Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 89-94

ALDO ROLLERO (*)

Calotte di S_3 tangenti lungo un comune elemento differenziale. (**)

1. – D. GALLARATI ha dimostrato che (1): *Condizione necessaria e sufficiente affinchè due ipersuperficie algebriche F e G di S_r presentino contatto d'ordine $q-1$ lungo la varietà C loro completa interferenza, semplice per entrambe, ma comunque spezzata e comunque singolare, è che ad ogni ipersuperficie algebrica H passante genericamente per l'interferenza di F e G si possano associare due forme A, B tali che sussista l'identità:*

$$AF + BG = H^q$$

e tali che la varietà $A = B = F = G = 0$ *abbia al più la dimensione* $r-3$.

In quanto segue si stabiliscono due teoremi relativi al contatto del primo ordine di due calotte (d'ordine qualsiasi) di S_3 lungo un comune elemento differenziale regolare (d'ordine qualsiasi), dai quali appare la possibilità di estendere al campo differenziale i risultati di natura essenzialmente algebrica del GALLARATI: di tali teoremi ci si occupa al n. **4**, dopo aver dato (n. **2**) una rappresentazione per una calotta passante per un dato elemento differenziale (d'ordine qualsiasi), e (n. **3**) una rappresentazione per due calotte fra loro tangenti lungo un dato elemento differenziale (d'ordine qualsiasi).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Genova, Italia.

(**) Ricevuto il 16-XI-1961.

Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 20 del Comitato per la Matematica del C. N. R., per l'anno 1961-62.

(1) D. GALLARATI, *Ricerche sul contatto di superficie algebriche lungo curve*, Académie Royal de Belgique, Classe des Sciences, Mémoires, Tome XXXII, Fascicule 3, 1960, n. 3.

2. – Sia E un elemento differenziale regolare (d'ordine qualsiasi) di S_3, di origine O (0, 0, 0), tangente in O alla retta $y = z = 0$; E sia rappresentato da

$$(1) \qquad y + \alpha(x) = 0, \qquad\qquad z + \beta(x) = 0,$$

con $\alpha(x) = a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$, $\beta(x) = b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots$ (a_i, b_i costanti) serie formali di potenze [2] (della x) di grado ≥ 2.

Sia $z + my = 0$ (m costante finita) un piano π passante per la tangente in O ad E.

Una calotta F, di centro O, tangente in O a π potrà rappresentarsi mediante un'equazione del tipo:

$$(2) \qquad f(x, y, z) \equiv z + my + [2]_{x,y} \equiv z + \varphi(x, y) \equiv$$

$$\equiv z + \beta(x) + [-\beta(x) + \varphi(x, y)] \equiv z + \beta(x) + \Phi(x, y) = 0,$$

ove $\varphi(x, y)$, $\Phi(x, y)$ sono serie formali di potenze delle x, y di grado ≥ 1 ($= 1$ se $m \neq 0$, > 1 se $m = 0$). Se $\Phi(x, y)$ è di grado 1 allora essa è senz'altro regolare in y; se è di grado > 1 possiamo ancora ritenerla regolare in y, giacchè, ove non lo fosse, indicato con:

$$c_{s,0}\, x^s + c_{s-1,1}\, x^{s-1} y + \dots + c_{1,s-1}\, x y^{s-1}$$

il gruppo dei termini di grado minimo in x, y che figurano in $\varphi(x, y)$ ($c_{i,j}$ costanti non tutte nulle), basterebbe operare il cambiamento di coordinate:

$$x = x' + ky', \qquad y = y', \qquad z = z'$$

con k costante non nulla, soddisfacente alla condizione:

$$c_{s,0}\, k^{s-1} + c_{s-1,1}\, k^{s-2} + \dots + c_{1,s-1} \neq 0$$

---

(2) V. ad es., C. L. SIEGEL, *Analitic functions of several complex variables*, Notes by P. T. BATEMAN on lectures delivered at the Institute for advanced Study, 1948-49, p. 1; per quanto qui occorre v. pure: G. VECCHIO, *Sopra l'equazione locale di una ipersuperficie di S^n in un punto doppio*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 25-36.

