Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 127-138

UGO BARBUTI e SERGIO GUERRA (*)

Osservazioni sulla utilizzazione dei polinomi di Tchebyschev di prima specie nel calcolo approssimato di funzioni regolari. (**)

Sia $f(x)$ una funzione reale, della variabile reale x nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$, sviluppabile in serie di MAC LAURIN:

$$f(x) = f(0) + (x/1!)f'(0) + (x^2/2!)f''(0) + \ldots .$$

Questa serie può essere più o meno rapidamente convergente (1) e talvolta, com'è ben noto, il numero dei termini che si debbono considerare per avere una assegnata maggiorazione dell'errore è assai rilevante. Si possono, a seconda del tipo di serie, utilizzare particolari procedimenti atti ad accrescere la convergenza (come, ad esempio, il metodo delle differenze).

Se supponiamo assegnata una maggiorazione dell'errore, e quindi il numero n dei termini del polinomio del MAC LAURIN $P_n(x)$, viene in mente, com'è naturale, di ricercare il polinomio d'approssimazione di TCHEBYSCHEV $T_m^*(x)$, di grado non superiore ad m $(m \leqslant n)$, che resti nei limiti dell'approssimazione voluta.

Supposto conosciuto m, la determinazione effettiva (2) di questo polinomio

---

(*) Indirizzo: Servizio Calcoli della C.E.P., Lungarno Pacinotti 55, Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 16-3-1962.

Lavoro eseguito sul programma di ricerca del gruppo n. 2 del C.O.N.A.R.M. . I nn. 1, 2, 3 sono stati curati da U. BARBUTI, i nn. 4, 5, 6 da S. GUERRA.

(1) Il termine « rapido » va inteso in senso globale cioè riferito a tutti gli x dell'intervallo $[-1, 1]$, convenendo di dire che: la successione dei polinomi $\{ P_n(x) \}$ converge più rapidamente della successione $\{ \widetilde{P}_n(x) \}$ se $\max_{x\in[-1,1]} | f(x) - P_n(x) | \leqslant \max_{x\in[-1,1]} | f(x) - \widetilde{P}_n(x) |$, per ogni n.

(2) E. YA. REMEZ, *On Methods for obtaining the best ...*, Ukrainian Academy of Science, Kiev 1935. Una recensione trovasi sul Bull. Amer. Math. Soc. **44** (1938), 14-15.

non è affatto semplice; un metodo di approssimazioni successive atto al calcolo di esso, interessante, anche se laborioso, trovasi, ad esempio, in un lavoro di F. D. MURNAGHAM e J. W. WRENCH (3).

Si può però talvolta ridurre il numero n dei termini di $P_n(x)$ (restando nei limiti dell'errore) costruendo, in luogo di $T_m^*(x)$, il polinomio di migliore approssimazione di $P_n(x)$ di ordine $n-1$ e successivamente lavorando a catena (4). Questo procedimento è ben noto (5), ma non sono state, ci sembra, ancora studiate le maggiorazioni di errore che queste successive sostituzioni importano.

Scopo di questa Nota è lo studio di dette maggiorazioni dalle quali si deduce una valutazione relativa alla diminuzione di grado del polinomio $P_n(x)$, la quale consente di restare nei limiti di errore, almeno per una certa classe di funzioni (cfr. n. **3**). Si è anzi constatato come, per taluni esempi appartenenti alla detta classe, il grado del polinomio trovato è pressochè il medesimo del $T_m^*(x)$. In questi casi si può evitare la costruzione di $T_m^*(x)$, la quale risulta tanto più laboriosa quanto più alto è il numero delle cifre decimali esatte che si desiderano.

1. – Sia $P^{(0)}(x)$ un polinomio di grado n nella x, variabile nell'intervallo $[-1,\ 1]$, e sia

$$T_n(x) = c_n^0 + c_n^1 x + \ldots + c_n^n x^n$$

il polinomio di TCHEBYSCHEV di prima specie dello stesso grado n (6).

