che viene ottenuto come conseguenza del Teorema III quando, in luogo dell'ipotesi $c \log n_h \leqq \nu_h = o(n_h/\log n_h)$, si sostituisca quella più restrittiva

$$n_h^\delta \leqq \nu_h = o(n_h/\log n_h) \qquad (\delta > 0)\,.$$

7. - Confronto con un criterio di F. Skof.

In un recente lavoro la dott.ssa F. Skof [5] ha dato un criterio di non prolungabilità per serie di potenze appartenenti ad una certa classe $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta)$, della quale riportiamo qui la definizione.

Definizione. « Diremo (con F. Skof) che *una serie* (1.1) *di potenze appartiene alla classe* $\mathfrak{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta)$ *lungo la successione di tratti* I_h, quando sono verificate le condizioni seguenti:

$$(\alpha) \qquad \overline{\lim}\, | a_n |^{1/n} = 1,$$

$$(\beta) \qquad 0 < \Phi_h \leqq n_h/2, \quad 0 < \lim (\Phi_h/\log n_h) \leqq +\infty, \quad \lim | a_{n_h} |^{1/\Phi_h} = 1,$$

$$(\gamma) \qquad \overline{\lim}\, | a_m |^{1/\Phi_h} \leqq 1 \quad \text{per} \quad m \in I_h - J_h, \quad (h = 1, 2, \ldots), \quad m \to +\infty,$$

$$J_h \equiv \{ n_h - \sqrt{\eta n_h \Phi_h} \leqq m \leqq n_h + \sqrt{\eta n_h \Phi_h} \}, \quad 0 < \eta < \theta^2 \lim (n_h/\Phi_h),$$

(δ) esiste $\delta > 0$ tale che sia

$$| a_m |^{1/\Phi_h} < e^{-\delta} \ (< 1) \qquad \text{per} \qquad m \in J_h, \quad h = 1, 2, \ldots,$$

(ν) e queste due condizioni (γ) e (δ) sono verificate quando si escludano da I_h al più $\bar{\nu}_h$ valori eccezionali di m per i quali a_m è vincolato soltanto dalla (α), e inoltre $\bar{\nu}_h$ verifica la seguente condizione

$$(7.1) \qquad \text{se} \quad \Phi_h/\log n_h \to +\infty, \qquad \bar{\nu}_h = o(\Phi_h/\log (n_h/\Phi_h)),$$

$$(7.2) \qquad \text{se} \quad \Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho} < +\infty, \quad \bar{\nu}_h = (\text{massimo intero} < 2\delta\bar{\varrho} - 1) \text{ ».}$$

Vale allora il seguente

Teorema (di F. Skof). « Ogni $f(z) \in \mathfrak{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta)$ non è prolungabile quando i numeri η e δ possono essere scelti in guisa da avere

$$(7.3) \qquad \lim ((\log n_h)/\Phi_h) < \delta \leqq \eta < \theta^2 \lim (n_h/\Phi_h) \text{ ».}$$

Vediamo se è possibile scegliere τ_h, φ_h, Λ_h, ν_h in modo che risulti

$$(7.4) \qquad \mathfrak{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta) \subseteq \mathscr{F}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)\,.$$

Cominciamo con l'assumere $\Lambda_h = \sqrt{\eta n_h \Phi_h}$. La ($\beta$) e la ($\delta$) ci dànno rispettivamente

$$(7.5) \qquad |a_{n_h}| = \exp(\varepsilon_h \Phi_h), \quad (\varepsilon_h \to 0); \qquad |a_m| < \exp(-\delta\Phi_h),$$

e pertanto

$$|a_m| < \exp\{-(\delta + \varepsilon_h)\Phi_h\} \cdot |a_{n_h}|.$$

Assumiamo

$$(7.6) \qquad \varphi_h = (\delta + \varepsilon_h)\Phi_h, \qquad (\varepsilon_h \to 0).$$

