Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 133-150

ANTONIO ANDREATTA (*)

Invarianti topologici d' una coppia di classi d' omologia unidimensionale su una superficie omeomorfa al toro. (**)

1. - Introduzione.

In una recente Memoria (1) ho studiato i sistemi di circuiti tracciati su una superficie omeormorfa al toro, di fronte all'omologia unidimensionale; e mi sono pure occupato delle collegate questioni riguardanti il « modello algebrico ».

Nei preliminari topologici ho avuto occasione di osservare che su una superficie omeomorfa al toro, cioè su una superficie S connessa serrata (nel senso di F. SEVERI) chiusa orientabile e d'ordine di connessione $Z = 2$ (nel senso di A. COMESSATTI) ,una classe H d'omologia nell'omologia della dimensione uno (sopra l'anello degli interi), *ammette un solo invariante topologico*, il quale è un intero $d \geqslant 0$ che ho denominato grado della classe.

Dopo aver brevemente richiamato tali preliminari, nel presente lavoro si introducono *gli invarianti topologici* (cioè i caratteri invarianti di fronte agli omeomorfismi della superficie S in sè) *offerti da una coppia* (ordinata) H_1, H_2 *di classi d'omologia*. Tali sono naturalmente i gradi d_1, d_2 delle classi H_1, H_2 risp., e l'intero $|d_{12}|$ ove $d_{12} = (Z_1 \cdot Z_2)$ è l'indice di KRONECKER del ciclo

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, Pavia (Italia).

(**) Ricevuto il 10 giugno 1961.

(1) Cfr. A. ANDREATTA, *Sistemi di circuiti tracciati su una superficie omeomorfa al toro e loro modelli algebrici*, « Ann. Mat. Pura Appl. » (in corso di stampa). Questa Memoria, che costituisce una premessa essenziale al presente lavoro, verrà richiamata nel testo semplicemente con la lettera M., seguita dall'indicazione del paragrafo cui il richiamo si riferisce.

Il presente lavoro, come la Memoria dianzi citata, è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 32 (« *Questioni di realità che offrono gli enti algebrici* ») del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Comitato per la Matematica).

zerodimensionale intersezione di due cicli Z_1, Z_2 appartenenti risp. alle classi H_1, H_2, cioè il numero algebrico delle intersezioni dei due cicli sulla superficie S orientata. Ma, abbandonati i casi più semplici, interviene un nuovo invariante, che chiameremo indice modulare della coppia di classi il quale è un intero η_{12} da intendersi però come *elemento dell'anello delle classi* mod. d_{12}.

Con l'intervento di quest'ultimo e più riposto invariante si consegue la caratterizzazione topologica, su S, della coppia di classi d'omologia e pertanto si esaurisce il problema propostoci. La ricerca tuttavia si completa sia fornendo un semplice procedimento per il calcolo dell'indice modulare di una coppia assegnata di classi d'omologia, sia attribuendo al nuovo invariante un significato geometrico, sia infine applicando i risultati conseguiti all'analogo problema che si presenta in relazione ad un numero qualunque di classi d'omologia.

Si osserva anche che il problema oggetto della presente ricerca equivale ad un problema di analisi indeterminata, il quale viene pertanto risolto attraverso una sua interpretazione topologica.

Non si avrà invece occasione di ritornare sulle questioni collegate al « modello algebrico », in quanto i risultati della Memoria citata non richiedono, anche dopo le attuali considerazioni topologiche, ulteriori complementi in proposito.

2. - Richiami e prime osservazioni.

Introdotta sul « toro » S un base per i cicli unidimensionali mediante due cicli $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ (non omologhi tra loro, nessuno dei due omologo a zero, con numero algebrico d'intersezione eguale all'unità), una singola classe H d'omologia è individuata dai suoi indici (rispetto alla base assunta), cioè da una coppia m_1, m_2 d'interi (relativi), nel senso che i cicli $\mathcal{C}$ di H sono quelli per cui

$$\mathcal{C} \sim m_1 \mathcal{C}_1 + m_2 \mathcal{C}_2 .$$

In particolare la classe nulla, cioè dei cicli omologhi a zero, è caratterizzata dagli indici $m_1 = m_2 = 0$. In ogni altro caso gli indici dipendono dalla base assunta; è invece indipendente dalla base il loro massimo comun divisore

$$d = D(m_1, m_2) ,$$

il quale è appunto un intero $d \geqslant 1$, detto grado della classe (M., n. 4). E si pone poi $d = 0$ per la classe nulla.

Ma il grado d fornisce il minimo numero di circuiti non intrecciati e disgiunti che costituiscono (debitamente orientati) un ciclo della classe H (M., n. 6), mentre $d-1$ fornisce il minimo numero di intrecci (punti doppi) che possiede un circuito il quale, debitamente orientato, sia un ciclo della classe H, supposta non nulla (M., n. **5**). Ne viene che d è un carattere topologico della classe; si dimostra anzi che è l'unico carattere di H invariante di fronte agli omeomorfismi del « toro » in sè (M., n. **9**).

A prescindere dalla classe nulla, hanno particolare importanza le classi primitive, cioè di grado *uno*, che sono poi le classi che contengono cicli forniti da un *singolo circuito* (orientato) *non intrecciato e non omologo a zero.* Ogni classe non nulla individua una classe primitiva ad essa associata; e precisamente la classe primitiva associata alla classe H d'indici m_1, m_2 (e grado d) è la classe d'indici $\frac{m_1}{d}$, $\frac{m_2}{d}$, i quali sono interi relativi primi tra loro. I cicli di H sono omologhi al multiplo d-mo di un ciclo della classe primitiva associata, onde:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un omeomorfismo φ del « toro » S in sè muti una classe H d'omologia in una classe H' è che le due classi abbiano lo stesso grado e che inoltre φ muti la classe primitiva associata ad H nella classe primitiva associata ad H'.