Ricaviamo dalla precedente identità la potenza massima della variabile x:

$$x^n = -\frac{c_n^0 + c_n^1 x + \ldots + c_n^{n-1} x^{n-1}}{c_n^n} + \frac{T_n(x)}{c_n^n} = Q(x) + \frac{T_n(x)}{c_n^n}$$

(3) F. D. MURNAGHAM and J. W. WRENCH, *The determination of the Chebyshev approximating* ..., Math. Tables Aids Comput. **13** (1959), 185-193.

(4) Per un conveniente numero di volte.

(5) Cfr., ad es., C. LANCZOS, *Applied Analysis*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J. (1956), (p. 457 e segg.). In quest'ordine di idee vanno considerati anche i lavori: R. C. MINNICK, *Tschebyscheff Approximations for Power Series*, J. Assoc. Comput. Mach. **4** (1957), 487-504; R. DE VOGELAERE, *Remarks on the paper «Tschebyscheff Approximations for Power Series»*, J. Assoc. Comput. Mach. **6** (1959).

(6) Ricordiamo che diconsi polinomi di TCHEBYSCHEV di prima specie le funzioni che esprimono razionalmente $\cos n\theta$ mediante $\cos\theta$. Tali polinomi possono, induttivamente, essere definiti con le posizioni:

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = x, \qquad T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)\,.$$

Il coefficiente del termine di grado k appartenente a $T_n(x)$, c_n^k, si ha con la formula:

$$c_n^k = 2^{k-1}\left[2\binom{(1/2)(n+k)}{(1/2)(n-k)} - \binom{(1/2)(n+k)-1}{(1/2)(n-k)}\right]\cdot(-1)^{n-k/2}$$

nella quale è da porsi $c_n^k = 0$ tutte le volte che $n+k$ è dispari.

e sostituiamo in $P^{(0)}(x)$, al posto di x^n, il polinomio $Q(x)$. Chiameremo tale sostituzione *operazione* T e inoltre diremo *T-approssimante di ordine* 1 di $P^{(0)}(x)$ il polinomio $P^{(1)}(x)$ di grado non superiore ad $n-1$ che così si viene ad ottenere (7).

L'operazione T applicata a $P^{(1)}(x)$ porta alla considerazione del polinomio $P^{(2)}(x)$ che è *T-approssimante di ordine* 2 di $P^{(0)}(x)$, ..., la T applicata a $P^{(k-1)}(x)$ porta alla considerazione del polinomio $P^{(k)}(x)$ che è *T-approssimante di ordine* k di $P^{(0)}(x)$

2. – In questo e nei nn. 3, 4 e 5 considereremo i seguenti due casi particolarmente notevoli:

I) $P^{(0)}(-x) = P^{(0)}(x)$, cioè $P^{(0)}(x)$ è funzione pari.

Lo scriveremo, per comodità, nella forma

(1) $$P^{(0)}(x) = a_0^{(0)} - a_2^{(0)}x^2 + \ldots + (-1)^m a_{2m}^{(0)} x^{2m} \quad (8)$$

e scriveremo, sempre per comodità, nella forma

$$P^{(k)}(x) = a_0^{(k)} - a_2^{(k)}x^2 + \ldots + (-1)^{m-k} a_{2m-2k}^{(k)} x^{2m-2k}$$

il suo T-approssimante di ordine k.

II) $P^{(0)}(-x) = -P^{(0)}(x)$, cioè $P^{(0)}(x)$ è funzione dispari.

Lo scriveremo, come sopra, nella forma:

(2) $$P^{(0)}(x) = a_1^{(0)}x - a_3^{(0)}x^3 + \ldots + (-1)^m a_{2m+1}^{(0)} x^{2m+1},$$

e scriveremo nella forma

$$P^{(k)}(x) = a_1^{(k)}x - a_3^{(k)}x^3 + \ldots + (-1)^{m-k} a_{2m+1-2k}^{(k)} x^{2m+1-2k}$$

il suo T-approssimante di ordine k.