Dalla (γ) ricaviamo poi $\log|a_m| \leqq \varepsilon'_h \Phi_h$, ($\varepsilon'_h \to 0$), ossia, tenendo presente la prima delle (7.5),

$$|a_m| \leqq \exp\{(\varepsilon'_h - \varepsilon_h)\Phi_h\} \cdot |a_{n_h}|.$$

Possiamo pertanto assumere

$$(7.7) \qquad \tau_h = \eta_h \Phi_h, \qquad \eta_h \geqq \mathrm{Max}\,(0,\ \varepsilon'_h - \varepsilon_h), \qquad \eta_h \to 0+.$$

Con questa scelta di φ_h e τ_h il numero delle eccezioni alle (c) e (d) è non superiore al numero delle eccezioni alle (γ) e (δ) e possiamo quindi assumere

$$(7.8) \qquad \nu_h = \bar{\nu}_h.$$

Con la scelta così effettuata per τ_h, φ_h, Λ_h, ν_h vale la (7.4).

Si deve ora stabilire sotto quali eventuali condizioni ulteriori risultano verificate le condizioni (C), (A_r), (B_s) del Teorema I.

Come già osservammo alla fine del n. 4, il caso $\Lambda_h > cn_h$ ($c > 0$) conduce al teorema di FABRY, che è contenuto come caso particolare tanto nel criterio di F. SKOF quanto nel nostro Teorema I. Pertanto ci limitiamo a supporre

$$(7.9) \qquad \Lambda_h = \sqrt{\eta n_h \Phi_h} = o(n_h),$$

cioè che porta come conseguenza $\Phi_h = o(n_h)$.

Condizione (C):

$$\tau_h = \eta_h \Phi_h = o(\Phi_h) = o(n_h), \quad \varphi_h = (\delta + \varepsilon_h)\Phi_h = o(n_h), \quad \Lambda_h = o(n_h);$$

è poi anche $\nu_h = o(A_h)$, poichè risulta

$$\Phi_h \Big/ \log \frac{n_h}{\Phi_h} = A_h \cdot \frac{A_h}{\eta n_h} \Big/ \log \left\{ \left(\frac{\eta n_h}{A_h} \right)^2 \cdot \frac{1}{\eta} \right\} = o(A_h) .$$

Condizione (A_r):

1°) Sia $\Phi_h/\log n_h \to +\infty$; allora $\varphi_h/\log n_h \to +\infty$ e deve essere verificata (A_1). Si tratta di dimostrare che è $(\nu_h/\varphi_h)\cdot\log(n_h/\nu_h) < 2 - \varepsilon$ per $h \geqq h_0$, e questa disuguaglianza è verificata poichè, assumendo

$$\nu_h = \bar{\varepsilon}_h \Phi_h/\log(n_h/\Phi_h), \qquad (\bar{\varepsilon}_h \to 0), \qquad \varphi_h = (1 + o(1))\delta\Phi_h ,$$

si constata che il suo primo membro tende a zero.

2°) Sia $\Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho} > 0$ (finito); allora $\varphi_h/\log n_h \to \delta\bar{\varrho} = \varrho$ e deve essere verificata (A_2). Dovremo pertanto supporre $\delta\bar{\varrho} = \varrho > 1$, da cui $\delta > 1/\bar{\varrho}$; la seconda condizione in (A_2) richiede poi

$$\nu_h < 2\delta\bar{\varrho} - 1 . \tag{7.10}$$

Condizione (B_s):

1°) Sia $\Phi_h/\log n_h \to +\infty$; ricordiamo che è $\tau_h = \eta_h \Phi_h$ $(\eta_h \to 0+)$ e d'altronde τ_h può essere aumentato (poichè con tale aumento il numero delle eccezioni alla (d) diminuisce o resta invariato), per cui si può supporre $\eta_h \to 0+$ abbastanza lentamente in modo da avere anche $\tau_h/\log n_h \to +\infty$. Allora deve valere la (B_1) e si richiede

$$A_h^2/n_h = \eta\Phi_h > (1 + \varepsilon)\left\{ \nu_h \log(A_h/\nu_h) + \eta_h\Phi_h \right\} ;$$

essendo $A_h = o(n_h)$ e $\nu_h = o(\Phi_h/\log(n_h/\Phi_h))$, i due termini entro $\{\ \}$ sono $o(\Phi_h)$ e pertanto la disuguaglianza scritta è verificata per $h \geqq h_0$.