per ricondurci, nel nuovo sistema di coordinate (x', y', z'), a quanto voluto. Per il *teorema di preparazione di Weierstrass* potrà allora scriversi:

$$\Phi(x, y) \equiv S(x, y)\,[y^r + y^{r-1} A_1(x) + \dots + A_r(x)] \tag{3}$$

con $S(x, y)$ serie unità, r intero $\geqslant 1$, $A_i(x)$ serie formale nella x di grado $\geqslant i$. Affinchè la (2) rappresenti una calotta passante per E, la (2) deve essere identicamente soddisfatta da $y = -\alpha(x)$, $z = -\beta(x)$, e poichè è $S[x, -\alpha(x)] \not\equiv 0$, in quanto S è serie unità e quindi $S[0, -\alpha(0)] \neq 0$, la

$$y^r + y^{r-1} A_1(x) + \dots + A_r(x) = 0$$

deve essere soddisfatta da $y = -\alpha(x)$; come immediatamente si verifica può scriversi:

$$y^r + y^{r-1} A_1(x) + \dots + A_r(x) \equiv [y + \alpha(x)]\, \bar{S}(x, y) \tag{4}$$

con $\bar{S}(x, y)$ serie formale in x, y.

Dalle (2), (3), (4) segue

$$f(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_1(x, y) = 0, \tag{5}$$

con $V_1(x, y)$ serie formale nelle x, y. È questa la forma sotto cui si scriverà l'equazione di una calotta F passante (semplicemente) per E e tangente in O a π. Se $m \neq 0$, $V_1(x, y)$ è serie unità e risulta $V_1(0, 0) = m$. Se $m = 0$, $V_1(x, y)$ non può essere serie unità: in quest'ultimo caso può eventualmente aversi

$$V_1(x, y) \equiv [y + \alpha(x)]^p\, \overline{V}_1(x, y)$$

con p intero $\geqslant 1$ e $\overline{V}_1(x, y)$ serie formale nelle x, y, non necessariamente unità.

Si osservi che il piano tangente ad F in un generico punto $P[X, -\alpha(X), -\beta(X)]$ di E ha equazione:

$$\psi(x, y, z; X) \equiv (x - X)\left\{\frac{\mathrm{d}\beta(X)}{\mathrm{d}X} + V_1[X, -\alpha(X)]\,\frac{\mathrm{d}\alpha(X)}{\mathrm{d}X}\right\} + \\ + [y + \alpha(X)]\, V_1[X, -\alpha(X)] + z + \beta(X) = 0\,. \tag{6}$$

Non possono essere rappresentate con equazioni del tipo (5) le calotte di centro O, passanti semplicemente per E e tangenti in O al piano $y = 0$. Ovviamente ogni calotta di centro O, passante (semplicemente) per E e tangente in O al piano $y + nz = 0$ (n costante finita) può pure rappresentarsi con un'equazione del tipo:

$$y + \alpha(x) + [z + \beta(x)]\, V(x, z) = 0 \tag{7}$$

con $V(x, z)$ serie formale in x, z: non possono rappresentarsi con equazioni del tipo (7) le calotte di centro O, passanti (semplicemente) per E e tangenti in O al piano $z = 0$.

3. – Oltre alla calotta F di equazione (5), si consideri un'altra calotta G, di centro O, passante anch'essa (semplicemente) per E e tangente in O ad F; G potrà rappresentarsi con un'equazione del tipo:

$$G: \qquad g(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_2(x, y) = 0,$$

ove se $m \neq 0$ V_2 è serie unità e $V_2(0, 0) = m$; mentre, se $m = 0$, V_2 non può essere serie unità.

Si voglia che F, G siano fra loro tangenti lungo E; affinchè ciò accada, tenuta presente la (6), occorre e basta che risulti:

$$V_2[x, -\alpha(x)] - V_1[x, -\alpha(x)] \equiv 0\,. \tag{8}$$

Ora può supporsi che $V_2(x, y) - V_1(x, y)$, la quale è una serie formale nelle x, y, non unità, sia regolare in y: ove ciò non fosse, ci si potrebbe infatti ricondurre al caso voluto, operando un ulteriore cambiamento di coordinate, in modo analogo a quanto s'è detto al n. 2, ed in modo che siano ancora soddisfatte le condizioni precedentemente specificate. Può allora scriversi:

$$V_2(x, y) - V_1(x, y) \equiv R(x, y)\,[y^t + y^{t-1} B_1(x) + \ldots + B_t(x)] \tag{9}$$

con $R(x, y)$ serie unità, t intero $\geqslant 1$, $B_i(x)$ serie formale nella x di grado $\geqslant i$. Poichè deve valere la (8) ed è $R[x, -\alpha(x)] \not\equiv 0$, risulterà:

$$y^t + y^{t-1} B_1(x) + \ldots + B_t(x) \equiv [y + \alpha(x)]\, \overline{R}(x, y) \tag{10}$$