Nel primo caso i coefficienti di $P^{(k)}(x)$ si determinano da quelli di $P^{(k-1)}(x)$ con le formule seguenti (che si provano facilmente per induzione):

$(1)_1$ $$a_{2r-2k}^{(k)} = a_{2r-2k}^{(k-1)} + (-1)^{m+r-2(k-1)} \cdot c_{2m-2(k-1)}^{2r-2k} \cdot a_{2m-2(k-1)}^{(k-1)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-1)}) =$$
$$= a_{2r-2k}^{(k-1)} - \left| c_{2m-2(k-1)}^{2r-2k} \right| a_{2m-2(k-1)}^{(k-1)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \qquad (r = k, \ldots, m).$$

---

(7) $P^{(1)}(x)$ rappresenta il polinomio di approssimazione di ordine $n-1$ di $P^{(0)}(x)$, nel senso di TCHEBYSCHEV, per una ben conosciuta proprietà estremale dei $T_n(x)$.

(8) Sia in (1) che in (2) gli $a_i^{(0)}$ sono, per altro, numeri reali positivi o negativi qualsiasi.

Nel secondo caso i coefficienti si determinano con le formule:

$$(2)_1 \quad a^{(k)}_{2r+1-2k} = a^{(k-1)}_{2r+1-2k} + (-1)^{m+r-2(k-1)} \cdot c^{2r+1-2k}_{2m+1-2(k-1)} \cdot a^{(k-1)}_{2m+1-2(k-1)} \cdot (1/2^{2m-2(k-1)}) =$$

$$= a^{(k-1)}_{2r+1-2k} - \left| c^{2r+1-2k}_{2m+1-2(k-1)} \right| a^{(k-1)}_{2m+1-2(k-1)} \cdot (1/2^{2m-2(k-1)}) \qquad (r = k, \ldots, m).$$

3. – Vogliamo ora esaminare sotto quali condizioni è assicurata l'alternanza dei segni nei T-approssimanti di polinomi del tipo I (supponendo il primo termine positivo).

Per i T-approssimanti di polinomi del tipo II varranno condizioni del tutto analoghe; basterà nelle formule, che via via stabiliremo, sostituire a $2r$ e a $2m$ rispettivamente $2r+1$ e $2m+1$. È in queste circostanze che le maggiorazioni del n. **5** sono particolarmente efficaci.

Prop. I. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè $P^{(k)}(x)$ sia a segni alterni è che risulti:*

$$(1)_2 \qquad a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(k-1)}_{2r-2k} \qquad (r = k, \ldots, m).$$

La condizione è necessaria. Infatti se $P^{(k)}(x)$ è a segni alterni il 1°, e quindi il 2° membro della $(1)_1$, è positivo e perciò vale la $(1)_2$.

La condizione è sufficiente. Infatti se è verificata la $(1)_2$ risulta, per ogni r, $a^{(k)}_{2r-2k} > 0$ e quindi $P^{(k)}(x)$ è a segni alterni.

Prop. II. *Condizione sufficiente affinchè $P^{(k)}(x)$ sia a segni alterni è che lo sia $P^{(k-2)}(x)$ e risulti inoltre*

$$(1)_3 \qquad a^{(k-2)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(k-2)}_{2r-2k} \qquad (r = k, \ldots, m).$$

Per la Prop. I il polinomio $P^{(k)}(x)$ è a segni alterni allora e solo che sia verificata la $(1)_2$. Questa, se mediante le $(1)_1$ si esprimono $a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)}$ e $a^{(k-1)}_{2r-2k}$ in funzione dei coefficienti di $P^{(k-2)}(x)$, assume la forma:

$$a^{(k-2)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|} \cdot a^{(k-2)}_{2r-2k} + \frac{2m-2(k-2)}{2^2} \cdot \frac{(m-r+1)(2m-2k+3)}{(m-r+2)(2m-2k+2)} \cdot a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)}.$$

Pertanto, se $P^{(k-2)}(x)$ è a segni alterni, quindi $a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)} > 0$, perchè valga la $(1)_2$ è sufficiente che sia verificata la $(1)_3$.