2°) Sia $\Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho} > 0$ (finito); allora deve valere la (B_2) con $\varrho_1 = 0$ poichè $\tau_h = o(\Phi_h)$, e si richiede

$$A_h^2/n_h = \eta\Phi_h > (1 + \varepsilon)\left\{ \nu_h \log(A_h/\nu_h) + \log n_h \right\}.$$

Osserviamo che, poichè deve valere (A_2), ν_h è limitato; calcoliamo l'espressione

$$\frac{\nu_h}{\Phi_h}\log\frac{A_h}{\nu_h} = \frac{\nu_h}{2}\left(\frac{1}{\Phi_h}\log\frac{\eta\Phi_h}{\nu_h^2} + \frac{\log n_h}{\Phi_h}\right) = \frac{\nu_h}{2}\left(\frac{1}{\bar{\varrho}} + o(1)\right).$$

Si richiede quindi

$$\eta > (1 + \varepsilon)\{(\nu_h/2 + 1)/\bar{\varrho} + o(1)\},$$

ossia $\nu_h < 2(\eta\bar{\varrho} - 1) - \varepsilon'$, e basta, essendo, ν_h intero,

$$\nu_h < 2(\eta\bar{\varrho} - 1); \tag{7.11}$$

poichè $\nu_h \geqq 1$ è intanto necessario che sia $2(\eta\bar{\varrho} - 1) > 1$, ossia $\eta > 3/(2\bar{\varrho})$.

Nel caso $\Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho} > 0$ (finito) abbiamo quindi trovato le ulteriori condizioni (7.10) e (7.11) che, tenuto conto del significato di ν_h, possono essere espresse nella forma

$$1 \leqq \nu_h = \{\text{massimo intero} < \mathrm{Min}\,(2\delta\bar{\varrho} - 1,\ 2(\eta\bar{\varrho} - 1))\} \tag{7.12}$$

(la quale porta necessariamente a: $\delta > 1/\bar{\varrho}$, $\eta > 3/(2\bar{\varrho})$.

Vale pertanto la seguente proposizione di confronto fra il Teorema I e il criterio di F. SKOF:

Ogni $f(z) \in \mathcal{F}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$, *con* τ_h, φ_h, Λ_h, ν_h *date rispettivamente da* (7.7), (7.6), (7.9), (7.8) *non è prolungabile se*

$$\Phi_h/\log n_h \to +\infty, \qquad \nu_h = o(\Phi_h/\log(n_h/\Phi_h)),$$

oppure se

$$\Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho} > 0 \quad (e\ \textit{finito}),$$

$$1 \leqq \nu_h = \{\text{massimo intero} < \mathrm{Min}\,(2\delta\bar{\varrho} - 1,\ 2(\eta\bar{\varrho} - 1))\}. \tag{7.12}$$

Osservazioni. 1) Nel caso $\Phi_h/\log n_h \to +\infty$ il criterio di F. SKOF e il nostro sono equivalenti, poichè in questo caso la condizione $\delta \leqq \eta$ di F. SKOF non è, sostanzialmente, vincolante. Infatti se è $f(z) \in \mathcal{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta)$ con $\delta > \eta$, si può sempre passare da δ a $\delta' < \delta$ tale che $0 < \delta' \leqq \eta$: risulta, a maggior ragione, $f(z) \in \mathcal{S}(\Phi_h, \bar{\nu}_h; \eta, \delta')$ e questa sostituzione, che interessa soltanto la condizione (δ), non viene a portare alcun altro cambiamento.