Si considerino ora due coppie di classi H_1, H_2 e H'_1, H'_2 dei rispettivi gradi d_1, d_2 e d'_1, d'_2.

Affinchè esista un omeomorfismo (di S in sè) che muti la prima coppia nella seconda è intanto necessario che si abbia:

$$d'_1 = d_1, \qquad d'_2 = d_2 . \tag{1}$$

Se una delle classi assunte è nulla, le (1) sono altresì condizioni sufficienti per l'esistenza di omeomorfismi che mutano la prima coppia di classi nella seconda. Ed invero, posto ad es. $d_1 = 0$, si ha anche $d'_1 = 0$ onde le classi H_1 ed H'_1 coincidono nella classe nulla; ma la condizione $d'_2 = d_2$ assicura (M., n. **9**) l'esistenza di omeomorfismi che mutano H_2 in H'_2 (perchè sono classi del medesimo grado), e ciascun omeomorfismo muta in sè la classe nulla (ossia, se si vuole, muta H_1 in H'_1).

In altre parole: *se in una coppia di classi d'omologia una è la classe nulla, il grado dell'altra è l'unico invariante topologico della coppia.*

Dopo di ciò si potrà *escludere l'intervento della classe nulla.*

Allora le (1) non sono, in generale, condizioni sufficienti per l'esistenza di omeomorfismi che mutano la prima coppia di classi nella seconda, ma, soddisfatte le (1), *è condizione necessaria e sufficiente* per l'esistenza di tali omeomorfismi l'*esistenza di omeomorfismi che mutano le classi primitive associate alla prima coppia nelle classi primitive associate alla seconda.* Perciò basta invero tener presente un'affermazione poc'anzi occorsa.

Pertanto nelle successive indagini basterà riferirsi *a classi tutte primitive*, e, salvo contrario avviso, i cicli che si considereranno nelle singole classi si penseranno sempre costituiti da *un solo circuito* (orientato, non intrecciato e non omologo a zero). Inoltre è lecito (a meno di deformazioni omotopiche) supporre che due cicli con numero algebrico d'intersezione d_{12} abbiano precisamente $|d_{12}|$ intersezioni (semplici e tutte dello stesso segno sulla superficie S orientata).

Tutto ciò del resto equivale ad una scelta opportuna dei cicli entro le classi assegnate (M., n. **8**, n. **10**, n. **11**).

3. - Coppie di classe primitive con $d_{12} = 0$.

Si riprendano le coppie H_1, H_2 e H_1', H_2' di classi, supponendole ormai primitive ($d_1 = d_1' = d_2 = d_2' = 1$), e si considerino i caratteri d_{12}, d_{12}' spettanti alle due coppie (n. 1), osservando che per l'esistenza di omeomorfismi che mutano una coppia nell'altra è intanto necessario che sia:

$$|d_{12}| = |d_{12}'|. \tag{2}$$

Se $d_{12} = 0$ esistono cicli Γ_1, Γ_2 risp. di H_1, H_2 costituiti ciascuno da un circuito γ_1 e risp. γ_2 senza mutue intersezioni. Allora (M., n. **5**) si ha $\gamma_1 \sim \gamma_2$ ossia $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ (e le classi H_1, H_2 coincidono), ovvero $\Gamma_1 \sim -\Gamma_2$ (e le due classi sono *opposte*, ossia, se si vuole, hanno indici ordinatamente opposti rispetto a qualunque base).

La distinzione tra le due alternative ha evidentemente carattere topologico. D'altra parte se $d_{12} = d_{12}' = 0$ e le due coppie assunte di classi rispondono alla medesima alternativa l'esistenza di omeomorfismi che mutano una coppia nell'altra è assicurata perchè rispondono a tale requisito gli omeomorfismi che mutano ad es. H_1 in H_1'.

E la questione è esaurita. Si noterà peraltro come la trattazione potrebbe senz'altro riferirsi a coppie di classi ordinatamente coi medesimi gradi (positivi) ma non necessariamente primitive.

4. - Coppie di classi primitive con $|d_{12}| = 1$.

Proseguendo si supponga ora $|d_{12}| = 1$, osservando che in tal caso esistono cicli Γ_1, Γ_2 di H_1, H_2 risp. costituiti da circuiti γ_1, γ_2 unisecanti (non omologhi tra loro e non omologhi a zero). I cicli Γ_1, Γ_2 forniscono dunque una base sul « toro » (n. **2**).

Analogamente, se $|d'_{12}| = 1$, esistono due cicli Γ'_1 di H'_1 e Γ'_2 di H'_2 che forniscono una base sul « toro » S.

Ma allora, riferendosi ad es. al rettangolo immagine di POINCARÉ, è immediata l'esistenza di omeomorfismi che mutano Γ_1, Γ_2 ordinatamente in Γ'_1, Γ'_2 cioè la prima coppia di classi nella seconda.

Così se $|d_{12}| = |d'_{12}| = 1$ null'altro è da aggiungere e si può affermare che una coppia di classi primitive con $|d_{12}| = 1$ non ammette altri invarianti topologici.