Prop. III. *Affinchè i polinomi $P^{(1)}(x)$, $P^{(2)}(x)$, ..., $P^{(k)}(x)$ siano tutti a segni alterni è sufficiente che sia verificato il complesso θ_k delle $k\,(2m-k+1)/2$ condizioni:*

$$(1)_4 \qquad a^{(0)}_{2m-2(s-1)} < \frac{2^{2m-1-2(s-1)}}{\left| c^{2r-2s}_{2m-2(s-1)} \right|}\, a^{(0)}_{2r-2s} \qquad (s=1,\,\ldots,\,k;\quad r=s,\,\ldots,\,m)\,.$$

Si ha allora: $P^{(1)}(x)$ è (Prop. I) a segni alterni allora e solo che sia verificato θ_1. $P^{(2)}(x)$ è anch'esso (Prop. I) a segni alterni se è verificato θ_1 ed è:

$$a^{(1)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(1)}_{2r-2k} \qquad (k=2);$$

ma perchè questa condizione sia verificata (Prop. II) è sufficiente che

$$a^{(0)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(0)}_{2r-2k} \qquad (k=2)\,.$$

Quindi affinchè $P^{(1)}(x)$ e $P^{(2)}(x)$ siano entrambi a segni alterni è sufficiente che sia verificato θ_2.

Così, successivamente: $P^{(k)}(x)$ è anch'esso a segni alterni (Prop. I) se è verificato θ_{k-1} ed è:

$$a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(k-1)}_{2r-2k}\,;$$

ma perchè questa condizione sia verificata (Prop. II) è sufficiente che

$$a^{(k-2)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(k-2)}_{2r-2k}\,,$$

e così successivamente.

Infine (sempre per la Prop. II) avremo:

$$a^{(0)}_{2m-2(k-1)} < \frac{2^{2m-1-2(k-1)}}{\left| c^{2r-2k}_{2m-2(k-1)} \right|}\, a^{(0)}_{2r-2k}\,.$$

Quindi affinchè $P^{(1)}(x)$, $P^{(2)}(x)$, ..., $P^{(k)}(x)$ siano tutti a segni alterni è sufficiente che siano verificate le condizioni θ_k.

4. – Sia ancora $P^{(0)}(x)$ un polinomio del tipo I (⁹) e sia $E^{(k)}$ il valore assoluto dell'errore che si commette nel sostituire a $P^{(k-1)}(x)$ il T-approssimante di ordine k. Risulta:

$$E^{(k)} \leqslant \left| \frac{a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} \cdot T^{(x)}_{2m-2(k-1)}}{c^{2m-2(k-1)}_{2m-2(k-1)}} \right| \leqslant \frac{\left| a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} \right|}{2^{2m-1-2(k-1)}} .$$

Si ha d'altronde, successivamente,

$$a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} = a^{(k-2)}_{2m-2(k-1)} - \left| c^{2m-2(k-1)}_{2m-2(k-2)} \right| a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-2)}) =$$

$$= a^{(k-3)}_{2m-2(k-1)} - \left| c^{2m-2(k-1)}_{2m-2(k-2)} \right| a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-2)}) -$$

$$- \left| c^{2m-2(k-1)}_{2m-2(k-3)} \right| \cdot a^{(k-3)}_{2m-2(k-3)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-3)}) = \ldots = a^{(0)}_{2m-2(k-1)} - (1/2^{2\cdot 1}) \{ 1 \}_k \, a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)} -$$