2) Nel caso $\Phi_h/\log n_h \to \bar{\varrho}$, tenendo presenti le (7.2) e (7.3) di F. SKOF e la nostra (7.12), distinguiamo i seguenti sottocasi: a) $1/\bar{\varrho} < \delta \leqq \eta \leqq 3/(2\bar{\varrho})$;

allora la condizione (7.3) di F. Skof è verificata, ma non lo è la nostra (che richiede $\eta > 3/(2\bar{\varrho})$; b) $1/\bar{\varrho} < \delta \leqq \eta < \delta + 1/(2\bar{\varrho})$; allora risulta $2(\eta\bar{\varrho} - 1) < < 2\delta\bar{\varrho} - 1$ e quindi può accadere che

$$(\text{massimo intero} < 2(\eta\bar{\varrho} - 1)) < (\text{massimo intero} < 2\delta\bar{\varrho} - 1)$$

e il criterio di F. Skof è meno restrittivo del nostro; c) $\delta < 1/\bar{\varrho}$, $\eta \geqq \delta + 1/(2\bar{\varrho})$; allora risulta $2\delta\bar{\varrho} - 1 \leqq 2(\eta\bar{\varrho} - 1)$ e il criterio di F. Skof e il nostro coincidono; d) $\delta > \eta > 3/(2\bar{\varrho})$; allora il criterio di F. Skof non è applicabile, mentre il nostro lo è.

8. - L'ampiezza di J_h in funzione di τ_h.

Per mostrare come il Teorema I (e per esso i Teoremi II e III) si presti a rispondere a problemi di tipo particolare, consideriamo alcuni casi.

Consideriamo il caso $\Lambda_h = \sqrt{\alpha n_h \tau_h}$ $(\alpha > 1)$ e veniamo a stabilire il seguente

Teorema V. *Ogni $f(z) \in \mathcal{F}(\tau_h, \varphi_h; \sqrt{\alpha n_h \tau_h}, \nu_h)$, $\alpha > 1$, non è prolungabile quando, per un $\varepsilon > 0$ e per $h \geqq h_0$, è*

$$\nu_h = \nu_0, \quad (\nu_0 \geqq 1),$$

$$\varphi_h > \frac{1}{2}(\nu_0 + 1 + \varepsilon) \log n_h,$$

$$\tau_h > \frac{\nu_0 + 1 + \varepsilon}{\alpha - 1} \log n_h,$$

oppure

$$\nu_h \to +\infty, \quad \nu_h = o(\sqrt{n_h \tau_h}),$$

$$\varphi_h > (1/2 + \varepsilon)\nu_h \log (n_h/\nu_h),$$

$$\tau_h > \frac{1 + \varepsilon}{\alpha - 1} \log (\sqrt{n_h \tau_h}/\nu_h) .$$

(*Quest'ultima condizione implica* $\tau_h/\log n_h \to +\infty$) .

Dimostrazione. La prima parte si ricava dal Teorema II e la seconda parte si ricava dal Teorema III (cambiando eventualmente il significato di ε).

9. - Un caso speciale regolato da una sola successione $\varepsilon_h n_h$.

Come abbiamo visto è $\nu_h = o(n_h)$; inoltre ci possiamo limitare sostanzialmente al caso $\tau_h = o(n_h)$, altrimenti (come i Teoremi II e III ci segnalano), eventualmente lungo una successione parziale, risulta $\Lambda_h > cn$ $(c > 0)$ e si ricade nel teorema di E. FABRY (vedi n. 4).