Oss. 1 - Si può notare che se $d_{12} = d'_{12}$ $(= \pm 1)$ gli omeomorfismi che mutano una coppia di classi nell'altra sono concordi, cioè mutano la superficie S in sè mantenendo l'orientamento prefissato sulla superficie. Se invece $d_{12} = -d'_{12}$ gli omeomorfismi sono discordi, cioè cambiano l'orientamento della superficie.

Oss. 2 - Piu in generale si potrà affermare che le coppie di classi dei gradi d e d' prefissati e con $|d_{12}| = d \cdot d'$ sono tutte topologicamente equivalenti. Basta invero osservare che le classi primitive associate sono nelle condizioni di questo n. **4**, e tener quindi presente una proposizione stabilita in n. **2**.

5. - Un teorema preliminare.

Giova per il seguito stabilire la seguente proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè esista un omeomorfismo di S in sè che trasformi le $\nu \geqslant 1$ classi d'omologia $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$ ordinatamente nelle classi $H'_1, H'_2, \ldots, H'_\nu$ è che esistano su S due basi in relazione alle quali le prime ν classi e risp. le seconde ν classi abbiano ordinatamente i medesimi indici.

La condizione è evidentemente sufficiente in quanto esistono (n. **4**) omeomorfismi che mutano la prima base nella seconda, e ciascuno di tali omeomorfismi muta una classe con certi indici rispetto alla prima base nella classe con gli stessi indici rispetto alla seconda.

La condizione è poi anche necessaria. Invero sia

$$\Gamma_i \sim m_{i1}\,\mathcal{C}_1 + m_{i2}\,\mathcal{C}_2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu)$$

un ciclo della classe H_i, e $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ una base prefissata su S; inoltre sia φ un omeomorfismo di S in sè che muti le prime ν classi nelle seconde. Posto

$$\mathcal{C}'_1 = \varphi(\mathcal{C}_1), \qquad \mathcal{C}'_2 = \varphi(\mathcal{C}_2), \qquad \Gamma'_i = \varphi(\Gamma_i),$$

tenendo presente che φ trasforma cicli omologhi in cicli omologhi e cioè induce un isomorfismo nel gruppo (abeliano, con due generatori liberi) delle classi d'omologia su S, si ha:

$$\Gamma'_i \sim \varphi(m_{i1}\,\mathcal{C}_1 + m_{i2}\,\mathcal{C}_2) \sim m_{i1}\,\varphi(\mathcal{C}_1) + m_{i2}\,\varphi(\mathcal{C}_2),$$

cioè:

$$\Gamma'_i \sim m_{i1}\,\mathcal{C}'_1 + m_{i2}\,\mathcal{C}'_2 .$$

Siccome ρ muta H_i in H'_i, a quest'ultima classe appartiene Γ'_i; le due classi hanno dunque in relazione alle basi $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e risp. $\mathcal{C}'_1$, $\mathcal{C}'_2$ i medesimi indici.
Il teorema è pertanto completamente dimostrato.

6. - L'indice modulare di una coppia di classi.

Si considerino ancora due classi H_1, H_2 primitive, e siano risp. Γ_1, Γ_2 due cicli di esse, ciascuno dei quali si potrà pensare (n. **2**) costituito da un sol circuito orientato, non intrecciato e non omologo a zero. Si può allora introdurre su S un circuito orientato Δ_1 (non intrecciato e non omologo a zero) tale che con Γ_1 fornisca una base (M., n. **3**). Risulta senz'altro (M., n. **7**):

$$(\Gamma_1 \cdot \Gamma_1) = 0, \qquad (\Delta_1 \cdot \Delta_1) = 0$$

e si può supporre che su Δ_1 l'orientamento sia tale che si abbia precisamente:

$$(\Gamma_1 \cdot \Delta_1) = 1. \tag{3}$$

Posto ora

$$\Gamma_2 \sim \alpha\,\Gamma_1 + \beta\,\Delta_1 \tag{4}$$

si ricava:

$$(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2) = \alpha\,(\Gamma_1 \cdot \Gamma_1) + \beta\,(\Gamma_1 \cdot \Delta_1) = \beta$$

$$(\Gamma_2 \cdot \Delta_1) = \alpha\,(\Gamma_1 \cdot \Delta_1) + \beta\,(\Delta_1 \cdot \Delta_1) = \alpha$$

e si ottengono i significati degli indici α, β della classe H_2 rispetto alla base Γ_1, Δ_1.

Per quanto concerne l'indice β si ritrova il carattere d_{12} già considerato (n. **1**), il cui valore assoluto è, come già sappiamo, un invariante topologico della coppia di classi H_1, H_2 considerate. E $\beta = d_{12}$ è evidentemente indipendente dal circuito Δ_1 introdotto.

Invece l'indice α dipende dalla scelta del circuito Δ_1, il quale peraltro potrà sostituirsi con ogni circuito orientato Δ per il quale ancora si abbia:

$$(\Gamma_1 \cdot \Delta) = 1 \tag{5}$$

Ora, dalle (3) e (5) si ricava

$$(\Gamma_1 \cdot (\Delta_1 - \Delta)) = 0$$

onde (M., n. 7, Oss. II)

$$\Delta_1 - \Delta \sim \lambda \Gamma_1 \tag{6}$$

con λ intero relativo qualunque.

Sostituendo a Δ_1 un ciclo Δ con $\Delta_1 \sim \Delta + \lambda \Gamma_1$ la (4) si scrive

$$\Gamma_2 \sim (\alpha + \lambda\, d_{12})\, \Gamma_1 + d_{12}\, \Delta \tag{7}$$

tenendo altresì presente che $\beta = d_{12}$.