$$- (1/2^{2\cdot 2}) \{ 2 \}_k \, a^{(k-3)}_{2m-2(k-3)} - \ldots - (1/2^{2(k-1)} \{ k-1 \}_k \, a^{(0)}_{2m} ,$$

dove si è posto:

$$\{ h \}_k = 2 \binom{2m-2\,(k-1)+h}{h} - \binom{2m-2(k-1)+h-1}{h} =$$

$$= \frac{(2m-2k+h+1)!\ (2m-2k+2h+2)}{h!\ (2m-2k+2)!} \qquad (^{10}).$$

$a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)}$ è quindi esprimibile mediante i coefficienti dei polinomi T-approssimanti di ordine inferiore a $k-1$, più compendiosamente, con la formula:

$$a^{(k-1)}_{2m-2(k-1)} = a^{(0)}_{2m-2(k-1)} - \sum_{h_0=1}^{k-1} (1/2^{2h_0}) \{ h_0 \}_k \cdot a^{(k-h_0-1)}_{2m-2(k-h_0-1)} .$$

(⁹) Per i polinomi del tipo II, n. 2, si hanno anche qui considerazioni del tutto analoghe. Basterà, in quel che segue, a $2m$ sostituire $2m+1$.

(¹⁰) È facile verificare che $\{ h \}_k$ cresce al crescere di h e decresce al crescere di k.

Sostituendo qui successivamente k con $k-h_0,\ k-2h_0,\ \ldots,\ k-(k-2)$ si ottiene:

$$a_{2m-2(k-1)}^{(k-1)} = a_{2m-2(k-1)}^{(0)} - \sum_{h_0=1}^{k-1} (1/2^{2h_0}) \{ h_0 \}_k \cdot a_{2m-2(k-h_0-1)}^{(0)} +$$

$$+ \sum_{h_0=1}^{[(1/2)(k-1)]} (1/2^{2h_0}) \{ h_0 \}_k \cdot \sum_{h_1=1}^{k-h_0-1} (1/2^{2h_1}) \{ h_1 \}_{k-h_0} \cdot a_{2m-2(k-2h_0-1)}^{(0)} - \ldots$$

$$+ (-1)^{k-1} \sum_{h_0=1}^{[\{1/(k-1)\}(k-1)]} (1/2^{2h_0}) \{ h_0 \}_k \cdot \sum_{h_1=1}^{k-h_0-1} (1/2^{2h_1}) \{ h_1 \}_{k-h_0} \ldots \sum_{h_{k-2}=1}^{k-(k-2)h_0-1} (1/2^{2h_{k-2}}) \cdot \{ h_{k-2} \}_{k-(k-2)h_0} \cdot a_{2m}^{(0)} \quad (^{11}).$$

$E^{(k)}$ può allora maggiorarsi con una espressione contenente solo i coefficienti del dato polinomio $P^{(0)}(x)$.

5. – Sia ora $P^{(0)}(x)$ un polinomio, ancora del tipo I, ma a segni alterni e col primo termine positivo; supponiamo che siano a segni alterni tutti i suoi T-approssimanti fino all'ordine $k-1$ incluso.

Risulta (n. 4):

$$E^{(1)} \leqslant (1/2^{2m-1})\, a_{2m}^{(0)},$$

$$E^{(2)} \leqslant (1/2^{2m-3}) [a_{2m-2}^{(0)} - (1/2^{2\cdot 1}) \{ 1 \}_2\, a_{2m}^{(0)}],$$

. . . .

$$E^{(k)} \leqslant (1/2^{2m-1-2(k-1)}) [a_{2m-2(k-1)}^{(0)} - (1/2^{2\cdot 1}) \{ 1 \}_k\, a_{2m-2(k-2)}^{(k-2)} - \ldots$$

$$\ldots - (1/2^{2(k-1)}) \{ k-1 \}_k\, a_{2m}^{(0)}].$$

(11) Con $[(1/2)(k-1)]$ si indica il massimo intero contenuto in $(1/2)(k-1)$, ecc..