Vale il seguente

Teorema VI. *Sia* $\{\varepsilon_h\}$ *una successione infinitesima soddisfacente alle condizioni*

$$\varepsilon_h > 0, \qquad \varepsilon_h \to 0+, \qquad \varepsilon_h n_h / \log n_h \to +\infty;$$

allora ogni $f(z) \in \mathcal{F}(\tau_h, \varphi_h; \Lambda_h, \nu_h)$, *con*

$$\tau_h = \varepsilon_h n_h, \qquad \varphi_h = (1/2 + \varepsilon)\varepsilon_h \log(1/\varepsilon_h)\cdot n_h,$$

$$\Lambda_h = \sqrt{(1/2 + \varepsilon)\varepsilon_h \log(1/\varepsilon_h)}\cdot n_h, \qquad \nu_h = \varepsilon_h n_h$$

($\varepsilon > 0$, *indipendente da* h), *non è prolungabile.*

Dimostrazione. Basterà constatare che, nelle ipotesi dichiarate, risultano verificate le condizioni del Teorema I. Infatti, essendo $\tau_h = o(n_h)$, $\varphi_h = o(n_h)$, $\Lambda_h = o(n_h)$, $\nu_h = o(\Lambda_h)$, la condizione (C) è verificata; essendo poi $\varphi_h/\log n_h \to +\infty$, la condizione ($A_1$) richiede $(\nu_h/\varphi_h)\cdot\log(n_h/\nu_h) < 2 - \bar{\varepsilon}$ (6), e questa disuguaglianza, fissato $\varepsilon > 0$, è verificata per $\bar{\varepsilon}$ abbastanza piccolo, poichè il suo primo membro vale $2/(1+2\varepsilon)$; essendo infine $\tau_h/\log n_h \to +\infty$, la condizione ($B_1$) richiede, come si vede facilmente,

$$1 + 2\varepsilon > (1 + \bar{\varepsilon})(1 + \eta_h) \qquad (\eta_h \to 0 \text{ per } h \to +\infty)$$

e, fissato $\varepsilon > 0$, esistono $\bar{\varepsilon} > 0$ e h_0 tali che per $h \geqq h_0$ questa disuguaglianza risulta verificata.

---

(6) Indichiamo qui con $\bar{\varepsilon}$ ciò che nel Teor. I è indicato con ε.

Dimostrazione del teorema principale.

10. - Richiamo di un noto teorema.

Consideriamo il seguente noto criterio di non prolungabilità (7):

« Siano $f(z)$, $\{n_h\}$, θ, I_h definiti come nel n. **1** e sia $\{v_h\}$ una successione di numeri positivi con $v_h/n_h \to 0$.

La serie $f(z)$ non è prolungabile se lungo $\{I_h\}$ essa verifica la seguente proprietà:

posto

$$\Phi(u,\ v) = \begin{cases} u(\log(v/u) + 4), & 1 \leqq u \leqq v, \\ v(\log(u/v) + 4), & 1 \leqq v \leqq u, \end{cases}$$

e

$$\psi_h(u,\ v) = \frac{K}{n_h v^2} \exp\left\{ \frac{u^2}{n_h} - \Phi(u,\ v) \right\} \cdot | a_{n_h} | ,$$

esiste $K > 0$ tale che risulta

$$| a_m | \leqq \psi_h(u,\ v_h) \text{ per } m = n_h \pm u \in I_h \qquad (u = 1,\ 2,\ \ldots,\ [\theta n_h]), \tag{10.1}$$

salvo al più ν_h^* valori eccezionali di m, con

$\nu_h^* \leqq v_h$ quando $v_h \to +\infty$,

$\nu_h^* \leqq$ (massimo intero $< \overline{\lim}\, v_h$) quando $v_h = O(1)$ ».

O s s e r v a z i o n e p r e l i m i n a r e. La funzione

$$u^2/n_h - \Phi(u,\ v_h)$$

(7) Questo criterio si trova in G. Ricci [4], p. 9; vedi Teor. II*. Per la forma che qui viene data e per il complemento nel caso in cui $v_h = O(1)$, vedi F. Skof [5].