Si ha dunque un nuovo invariante topologico legato alla coppia di classi e cioè l'intero

$$\eta_{12} = \alpha + \lambda\, d_{12} \tag{8}$$

che è però da intendersi come elemento nell'anello delle classi mod. d_{12}, e che verrà perciò denominato indice modulare della coppia assegnata di classi d'omologia.

Per meglio fissare le idee si potrà scegliere come ciclo Δ un circuito orientato (non intrecciato) Δ_0 appartenente alla classe (ancora primitiva) dei cicli omologhi a $\Delta_1 + \lambda \Gamma_1$ ove λ si sia scelto in modo che, nella (8), si abbia precisamente:

$$0 \leqslant \eta_{12} \leqslant |\, d_{12} \,| - 1\,. \tag{9}$$

In tal modo si normalizza la scelta del ciclo che fornisce, assieme a Γ_1, una base su S debitamente legata alla coppia assegnata di classi d'omologia. E la (7) si scriverà più opportunamente:

$$\Gamma_2 \sim \eta_{12}\, \Gamma_1 + d_{12}\, \Delta_0\,. \tag{10}$$

Oss. - Se $|\, d_{12} \,| = 1$, si ha senz'altro $\eta_{12} = 0$. Così, in accordo con gli sviluppi di n. **4**, la considerazione dell'indice modulare è, per $|\, d_{12} \,| = 1$, di fatto inessenziale.

Tale circostanza si registra anche se $|\, d_{12} \,| = 2$, perchè allora η_{12} è certamente dispari (in quanto primo con d_{12}, essendo H_2 una classe primitiva); ed allora la (9) fornisce necessariamente $\eta_{12} = 1$.

Soltanto per $|d_{12}| > 2$ ha dunque interesse la considerazione del nuovo invariante.

Tuttavia, per evitare fatti eccezionali, basterà supporre $d_{12} \neq 0$. Ed alle coppie di classi con $d_{12} = 0$ è già stato dedicato apposito esame (n. 3).

Ancora si può rilevare che si ha $\eta_{12} = 0$ soltanto se $|d_{12}| = 1$, in quanto η_{12}, d_{12} sono interi primi tra loro. Ed allora $\Delta_0 \sim \Gamma_2$ ovvero $\Delta_0 \sim -\Gamma_2$.

Infine si noterà che i valori consentiti di η_{12} sono i numeri minori di $|d_{12}|$ e primi con $|d_{12}|$.

7. - Caratterizzazione topologica di una coppia di classi primitive con $d_{12} \neq 0$.

Gli invarianti topologici $|d_{12}|$, η_{12} legati ad una coppia di classi H_1, H_2 primitive *caratterizzano topologicamente la coppia* (se $d_{12} \neq 0$).

In altre parole se H_1', H_2' è una seconda coppia di classi d'omologia con invarianti eguali a quelli della precedente, cioè si ha:

$$|d_{12}'| = |d_{12}|, \qquad \eta_{12}' = \eta_{12} \tag{11}$$

esistono certamente omeomorfismi del « toro » in sè che mutano la prima coppia nella seconda.

Ed invero, svolte in relazione alle classi H_1, H_2 le operazioni indicate al n. prec., si operi in modo analogo partendo dalle classi H_1', H_2'. S'introdurrà perciò su S una base costituita da un circuito orientato Γ_1' di H_1' e da un o p p o r t u n o circuito orientato Δ_0'; dopo di che un ciclo Γ_2' di H_2' si esprimerà con l'omologia:

$$\Gamma_2' \sim \eta_{12}' \Gamma_1' + d_{12}' \Delta_0' . \tag{12}$$

Orbene se valgono le (11), ed è precisamente $d_{12}' = d_{12}$, un omeomorfismo che muti la base Γ_1, Δ_0 nella base Γ_1', Δ_0' (n. **4**) muta la classe H_1 (dei cicli omologhi a Γ_1) nella classe H_1' (dei cicli omologhi a Γ_1') e la classe H_2 (dei cicli omologhi a $\Gamma_2 \sim \eta_{12} \Gamma_1 + d_{12} \Delta_0$) nella classe H_2' (dei cicli omologhi a $\Gamma_2' \sim \sim \eta_{12} \Gamma_1' + d_{12} \Delta_0'$), in virtù di quanto si è osservato al n. **5**.

Se poi valessero le (11) ma con $d_{12}' = -d_{12}$ basta argomentare nello stesso modo utilizzando gli omeomorfismi che mutano la base Γ_1, Δ_0 nella base Γ_1', $-\Delta_0'$.

Nel primo caso si avranno omeomorfismi concordi, nel secondo omeomorfismi discordi (n. **4**, Oss. I).

8. - Il calcolo dell'indice modulare di una coppia di classi primitive.

Fissata su S una base $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, una coppia di classi H_1, H_2 è assegnata mediante gli indici m_{11}, m_{12} e risp. m_{21}, m_{22} relativi alla base prefissata. Ed essendo le classi primitive sarà:

$$D(m_{11}, m_{12}) = D(m_{21}, m_{22}) = 1.$$

Il carattere d_{12} si calcola notoriamente:

$$d_{12} = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{vmatrix} = m_{11}\, m_{22} - m_{12}\, m_{21};$$

invece il calcolo dell'indice modulare richiede qualche sviluppo, peraltro assai facile.