In tal caso, il sostituire a $P^{(0)}(x)$ il suo T-approssimante di ordine k comporta un errore complessivo il cui valore assoluto E verifica la disuguaglianza

$$E \leqslant E^{(1)} + E^{(2)} + \ldots + E^{(k)} \leqslant (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \left[a^{(0)}_{2m-2(k-1)} + (1/2^{2\cdot 1})\, a^{(0)}_{2m-2(k-2)} + \right.$$

$$\left. + \ldots + (1/2^{2(k-1)})\, a^{(0)}_{2m}\right] - (1/2^{2m-1-2(k-2)}) \cdot \{1\}_k\, a^{(k-2)}_{2m-2(k-2)} -$$

$$- (1/2^{2m-1-2(k-3)}) \left(\{1\}_{k-1} + \{2\}_k\right) \cdot a^{(k-3)}_{2m-2(k-3)} - \ldots -$$

$$- (1/2^{2m-1}) \cdot \left(\{1\}_2 + \{2\}_3 + \ldots + \{k-1\}_k\right) \cdot a^{(0)}_{2m} .$$

Ne segue, trascurando termini negativi,

$$E < (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \left[a^{(0)}_{2m-2(k-1)} + (1/2^{2\cdot 1})\, a^{(0)}_{2m-2(k-2)} + \ldots + (1/2^{2(k-1)})\, a^{(0)}_{2m}\right] -$$

$$- (1/2^{2m-1}) \left(\{1\}_2 + \{2\}_3 + \ldots + \{k-1\}_k\right) \cdot a^{(0)}_{2m} ,$$

ed essendo

$$\{1\}_2 + \ldots + \{k-1\}_k > 1 ,$$

si ha quindi

$$E < (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \left[a^{(0)}_{2m-2(k-1)} + (1/2^{2\cdot 1})\, a^{(0)}_{2m-2(k-2)} + \ldots + (1/2^{2(k-2)})\, a^{(0)}_{2m-2}\right] .$$

Infine, se i coefficienti $a^{(i)}_{2i}$ $(i = 0, \ldots, m)$ del dato polinomio non crescono al crescere dell'indice, risulta:

$$(1)_6 \quad E < (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \left[1 + (1/2^{2\cdot 1}) + \ldots + (1/2^{2(k-2)})\right] a^{(0)}_{2m-2(k-1)} =$$

$$= \left\{ (2^{2(k-1)} - 1)/(3 \cdot 2^{2m-3}) \right\} a^{(0)}_{2m-2(k-1)} .$$

Considerazioni del tutto parallele portano per i polinomi del tipo II ad una disuguaglianza analoga. Basta, al solito, in $(1)_6$ al posto di $2m$ sostituire $2m + 1$.

6. – Sia ora $P^{(0)}(x)$ un polinomio qualsiasi in x $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$; lo scriveremo per comodità nella forma:

$$P^{(0)}(x) = a_0^{(0)} + a_2^{(0)} x^2 + \ldots + a_{2m}^{(0)} x^{2m} - (b_1^{(0)} x + b_3^{(0)} x^3 + \ldots + b_{2n+1}^{(0)} x^{2n+1}),$$

essendo n uno dei due interi $m-1$ od m [12], e scriveremo nella forma

$$P^{(2k)}(x) = a_0^{(2k)} + a_2^{(2k)} x^2 + \ldots + a_{2m-2k}^{(2k)} x^{2m-2k} - (b_1^{(2k)} x + b_3^{(2k)} x^3 + \ldots + b_{2n+1-2k}^{(2k)} x^{2n+1-2k})$$

il suo T-approssimante di ordine $2k$.