è decrescente per $1 \leqq u < \sqrt{n_h v_h/2}$ ed è crescente per $\sqrt{n_h v_h/2} < u$, e risulta (8)

$$\operatorname*{Min}_{u \geqq 1} \{ u^2/n_h - \Phi(u,\ v_h) \} = -\frac{1}{2} v_h(\log (n_h/v_h) + c_0),$$

$$(c_0 = 7 - \log 2 = 6.30 \ldots).$$

Il semplice esame della funzione considerata conduce a questo risultato (8). In particolare, per $\Lambda_h \geqq \sqrt{n_h v_h/2}$ abbiamo

$$\operatorname*{Min}_{u \geqq \Lambda_h} \{ u^2/n_h - \Phi(u,\ v_h) \} = \Lambda_h^2/n_h - v_h(\log (\Lambda_h/v_h) + 4).$$

11. - Limitazioni sufficienti per τ_h, ν_h, Λ_h, φ_h dedotte da (c), (d), (e).

Siano ν_h' e ν_h'' numeri maggioranti rispettivamente del numero dei valori m eccezionali per (c) contenuti in J_h e per (d) contenuti in $I_h - J_h$, contemplati in (e) e sia $\nu_h = \nu_h' + \nu_h''$.

Siano poi $\nu_h'^*$ e $\nu_h''^*$ il numero degli analoghi valori m eccezionali per la (10.1), onde $\nu_h'^* + \nu_h''^* = \nu_h^*$.

Teniamo conto che per h abbastanza grande $m = n_h$ è eccezionale da computarsi in ν_h'.

Consideriamo le due condizioni

$$\exp(-\varphi_h) \cdot | a_{n_h} | \leqq \operatorname*{Min}_{1 \leqq u \leqq \Lambda_h} \psi_h(u,\ v_h), \tag{11.1}$$

$$\exp \tau_h \cdot | a_{n_h} | \leqq \operatorname*{Min}_{u \geqq \Lambda_h} \psi_h(u,\ v_h). \tag{11.2}$$

Se vale (11.1), il numero ν_h' maggiorante del numero delle eccezioni alla (c) non è inferiore al numero $\nu_h'^* + 1$ delle eccezioni alla (10.1), con $m \in J_h$; se vale (11.2) il numero ν_h'' maggiorante del numero delle eccezioni alla (d) non è inferiore al numero $\nu_h''^*$ delle eccezioni alla (10.1), con $m \in I_h - J_h$: cioè $\nu_h' \geqq \nu'^* + 1$, $\nu_h'' \geqq \nu_h''^*$. Pertanto, se (11.1) e (11.2) valgono simultaneamente, risulta $\nu_h \geqq \geqq \nu_h^* + 1$ e da $\nu_h \leqq v_h + 1$ segue a maggior ragione $\nu_h^* \leqq v_h$.

Passando ai logaritmi dei due membri in (11.1) e in (11.2), sottraendo $\log | a_{n_h} |$ da ambo i membri e tenendo presente, per quanto riguarda il Min,

(8) Vedi ad es. F. Skof [5].

l'osservazione preliminare del n. **10**, si conclude che quando $\Lambda_h \geqq \sqrt{n_h v_h/2}$, le (11.1) e (11.2) equivalgono rispettivamente a

$$-\varphi_h \leqq -\frac{1}{2} v_h(\log(n_h/v_h) + c_0) + \log(K/(n_h v_h^2)),$$

$$\tau_h \leqq \Lambda_h^2/n_h - v_h(\log(\Lambda_h/v_h) + 4) + \log(K/(n_h v_h^2)),$$

e quindi il problema del «dosaggio» delle quattro successioni $\{\tau_h\}$, $\{\varphi_h\}$, $\{\Lambda_h\}$, $\{v_h\}$ è ridotto alla discussione delle disuguaglianze simultanee