Ripresa perciò la trattazione di n. **6**, si ponga

$$\Delta_1 \sim x\,\mathcal{C}_1 + y\,\mathcal{C}_2$$

e si osservi che la condizione (3) si scrive:

$$\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} \\ x & y \end{vmatrix} \equiv m_{11}\, y - m_{12}\, x = 1\,.$$

Scelta comunque una coppia d'interi x, y soddisfacenti a tale equazione diofantea (certamente risolubile perchè m_{11} ed m_{12} sono interi primi tra loro), si calcola l'intero α:

$$\alpha = (\Gamma_2 \cdot \Delta_1) = \begin{vmatrix} m_{21} & m_{22} \\ x & y \end{vmatrix} = m_{21}\, y - m_{22}\, x.$$

Il resto della divisione di α per $|\, d_{12} \,|$ è l'indice modulare η_{12} soddisfacente alla (9). Calcolato η_{12}, mediante il sistema

$$m_{11}\, y_0 - m_{12}\, x_0 = 1, \qquad m_{21}\, y_0 - m_{22}\, x_0 = \eta_{12}$$

si determinano due interi x_0, y_0 interpretabili come indici della classe cui appartiene il ciclo Δ_0 rispondente alla scelta «normalizzata» di cui al n. **6**.

9. - Il significato topologico dell' indice modulare.

Dell'indice modulare η_{12} di una coppia di classi H_1, H_2 primitive è già stata fornita (n. **6**) una interpretazione topologica indiretta. Se invero Γ_1 e Γ_2 sono cicli di H_1 e risp. di H_2 (ciascuno costituito da un sol circuito non intrecciato della superficie S), $d_{12} = (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)$ è il numero algebrico delle intersezioni dei due cicli, ed $\eta_{12} = (\Gamma_2 \cdot \Delta_0)$ è il numero algebrico delle intersezioni dei cicli Γ_2 e Δ_0, ove Δ_0 è un circuito (orientato e non intrecciato) scelto tra i cicli Δ idonei a fornire assieme a Γ_1 una base sopra S e in modo che l'intero $(\Gamma_2 \cdot \Delta_0)$ soddisfi (com'è lecito appunto per gli sviluppi di n. **6**) alle diseguaglianze (9), cioè sia non negativo ed inferiore a $|d_{12}|$.

D'altra parte è ben prevedibile che detto invariante modulare possa presentarsi come invariante topologico in modo diretto, ossia in relazione soltanto alla coppia Γ_1, Γ_2 di circuiti orientati, ove, ben si intende, sia $d_{12} \neq 0$ (n. **3**).

A tale scopo conviene tuttavia riprendere la trattazione di n. 6, ed in particolare la (10), che qui, per semplicità di notazioni, scriveremo:

$$\Gamma_2 \sim \alpha \Gamma_1 + \beta \Delta_0 \tag{13}$$

ponendo dunque $\eta_{12} = \alpha$, $d_{12} = \beta$. E, per fissare l'attenzione, supporremo $\beta > 0$, onde scriveremo la (9) sotto l'aspetto:

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta - 1 \, . \tag{14}$$

Inoltre supporremo (n. **2**) di aver scelto Γ_1 e Γ_2 entro le classi H_1 ed H_2 in modo che essi abbiano precisamente β intersezioni (semplici e tutte dello stesso segno sulla superficie S orientata).

Tenendo presente la (13), e quindi pensando di aver fissato su S la base costituita dai circuiti Γ_1 e Δ_0 si potrà introdurre su S un modello minimo di Γ_2 (M., n. **8**). Perciò, nel rettangolo immagine di S, sul lato Γ_1' (risp. Δ_0') s'introducono β punti P_1', P_2', ... , P_β' (risp. α punti Q_1', Q_2', ... , Q_α') che si succedano ordinatamente secondo l'orientamento di Γ_1' (risp. di $-\Delta_0'$). Siano quindi P_1'', P_2'', ... , P_β'' (risp. Q_1'', Q_2'', ... , Q_α'') i punti di Γ_1'' (risp. di Δ_0'') che, ordinatamente, sono immagini degli stessi punti P_1, P_2, ..., P_β di Γ_1 (risp. Q_1, Q_2, ..., Q_α di Δ_0) della superficie S, punti che hanno già come immagini i punti di Γ_1' (risp. di Δ_0') precedentemente intodotti [2]. Cfr. fig. 1, per $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

---

[2] Si riprende qui, con piccole varianti esteriori, il procedimento introdotto in M., n. **8**. Non è dunque necessario scendere in particolari minuti.

S'introducono quindi nel rettangolo gli $\alpha + \beta$ segmenti (rettilinei) orientati aventi come primi estremi i punti:

(15) $$Q'_1, \ldots, Q'_\alpha, \quad P'_1, \ldots, P'_{\beta-\alpha}, \quad P'_{\beta-\alpha+1}, \ldots, P'_\beta$$

e come secondi estremi ordinatamente i punti:

(16) $$P''_1, \ldots, P''_\alpha, \quad P''_{\alpha+1}, \ldots, P''_\beta, \quad Q''_1, \ldots, Q''_\alpha .$$

Ciò equivale ad introdurre su S un ciclo della classe H_2, e si tratterà di un ciclo Γ_2 costituito da un solo circuito perchè H_2 è classe primitiva (onde α, β sono interi primi tra loro).

