Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 77-90

GIOVANNI AQUARO (*)

Spazii collettivamente normali ed estensione di applicazioni continue. (**)

Introduzione.

Sia E uno spazio topologico metrizzabile.

È stato dimostrato da O. HANNER ([8] teor. 4.1) con un contributo di C. H. DOWKER ([7] teor. 1) che affinchè E sia un estensore assoluto per la classe degli spazii normali (def. 2 e nota (6)) è necessario e sufficiente che E abbia base numerabile, sia un G_δ assoluto (***) e sia un estensore assoluto per la classe degli spazi metrizzabili dotati di base numerabile. Inoltre è stato dimostrato da C. H. DOWKER ([7] teor. 2) che affinchè E sia un estensore assoluto per la classe degli spazii collettivamente normali è necessario e sufficiente che E sia un G_δ assoluto e sia un estensore assoluto per la classe degli spazi metrizzabili.

Questi risultati, limitatamente alla sufficienza delle condizioni enunciate, possono essere riguardati come differenti aspetti di uno stesso fatto. Ciò si riconosce nella prop. 6 del successivo n. 3 della presente nota, attraverso il concetto unificatore di spazio α-collettivamente normale (def. 1).

Le argomentazioni, esclusivamente fondate sopra alcune proprietà di certe strutture uniformi sopra uno spazio topologico, sono indipendenti da quelle di HANNER e DOWKER.

(*) Indirizzo Istituto di Analisi Matematica - Università - Bari.

(**) Ricevuto il 10 giugno 1961.

Il presente lavoro fa parte della realizzazione del programma del Gruppo di ricerca n. 20 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche per il 1960-61.

(***) Cioè è metrizzabile con una distanza di spazio metrico completo.

Nel seguente n. **1**, dal lemma 1, si traggono alcune proprietà degli spazii α-collettivamente normali: di esse, le propp. 2, 3 e 4 sono note nel caso degli spazii collettivamente normali secondo R. H. Bing (cfr. [**4**]). Nel n. **2** si indica una caratteristica degli spazii α-collettivamente normali che, insieme ad alcuni lemmi di detto n. **2**, concorre a dimostrare la prop. 6.

1. – Nel presente n. **1** alcune proprietà dei ricovrimenti aperti localmente finiti vengono dedotte dal seguente lemma.

Lemma 1. - *Supponiamo che $(U_\iota)_{\iota\in I}$ sia un ricovrimento aperto puntualmente finito dello spazio topologico E e, per ogni $x\in E$, denotiamo con I^*_x la stella di x in I per $(U_\iota)_{\iota\in I}$* (1). *Inoltre, per ogni $n\in N$* (2), *$\mathfrak{F}_n$ sia l'insieme delle parti di I aventi numero cardinale n e, per ogni $X\in\mathfrak{F}_n$ sia $F_{nX}=\complement(\bigcup_{\iota\in\complement X} U_\iota)$. Allora si ha che:*

a) *$(A_n)_{n\in N}$ è un ricovrimento chiuso di E, risulta $A_0=\varnothing$ e, per ogni $n\in N$, si ha $A_n\subset A_{n+1}$,*

b) *posto $B_0=A_0$ e, per ogni $n\in N$ con $n>0$, $B_n=A_n-A_{n-1}$, la famiglia $(B_n\cap F_{nX})_{X\in\mathfrak{F}_n}$ è un ricovrimento discreto* ([**6**] § 4 excerc. 18) *del sottospazio B_n e, per ogni $X\in\mathfrak{F}_n$ si ha $B_n\cap F_{nX}\subset\bigcap_{\iota\in X}U_\iota$.*

Dimostrazione di a). Sia $x\in E$. Poichè, per ipotesi, I^*_x è finito e non vuoto, posto $n=\operatorname{card}(I^*_x)$, risulta $n>0$ e quindi $A_0=\varnothing$ e $E=\bigcup_{n\in N}A_n$. Inoltre, $\bigcap_{\iota\in I^*_x}U_\iota$ è un intorno aperto di x e quindi se è $x\in\overline{A}_n$ per un certo $n\in N$ esiste, $y\in A_n\cap(\bigcap_{\iota\in I^*_x}U_\iota)$ e quindi, da una parte è $\operatorname{card}(I^*_y)\leqslant n$ e dall'altra, $I^*_x\subset I^*_y$ donde $\operatorname{card}(I^*_x)\leqslant n$ e $x\in A_n$. Dunque A_n è chiuso.

Dimostrazione di b). Sia $n\in N$. Per ogni $x\in B_n$, risulta $\operatorname{card}(I^*_x)=n$ e poi, per ogni $\iota\in\complement I^*_x$, essendo $x\in\complement U_\iota$, si ha $x\in\complement(\bigcup_{\iota\in\complement I^*_x}U_\iota)=F_{nI^*_x}$ nonchè $x\in B_n\cap F_{nI^*_n}$ e da ciò $B_n=\bigcup_{X\in\mathfrak{F}_n}(B_n\cap F_{nX})$. Inoltre, assumiamo $X\in\mathfrak{F}_n$ e $y\in B_n\cap F_{nX}$. Poichè per ogni $\lambda\in\complement X$ si ha $y\in\complement U_\lambda$ e $\lambda\in\complement I^*_y$ nonchè $\complement X\subset\complement I^*_y$, risulta $I^*_y\subset X$: da ciò, essendo $n=\operatorname{card}(I^*_y)\leqslant\operatorname{card}(X)=n$ consegue $X=I^*_y$. Per ogni $y\in B_n\cap F_{nX}$, è, dunque $y\in\bigcap_{\iota\in X}U_\iota$ e quindi risulta $B_n\cap F_{nX}\subset\bigcap_{\iota\in X}U_\iota$. Inoltre, se per un $x\in B_n$ esiste $y\in(B_n\cap F_{nX})\cap\bigcap_{\iota\in I^*_x}U_\iota$, si ha $I^*_x\subset I^*_y=X$ e quindi,

(1) Cioè l'insieme degli $\iota\in I$ tali che $x\in U_\iota$.