$$\text{(A)} \qquad v_h(\log(n_h/v_h) + c_0) + 2\log n_h + 4\log v_h - 2\log K \leqq 2\varphi_h,$$

$$\text{(B)} \qquad \Lambda_h^2/n_h - v_h(\log(\Lambda_h/v_h) + 4) - \log n_h - 2\log v_h + \log K \geqq \tau_h,$$

unite alle condizioni accessorie

$$\sqrt{n_h v_h/2} \leqq \Lambda_h \leqq \theta n_h, \qquad \varphi_h \leqq c n_h, \qquad \tau_h \leqq c n_h,$$

dove $c > 0$ si può assumere, se fa comodo, piccolo quanto si vuole.

12. - Conseguenze della (A).

Poichè $v_h = o(n_h)$, risulta $\log(n_h/v_h) \to +\infty$; la validità di (A) richiede anche $v_h = o(\varphi_h)$ e anche $\varphi_h > \log n_h$ (almeno per h abbastanza grande). L'eventuale passaggio dalla successione $\{n_h\}$ a una successione parziale ci consente di esaminare (v. n. **1**, osservazione 4)) soltanto i due seguenti casi

$$\varphi_h/\log n_h \to +\infty, \qquad \varphi_h/\log n_h \to \varrho \geqq 1 .$$

1°) Nel primo caso la (A) si può scrivere

$$v_h \log(n_h/v_h) \leqq 2(1 + o(1))\varphi_h,$$

e questa risulterà verificata a maggior ragione se esisterà un $\varepsilon > 0$, indipendente da h, per cui si abbia

$$\text{(12.1)} \qquad v_h \log(n_h/v_h) < (2 - \varepsilon)\varphi_h .$$

Se $v_h = O(1)$, questa è sempre verificata e si può tralasciare.

2°) Nel secondo caso, avendosi $\varphi_h = (\varrho + o(1)) \log n_h$, dalla (A) si ricava

$$v_h \log (n_h/v_h) \leqq 2(\varrho - 1 + o(1)) \log n_h,$$

ossia

$$v_h(1 - (\log v_h)/\log n_h) \leqq 2(\varrho - 1 + o(1)) ,$$

ed essendo $v_h = o(\varphi_h) = o(\log n_h)$ è pure $\log v_h = o(\log n_h)$; ne segue $v_h \leqq \leqq 2(\varrho - 1 + o(1))$ e questa è conseguenza di

$$v_h < 2(\varrho - 1) - \varepsilon, \tag{12.2}$$

la quale implica $v_h = O(1)$.

13. - Conseguenze della (B).

Dalla disuguaglianza (B) (v. n. **11**) si ricava preliminarmente

$$A_h \geqq \sqrt{n_h \log n_h}, \quad A_h \geqq \sqrt{n_h \tau_h}, \quad A_h \geqq \sqrt{n_h v_h \log (A_h/v_h)}, \tag{13.1}$$

$$A_h \geqq \sqrt{n_h v_h/2}; \tag{13.2}$$

essendo $v_h = o(n_h)$, quest'ultima condizione ci dice che

$$A_h/v_h \geqq \sqrt{n_h/(2v_h)} \to +\infty$$

e quindi, se vale (13.2) si ha, tenendo presente la terza delle (13.1),

$$A_h/\sqrt{n_h v_h} \to +\infty, \qquad v_h = o(A_h) .$$

In dipendenza del comportamento del rapporto $\tau_h/\log n_h$, veniamo a distinguere i due casi

$$\tau_h/\log n_h \to +\infty, \qquad \tau_h/\log n_h \to \varrho_1 \geqq 0 .$$

1) Nel primo caso, essendo $v_h = o(A_h)$, $\log n_h + 2 \log v_h - \log K = o(\tau_h)$, la (B) prende la forma