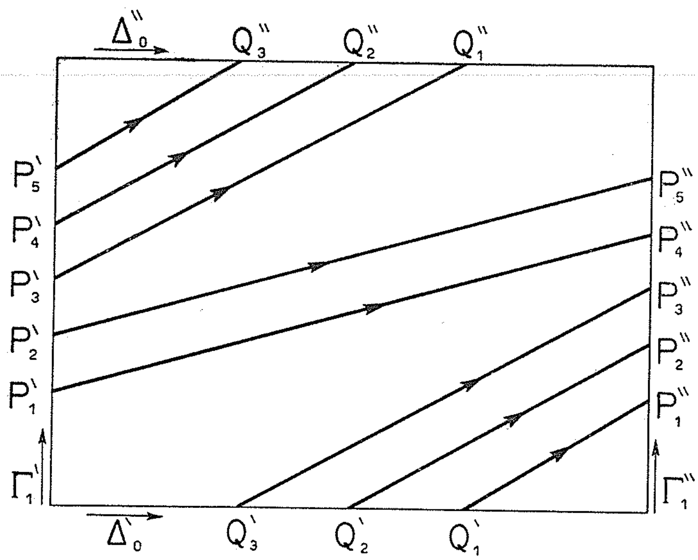

Fig. 1.

Il circuito Γ_2 è ripartito dai β punti P_i che esso ha in comune con Γ_1 in β « segmenti » orientati aventi come primi estremi i punti:

(17) $$P_1, \ldots, P_{\beta-\alpha}, \quad P_{\beta-\alpha+1}, \ldots, P_\beta$$

e come secondi estremi ordinatamente i punti:

(18) $$P_{\alpha+1}, \ldots, P_\beta, \quad P_1, \ldots, P_\alpha$$

come subito si accerta osservando le successioni (15) e (16) e pensando di fondere in unico « segmento » coppie di segmenti di Γ_2 aventi estremo in un medesimo punto Q_i.

Mentre dunque sul circuito orientato Γ_1 i β punti d'incontro con Γ_2 si succedono nell'ordinamento (ciclico):

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_\beta \tag{19}$$

sul circuito orientato Γ_2 gli stessi punti s'incontrano nell'ordinamento ciclico che si ottiene assumendo successivamente punti che, nell'ordinamento (19), *si trovano α posti più innanzi*. Ciò si riscontra invero con immediatezza osservando le successioni (17) e (18) le quali forniscono appunto ordinatamente coppie di punti P_i che si succedono su Γ_2 (3).

Si può dunque raccogliere la seguente notevole proposizione:

Considerati sul « toro » S due circuiti Γ_1, Γ_2 orientati e non intrecciati con $\beta \geqslant 2$ intersezioni semplici a cui competa il medesimo segno (sulla superficie S orientata), *se le β intersezioni si succedono su Γ_1 in un certo ordinamento ciclico, esse su Γ_2 si succedono nell'ordinamento che se ne ottiene passando da ciascun punto a quello che si trova α posti più innanzi nell'ordinamento precedente, essendo α un certo intero, minore di β e primo con β, che è sempre lo stesso per tutte le intersezioni dei due circuiti.*

Lo « scatto » α è pertanto un invariante topologico della coppia di circuiti Γ_1, Γ_2 o, se si vuole, della coppia di classi d'omologia H_1, H_2 cui i circuiti appartengono; ed α fornisce precisamente un significato topologico diretto all'invariante modulare della coppia di classi (entrambe primitive e con l'invariante $|d_{12}| = \beta$).

Oss. - Si riscontra subito che mutando l'orientamento su uno dei due circuiti Γ_1, Γ_2, ossia sostituendo una classe con la sua opposta, lo scatto α viene sostituito con lo scatto $\beta - \alpha$. Sostituendo invece entrambe le classi con quelle risp. opposte si trova naturalmente il medesimo indice modulare.

10. - Estensione dei risultati.

Sempre sul « toro » ci si può porre il più generale problema della ricerca degli invarianti topologici di un sistema Σ ordinato di più classi d'omologia. Orbene, dopo i risultati dianzi esposti, il problema non offre alcuna difficoltà.

---

(3) Siccome α e β sono interi primi tra loro, col criterio precisato nel testo si riottengono *tutti* i punti (19), ma (se $\alpha > 1$) con ordinamento diverso.

Intanto si potrà supporre che in Σ *non vi siano classi coincidenti con la classe nulla o classi coincidenti tra loro* perchè ogni omeomorfismo di S in sè muta la classe nulla nella classe nulla e classi eguali in classi eguali. E pertanto la soppressione di una classe nulla ovvero la soppressione di una classe eguale ad altra invece conservata non altera gli invarianti del sistema.

Inoltre ci si potrà sempre ricondurre a *sistemi di classi primitive*, perchè gli invarianti di un sistema qualunque sono, oltre ai gradi delle singole classi, gli invarianti del sistema delle classi primitive associate (n. **2**).

Dopo di ciò si presenta il problema di indicare condizioni necessarie e sufficienti affinchè esistano omeomorfismi di S in sè che mutano l'uno nell'altro due assegnati sistemi ordinati Σ e Σ' di classi primitive H_i e risp. H'_i, ove sia $i = 1, 2, \ldots, \nu$ ovvero possa l'indice i essere un qualunque numero naturale.