Si hanno ora le formule ricorrenti:

$$a_{2r-2k}^{(2k)} = a_{2r-2k}^{(2k-2)} - c_{2m-2(k-1)}^{2r-2k} \cdot a_{2m-2(k-1)}^{(2k-2)} \cdot (1/2^{2m-1-2(k-1)}) \qquad (r = k, \ldots, m),$$

$$b_{2r+1-2k}^{(2k)} = b_{2r+1-2k}^{(2k-2)} - c_{2n+1-2(k-1)}^{2r+1-2k} \cdot b_{2n+1-2(k-1)}^{(2k-2)} \cdot (1/2^{2n-2(k-1)}) \qquad (r = k, \ldots, n),$$

e si possono stabilire condizioni, simili a quelle vedute nel n. **3**, atte ad assicurarci l'alternanza dei segni dei coefficienti nei polinomi $P^{(2k)}(x)$. Per quanto riguarda il valore assoluto $E^{(2k)}$ dell'errore che si commette nel sostituire a $P^{(2k-2)}(x)$ il T-approssimante di ordine $2k$, risulta:

$$E^{(2k)} \leqslant \left| \frac{a_{2m-2(k-1)}^{(2k-2)} T_{2m-2(k-1)}(x)}{2^{2m-1-2(k-1)}} - \frac{b_{2n+1-2(k-1)}^{(2k-2)} T_{2n+1-2(k-1)}(x)}{2^{2n-2(k-1)}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left| a_{2m-2(k-1)}^{(2k-2)} \right|}{2^{2m-1-2(k-1)}} + \frac{\left| b_{2n+1-2(k-1)}^{(2k-2)} \right|}{2^{2n-2(k-1)}};$$

e se vogliamo una maggiorazione contenente solo i coefficienti iniziali, basterà operare sulle due quantità a secondo membro in modo del tutto simile a quanto abbiamo fatto nel n. **4**. Si tenga qui presente che:

$$a_{2m-2(k-1)}^{(2k-2)} = a_{2m-2(k-1)}^{(0)} + \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^h (1/2^{2 \cdot h}) \{ h \}_k \, a_{2m-2(k-h-1)}^{(2k-2h-2)},$$

$$b_{2n+1-2(k-1)}^{(2k-2)} = b_{2n+1-2(k-1)}^{(0)} + \sum_{h=1}^{k-1} (-1)^h (1/2^{2 \cdot h}) \{ h \}_k^* \, b_{2n+1-2(k-h-1)}^{(2k-2h-2)} \quad [13].$$

---

[12] Se $n = m-1$ è $P^{(0)}(x)$ di grado $2m$; se $n = m$ è $P^{(0)}(x)$ di grado $2m+1$.

[13] Con $\{ h \}_k^*$ si indica ciò che si ottiene da $\{ h \}_k$ quando a $2m$ si sostituisce $2n+1$.

7. – Allo scopo di mostrare l'utilità delle maggiorazioni conseguite con le formule del n. **5** facciamo alcuni esempi.

I polinomi del MAC LAURIN $P_n(x)$, relativi alle funzioni sen αx, $\cos \beta x$, verificano le condizioni θ_k se $|\alpha| < 4$, $|\beta| < 2$, come facilmente può controllarsi. Conseguentemente si hanno gli esempi seguenti.

Esempio I. – Si voglia approssimare la funzione $\cos(\pi/4)x$ sull'intervallo $[-1, 1]$ con un errore

$$E < 10^{-2}.$$

Utilizzando la formula del MAC LAURIN, basta fermarsi al termine di 4° grado; dunque:

$$P^{(0)}(x) = 1 - (\pi/4)^2 (x^2/2!) + (\pi/4)^4 (x^4/4!) .$$

Risulta d'altronde (cfr. n. **5**):

$$E + E^{(1)} \leqslant 0{,}002 < 10^{-2},$$

e in conseguenza il primo T-approssimante di $P^{(0)}(x)$,

$$P^{(1)}(x) = 0{,}998 - 0{,}292\, x^2 \quad (^{14}) ,$$

si scosta da $\cos(\pi/4)x$ per meno di 10^{-2}. MURNAGHAN e WRENCH [cfr. annotazione (3)] determinano con il loro procedimento il polinomio, anch'esso di 2° grado,

$$T^*(x) = 0{,}9980785 - 0{,}2928932\, x^2$$

con $\mathrm{Max}|\cos(\pi/4) - T^*(x)| \leqslant 0{,}0019215$.