$$A_h^2/n_h \geqq (1 + o(1)) v_h \log (A_h/v_h) + (1 + o(1)) \tau_h$$

e risulterà verificata a maggior ragione se esisterà un $\varepsilon > 0$, indipendente da h, per cui si abbia

$$A_h^2/n_h > (1 + \varepsilon)\{ v_h \log (A_h/v_h) + \tau_h \}. \tag{13.3}$$

2) Nel secondo caso è $\tau_h = (\varrho_1 + o(1)) \log n_h$ e d'altronde

$$2 \log v_h = O(v_h) = o(v_h \log (A_h/v_h))$$

e quindi la (B) prende la forma

$$A_h^2/n_h \geqq (1 + o(1))v_h \log (A_h/v_h) + (1 + \varrho_1 + o(1)) \log n_h$$

e questa è conseguenza di

$$A_h^2/n_h > (1 + \varepsilon)\{ v_h \log (A_h/v_h) + (1 + \varrho_1) \log n_h \}. \tag{13.4}$$

Nelle disuguaglianze (12.1) e (12.2) del n. precedente e nelle disuguaglianze (13.3) e (13.4) qui stabilite, figura la successione di numeri positivi $\{ v_h \}$; vediamo come si possa far intervenire la successione di interi positivi $\{ \nu_h \}$, $1 \leqq \nu_h \leqq v_h + 1$, in modo che tali disuguaglianze siano ancora garantite. Assumiamo $\nu_h = [v_h] + 1$ e quindi

$$v_h < \nu_h \leqq v_h + 1; \tag{13.5}$$

tenendo conto che la funzione $x \log (n/x)$ è crescente per $1 \leqq x < n/e$, ne segue che dalla seconda in (A_1), ossia da

$$\nu_h \log (n_h/\nu_h) < (2 - \varepsilon)\varphi_h,$$

segue la (12.1) (con lo stesso ε). Nel caso in cui v_h si mantenga limitato (e quindi anche ν_h) teniamo presente (12.2) ed esaminiamo i due casi seguenti: 1°) 2ϱ intero; assumiamo allora $v_h = 2(\varrho - 1) - \varepsilon$, $(0 < \varepsilon < 1)$, onde

$$\nu_h = [v_h] + 1 = 2(\varrho - 1) - 1 + 1 = 2\varrho - 2,$$

ossia

$$\nu_h = (\text{massimo intero} < 2\varrho - 1); \tag{13.6}$$

2°) 2ϱ non intero; assumiamo allora $[2(\varrho-1)]<v_h=2(\varrho-1)-\varepsilon$, $(0<\varepsilon<\text{mant}\,(2\varrho))$, onde $\nu_h=[v_h]+1=[2(\varrho-1)]+1=[2\varrho-1]$, ossia ancora la (13.6). La (12.2) è pertanto conseguenza della (13.6), la quale, per il significato di ν_h, è equivalente alla disuguaglianza che figura in (A_2), ossia alla $\nu_h<2\varrho-1$; essendo $\nu_h\geqq 1$ questa richiede poi $\varrho>1$.

Tenendo presente (13.5), si ha infine che, se valgono le disuguaglianze in (B_1) e (B_2), valgono rispettivamente, a maggior ragione, le (13.3) e (13.4).

Bibliografia.

[1] L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Ergebn. d. Math., N. F., H. 3, Springer-Verlag, Berlin 1955.

[2] E. Fabry, *Sur le points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et sur l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) **13** (1896), 367-399.

[3] F. Lösch, *Über nicht fortsetzbare Potenzreihen mit Lücken*, Math. Z. **32** (1930), 415-421.

[4] G. Ricci, *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*, Ann. Mat. Pura appl. (4) **38** (1955), 1-31.

[5] F. Skof, *Famiglie di serie non prolungabili e non lacunari e serie non prolungabili con «tratto ridotto»*, in corso di pubblicazione in Boll. Un. Mat. Ital. (3) **17** (1962).

* * *