Se in Σ due classi H_a, H_b $(a \neq b)$ coincidono ovvero sono classi opposte, è intanto necessario che le medesime circostanze presentino, in Σ', le classi H'_a, H'_b (n. **3**). Quando però sia soddisfatta questa condizione ogni omeomorfismo che muti H_a in H'_a muta di conseguenza H_b in H'_b, onde quest'ultime classi si possono trascurare nelle successive considerazioni. Si potrà cioè ormai supporre che, tanto in Σ quanto in Σ' *non esistano classi coincidenti nè classi opposte.*

Calcolati gli invarianti d_{12}, η'_{12} (risp. d'_{12}, η_{12}) della coppia di classi H_1, H_2 (risp. H'_1, H'_2) sarà $d_{12} \neq 0$ e $d'_{12} \neq 0$, e condizione n e c e s s a r i a per l'esistenza di omeomorfismi concordi che trasformano Σ in Σ' sono:

$$(20_1) \qquad d'_{12} = d_{12}, \qquad \eta'_{12} = \eta_{12}$$

e, per l'esistenza di omeomorfismi discordi, sono:

$$(20_2) \qquad d'_{12} = -d_{12}, \qquad \eta'_{12} = \eta_{12}$$

in virtù di n. **6**. Anzi, se sono verificate le (20_1) ovvero le (20_2), esistono omeomorfismi che mutano la prima coppia di classi nella seconda, i quali mutano una base Γ_1, Δ_0 invariantivamente legata alla prima coppia di classi in una base Γ'_1, Δ'_0 legata alla seconda (cfr. anche n. **7**).

Dopo di ciò (n. 5) occorre e basta che, *in relazione alle basi indicate, le singole classi di Σ e risp. di Σ' abbiano, ordinatamente, i medesimi indici.*

È appena necessario rilevare che, date le classi di Σ e di Σ', in relazione ad una base $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ comunque prefissata su S, si sanno calcolare gli indici delle classi H_0, H'_0 cui appartengono risp. i cicli Δ_0, Δ'_0 (n. **8**), ed è quindi nota la trasformazione che muta gli indici delle classi rispetto a $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ negli indici delle stesse classi rispetto a Γ_1, Δ_0 ovvero Γ'_1, Δ'_0 (M. n. **4**). Il criterio fornito è pertanto praticabile facilmente in casi concreti.

Oss. - Com'è naturale si può partire, anzichè dalla coppia H_1, H_2 di Σ, da una qualunque altra coppia di classi dello stesso sistema Σ, e, ben s'intende, dalla corrispondente coppia di classi di Σ'. Ed una scelta opportuna può facilitare l'applicazione del criterio: ad es. se l'indice di KRONECKER delle classi H_a, H_b è $d_{ab} = 1$, come base di riferimento per le classi di Σ si ottiene (n. **4**) quella costituita da due opportuni circuiti orientati di H_a e risp. di H_b.

In generale (ed usando notazioni di chiaro significato) sono poi condizioni necessarie per l'esistenza di omeomorfismi concordi, ovvero discordi, di S in sè che mutino Σ in Σ' le seguenti:

$$d'_{ij} = d_{ij}, \qquad \eta'_{ij} = \eta_{ij},$$

ovvero le seguenti:

$$d'_{ij} = -d_{ij}, \qquad \eta'_{ij} = \eta_{ij},$$

per qualunque coppia d'indici i, j diversi.

Se dunque non è soddisfatta una almeno delle condizioni indicate si può concludere senz'altro per la non esistenza di omeomorfismi che mutano Σ in Σ'.

11. - Un problema collegato di analisi indeterminata.

In virtù del teorema di n. **5** l'esistenza di omeomorfismi del « toro » S in sè che mutano la coppia di classi $H_1\,[m_{11}, m_{12}]$, $H_2\,[m_{21}, m_{22}]$ nella coppia $H'_1\,[m'_{11}, m'_{12}]$, $H'_2\,[m'_{21}, m'_{22}]$ equivale ad un problema di analisi indeterminata, e cioè all'esistenza di due quaterne d'interi [M., n. **4**]:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{22}; \qquad a'_{11},\ a'_{12},\ a'_{21},\ a'_{22}$$

con

$$|\, a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \,| = 1, \qquad |\, a'_{11}\, a'_{22} - a'_{12}\, a'_{21} \,| = 1 \tag{21}$$

e tali inoltre da soddisfare le quattro equazioni seguenti (le quali appunto esprimono che, in basi opportune, gli indici delle classi corrispondenti sono ordinatamente eguali):

$$\left\{\begin{array}{l} m_{11}\, a_{11} + m_{12}\, a_{12} = m'_{11}\, a'_{11} + m'_{12}\, a'_{12} \\ m_{11}\, a_{21} + m_{12}\, a_{22} = m'_{11}\, a'_{21} + m'_{12}\, a'_{22} \\ m_{21}\, a_{11} + m_{22}\, a_{12} = a'_{21}\, a'_{11} + m'_{22}\, a'_{12} \\ m_{21}\, a_{21} + m_{22}\, a_{22} = m'_{21}\, a'_{21} + m'_{22}\, a'_{22}\,. \end{array}\right. \tag{22}$$

Orbene siffatto problema è risolto indirettamente con l'interpretazione topologica offerta dagli sviluppi precedenti.

Per la risolubilità delle (21), (22) con numeri interi occorre intanto che sia:

$$D(m_{11},\ m_{12}) = D(m'_{11},\ m'_{12}),$$
$$D(m_{21},\ m_{22}) = D(m'_{21},\ m'_{22}),$$

Così (n. **2**), se $m_{11} = m_{12} = 0$ (ovvero $m_{21} = m_{22} = 0$) occorre che sia pure $m'_{11} = m'_{12} = 0$ (ovvero $m'_{21} = m'_{22} = 0$). In tali casi banali, le condizioni scritte (da intendersi con la convenzione richiamata) sono anche sufficienti.