con $\overline{R}$ serie formale in x, y. Dalle (9), (10) segue dunque:

$$V_2(x, y) - V_1(x, y) \equiv [y + \alpha(x)]\, W(x, y)$$

con $W(x, y)$ serie formale in x, y. Previa una eventuale opportuna scelta del sistema di coordinate, due calotte F, G, di origine O, passanti (semplicemente) per un comune elemento differenziale E, rappresentato dalle (1), e fra loro tangenti lungo E, possono dunque rappresentarsi rispettivamente mediante le equazioni (5) e

$$G: \quad g(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_1(x, y) + [y + \alpha(x)]^2\, W(x, y) = 0$$

con W serie formale in x, y.

Poichè

$$\frac{\partial(f-g)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial(f-g)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2(f-g)}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2(f-g)}{\partial x\, \partial y}$$

sono tutte nulle in $O(0, 0, 0)$, mentre

$$\frac{\partial^2(f-g)}{\partial y^2}$$

si annulla in O allora ed allora soltanto che risulti

$$W(0, 0) = 0, \tag{11}$$

può concludersi che la (11) è condizione necessaria e sufficiente affinchè F, G presentino in O contatto (almeno) del secondo ordine.

4. – *Siano F, G, H calotte di centro O, passanti (semplicemente) per un elemento differenziale regolare E, di centro O: può sempre scegliersi il sistema di riferimento in modo che E sia rappresentato da equazioni del tipo* (1) *ed F, G, H siano rappresentate dalle equazioni*:

$$F: \quad f(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_1(x, y) = 0, \tag{12}$$

$$G: \quad g(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_2(x, y) = 0, \tag{13}$$

$$H: \quad h(x, y, z) \equiv z + \beta(x) + [y + \alpha(x)]\, V_3(x, y) = 0,$$

con V_1, V_2, V_3 serie formali in x, y. Si ha:

a) *Se esistono due serie unità $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$ per cui risulti*:

$$U_1 f + U_2 g = h^2 \tag{14}$$

allora F, G sono tangenti lungo tutto E.

Infatti la (14) può pure scriversi:

$$g = W_1 f + W_2 h^2$$

ove $W_1 = - U_1 U_2^{-1}$, $W_2 = U_2^{-1}$ sono serie unità; è immediato verificare che i piani tangenti ad F, G in $P[X, -\alpha(X), -\beta(X)]$ coincidono, giacchè l'equazione del piano tangente a G in P è:

$$W_1[X, -\alpha(X), -\beta(X)] \psi(x, y, z; X) = 0$$

e $W_1[X, -\alpha(X), -\beta(X)] \not\equiv 0$, essendo W_1 serie unità.

b) *Se F, G hanno in ogni punto di E contatto del primo ordine ed hanno in O contatto esattamente del primo ordine (e non di ordine superiore), è possibile determinare due serie formali $U_1(x, y, z)$, $U_2(x, y, z)$ per cui valga la* (14).

Supposto d'aver scelto il sistema di riferimento in modo che risulti:

$$V_2(x, y) = V_1(x, y) + [y + \alpha(x)] W(x, y)$$

con $W(0, 0) \neq 0$, si soddisfa alla (14) ad es. ponendo:

$$U_1(x, y, z) = z + \beta(x) + [y + \alpha(x)][2V_3(x, y) - V_1(x, y)] -$$

$$- [V_3(x, y) - V_1(x, y)]^2 W^{-1}(x, y),$$

$$U_2(x, y, z) = [V_3(x, y) - V_1(x, y)]^2 W^{-1}(x, y).$$

Gli enunciati a), b) continuano a sussistere anche qualora si supponga che, ferme restando le rappresentazioni di F, G mediante le equazioni (12), (13), H sia rappresentata da un'equazione del tipo (7), qualora cioè risulti:

$$h(x, y, z) \equiv y + \alpha(x) + [z + \beta(x)] V(x, z).$$

Per quanto riguarda le serie formali U_1, U_2 di cui all'enunciato b) può ora ad es. porsi:

$$U_1(x, y, z) = [y + \alpha(x)][2V(x, z) - V^2(x, z) V_1(x, y)] +$$

$$+ [z + \beta(x)] V^2(x, z) - [1 - V(x, z) V_1(x, y)]^2 W^{-1}(x, y),$$

$$U_2(x, y, z) = [1 - V(x, z) V_1(x, y)]^2 W^{-1}(x, y).$$

* * *