Esempio II. – Si voglia approssimare la funzione $\cos(\pi/2)x$ sull'intervallo $[-1, 1]$ con un errore:

$$E < 10^{-3}.$$

---

(14) Volendo due cifre decimali esatte basta per i coefficienti di $P^{(1)}(x)$ fermarci alla terza cifra decimale.

Utilizzando la formula del MAC LAURIN, basta fermarci al termine di 8° grado; dunque:

$$P^{(0)}(x) = 1 - (\pi/2)^2 (x^2/2\,!) + (\pi/2)^4 (x^4/4\,!) - (\pi/2)^6 (x^6/6\,!) + (\pi/2)^8 (x^8/8\,!) \;.$$

Risulta (cfr. n. **5**)

$$E + E^{(1)} + E^{(2)} \leqslant 0{,}0006 < 10^{-3},$$

e in conseguenza il secondo T-approssimante di $P^{(0)}(x)$:

$$P^{(2)}(x) = 0{,}9993 - 1{,}2227\, x^2 + 0{,}2239\, x^4$$

si scosta da $\cos(\pi/2)x$ per meno di 10^{-3}. MURNAGHAM e WRENCH determinano il polinomio, anch'esso di 4° grado,

$$T^*(x) = 0{,}9994032 - 1{,}2227967\, x^2 + 0{,}2239903\, x^4$$

con $\mathrm{Max}\,|\cos(\pi/2)x - T^*(x)\,| \leqslant 0{,}0005968$.

Le valutazioni dell'errore fatte nel n. **5** sono particolarmente utili nel caso di approssimazioni molto spinte. Valga il seguente:

Esempio III. – Si voglia calcolare sen$x$ con 20 cifre decimali esatte, cioè con un errore

$$E < 10^{-20}.$$

Utilizzando la formula del MAC LAURIN, basta fermarsi al termine di 21° grado; dunque:

$$P^{(0)}(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots + x^{21}/21!\,.$$

Risulta:

$$E + E^{(1)} + E^{(2)} \leqslant 8.10^{-23} < 10^{-20}\,,$$

e in conseguenza il secondo T-approssimante di $P^{(0)}(x)$:

$$P^{(2)}(x) = a_1^{(2)}\, x - a_3^{(2)}\, x^3 + \ldots + a_{17}^{(2)}\, x^{17},$$

con

$$a_1^{(2)} = 0{,}99999999999999999999990, \qquad a_3^{(2)} = 0{,}16666666666666666666313\ ,$$

$$a_5^{(2)} = 0{,}00833333333333333327113, \qquad a_7^{(2)} = 0{,}00019841269841269834359\ ,$$

$$a_9^{(2)} = 0{,}00000275573192237770162, \qquad a_{11}^{(2)} = 0{,}00000002505210833305047\ ,$$

$$a_{13}^{(2)} = 0{,}00000000016059035379 36 \qquad a_{15}^{(2)} = 0{,}00000000000076463896 21\ ,$$

$$a_{17}^{(2)} = 0{,}00000000000000277266 61 \quad (^{15})\ ,$$

si scosta da sen x per meno di 10^{-20} (anzi per meno di $8 \cdot 10^{-23}$).

Summary.

In this paper it is indicated a process of economization of power series and studied the relative error valuation.

* * *

[15] I calcoli sono stati eseguiti con la Calcolatrice Elettronica Pisana (C.E.P.) del C.S.C.E. della Università di Pisa.