Negli altri casi il problema si riconduce tosto al problema analogo ove però gli interi delle singole coppie sopra indicate sono *numeri primi tra loro* (n. **3**); ed allora, calcolato l'intero d_{12} (n. **8**), e similmente l'intero d'_{12}, si deve aggiungere (n. **1**) la condizione:

$$|d'_{12}| = |d_{12}|. \tag{23}$$

Se $d'_{12} = d_{12} = 0$ si ha:

$$m_{11} = m_{21},\quad m_{12} = m_{22} \qquad \text{oppure} \qquad m_{11} = -m_{21},\quad m_{12} = -m_{22}$$

ed anche

$$m'_{11} = m'_{21},\quad m'_{12} = m'_{22} \qquad \text{oppure} \qquad m'_{11} = -m'_{21},\quad m'_{12} = -m'_{22};$$

orbene (n. 3) per la risolubilità del problema è necessario e sufficiente che si presentino contemporaneamente le prime oppure le seconde alternative.

Se invece i due numeri (23) sono entrambi unitari (n. 4) ovvero entrambi eguali a 2 (n. **7**, Oss.) il prolema è senz'altro risolubile.

Se infine i due numeri (23) sono maggiori di 2 è ulteriormente richiesta (n. **6**) l'eguaglianza:

$$\eta'_{12} = \eta_{12} \tag{24}$$

e, se questa è altresì soddisfatta, il problema è risolubile (n. **7**).

Il carattere η_{12} si calcola nel modo indicato in n. 8, ed il carattere η'_{12} in modo analogo.

Basta anzi calcolare, come al n. 8, il carattere α, e calcolare analogamente il carattere α' e quindi sostituire la (24) con la relazione:

$$\alpha' \equiv \alpha \pmod{d_{12}}.$$

Oss. - Soddisfatte che siano le condizioni necessarie e sufficienti, dianzi esplicitamente fornite, per la risolubilità delle equazioni (21) (22) per numeri interi, anche la effettiva determinazione delle soluzioni è chiaramente suggerita dall'interpretazione topologica. Invero (n. **8**) si è fornito il procedimento per la determinazione delle basi di riferimento (nei vari modi possibili).

Ma non si ritiene di dover insistere su ciò.

12. - Una considerazione complementare.

Giova infine rilevare come, sempre in virtù del teorema di n. **5**, il fatto che ad una coppia di classi d'omologia H_1, H_2 (le quali, per semplicità, potranno supporsi distinte e nessuna coincidente con la classe nulla) ammettano precisamente i quattro invarianti d_1, d_2 (gradi delle classi) e d_{12}, η_{12} (invarianti delle classi primitive associate), si potrebbe riscontare anche in altro modo.

Considerata invero la matrice:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

le cui orizzontali sono gli indici delle due classi in relazione ad una base comunque prefissata sulla superficie S, *con operazioni elementari* di più *applicate soltanto alle verticali*, la matrice può ridursi al tipo (canonico):

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ \alpha\, d_2 & |\beta|\, d_2 \end{pmatrix}$$

con $D(\alpha, \beta) = 1$, tipo univocamente determinato ove si pensi α ridotto mod. $|\beta|$.

E, come negli sviluppi precedenti, si ha:

$$d_1 = D(m_{11},\ m_{12}), \qquad d_2 = D(m_{21},\ m_{22})$$

e

$$\beta = d_{12}, \qquad \alpha = \eta_{12}\,.$$

La possibilità dell'indicata riduzione di una matrice a forma canonica si può riscontrare direttamente; dianzi però si è preferito un procedimento diverso per accompagnare l'introduzione di ciascuno degli invarianti con una sua interpretazione topologica.

Tuttavia, in casi concreti, il procedimento qui delineato potrebbe risultare meglio praticabile ad es. per il calcolo dell'indice modulare α delle due classi.

Inoltre per tale via si trova facilmente *la relazione tra l'indice modulare α della coppia ordinata di classi H_1, H_2 e l'indice modulare α' della coppia ordinata H_2, H_1.*

Basterà limitarsi al caso in cui H_1 ed H_2 sono primitive ($d_1 = d_2 = 1$).

Se allora per la coppia H_1, H_2 si ha il tipo canonico:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & |\beta| \end{pmatrix}, \tag{25}$$

per la coppia H_2 H_1 si avrà il tipo canonico che deducesi a partire dalla:

$$\begin{pmatrix} \alpha & |\beta| \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

e siccome $|\beta|$ è invariante per sostituzioni unimodulari, il tipo canonico di (26) sarà:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & |\beta| \end{pmatrix}. \tag{27}$$

D'altra parte, il passaggio da (26) a (27) si attua moltiplicando la (27), a destra, per una matrice unimodulare:

$$\begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Sarà dunque:

$$\begin{pmatrix} \alpha & |\beta| \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & |\beta| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$$

onde, eseguendo il prodotto,

$$\alpha = x, \quad |\beta| = z, \quad \alpha' x + |\beta|\, y = 1, \quad \alpha' z + |\beta|\, t = 0\,. \tag{29}$$

L'ultima di queste si scrive pertanto:

$$|\beta|\,(\alpha' + t) = 0,$$

onde, trascurando il caso banale $\beta = 0$, si ha:

$$\alpha' = -t .$$

La terza delle (29) si scrive poi:

$$\alpha\alpha' + |\beta| y = 1 . \tag{30}$$

Questa ammette soluzioni intere per α' ed y perchè $D(\alpha, |\beta|) = 1$; ed essa, scritta sotto l'aspetto:

$$-xt + zy = 1$$

assicura in pari tempo che, ove y si calcoli appunto con la (30), la matrice (28) risulta unimodulare.

Dalla (30) si ha peraltro:

$$\alpha\alpha' \equiv 1 \pmod{|\beta|} ,$$

ed è questa la richiesta relazione tra i due indici modulari α ed α'.