(2) Qui e nel seguito con N si indica l'insieme degli interni $\geqslant 0$.

essendo card $(I_x^*) = n =$ card (X) si ha $X = I_x^*$: dunque $(B_n \cap F_{nx})_{x \in \mathfrak{F}_n}$ è un ricovrimento discreto del sottospazio B_n.

Dovremo utilizzare una definizione che estende una, ben nota, dovuta a R. H. BING ([4]; cfr. anche [6] § 4, excerc. 8):

Def. 1. – *Se α è un numero cardinale infinito, uno spazio topologico E si dice α-collettivamente normale se, per ogni famiglia discreta* $F_\iota)_{\iota \in I}$ ([6] loco cit.) *d'insiemi chiusi di E tale che* card (I) $\leqslant \alpha$, *esiste una famiglia $(G_\iota)_{\iota \in I}$ di insiemi aperti a due a due disgiunti di E tale che per ogni $\iota \in I$ sia $F_\iota \subset G_\iota$.*

Osservazione. - Come è stato osservato da C. H. DOWKER e E. MICHAEL (cfr. anche [1] § 1, lemma 12), la famiglia di insiemi aperti $(G_\iota)_{\iota \in I}$ può supporsi discreta.

Riprendiamo le notazioni e le definizioni del lemma 1, supponiamo che α sia un numero cardinale infinito e supponiamo che E sua uno spazio normale.

Dimostriamo che esistono una successione:

(1) $$((G_{n\iota})_{\iota \in I})_{n \in N}$$

di famiglie di insiemi aperti di E ed una successione

(2) $$(G_n^*)_{n \in N}$$

di insiemi aperti di E tali che per ogni $k \in N$ sia

(3) $$A_k \subset G_k^*, \quad \overline{G}_k^* \subset \bigcup_{j=0}^{k} \bigcup_{\iota \in I} G_{j\iota}$$

(4) $$\overline{G}_k^* \subset G_{k+1}$$

(5) $$G_k^* \cap G_{k+1\iota} = \varnothing \text{ per ogni } \iota \in I$$

(6) $$\overline{G}_{k\iota} \subset U_\iota \text{ per ogni } \iota \in I.$$

(7) se E è α-collettivamente normale e card $(I) \leqslant \alpha$, la famiglia $(\overline{G}_{k\iota})_{\iota \in I}$ è discreta.

L'esistenza di (1) e (2) con le condizioni da (3) a (7) viene dimostrata per ricorrenza.

In primo luogo, essendo $A_0 = \varnothing$, $(G_{0\iota})_{\iota \in I}$ è definita ponendo $G_{0\iota} = \varnothing$ per ogni $\iota \in I$ e G_0^* può essere assunto ponendo $G_0^* = \varnothing$.

Supponiamo che $(G_{k\iota})_{\iota\in I}$ e G^* siano stati costruiti per $k=0, 1, \ldots, n$ di guisa da verificare (3), (5) e (7) e, per $k \leqslant n$, (4) e (6): procediamo alla costruzione di $(G_{n+1\iota})_{\iota\in I}$ e G_{n+1}^*.

All'uopo, poniamo.

$$U_n^* = \bigcup_{k=0}^{n} \bigcup_{\iota\in I} G_{k\iota}. \tag{8}$$

Risultando, a causa di (3) $A_n \subset G_n^*$, $\overline{G}_n^* \subset U_n^*$, si ha $\complement U_n^* \subset \complement A_n$ e quindi, $\complement U_n^* = (\complement U_n^*) \cap (\complement A_n)$: consegue (cfr. lemma 1)

$$A_{n+1} - U_n^* = \bigcup_{X\in\mathfrak{F}_{n+1}} (A_{n+1} - U_n^*) \cap F_{n+1X}.$$

Dunque $((A_{n+1} - U_n) \cap F_{n+1X})_{X\in\mathfrak{F}_{n+1}}$ è un ricovrimento, ovviamente chiuso, del sottospazio $A_{n+1} - U_n^*$. Inoltre, per ogni $X \in \mathfrak{F}_{n+1}$ (cfr. lemma 1) risulta $(A_{n+1} - U_n^*) \cap F_{n+1X} \subset B_{n+1} \cap F_{n+1X} \subset \bigcap_{\iota\in X} U_\iota$: per ciò la famiglia $((A_{n+1} - U_n^*) \cap F_{n+1X})_{X\in\mathfrak{F}_n}$, al pari della $(B_{n+1} \cap F_{n+1X})_{X\in\mathfrak{F}_n}$ è discreta in B_{n+1} (come è ovvio) e quindi in $A_{n+1} - U_n^*$; inoltre, per ogni $\iota \in I$ si ha $(A_{n+1} - U_n^*) \cap F_{n+1X} \subset U_\iota$. In forza del lemma 13, § 2 di [1], esiste un ricovrimento chiso discreto $(H_{n+1\iota})_{\iota\in I}$ del sottospazio $A_{n+1} - U_n^*$ tale che per ogni $\iota \in I$ sia $H_{n+1\iota} \subset U_\iota$ e si noterà che, $A_{n+1} - U_n^*$ essendo chiuso in E, $(H_{n+1\iota})_{\iota\in I}$ è una famiglia discreta di insiemi chiusi di E. Se è $\iota \in I$, $U_\iota \cap (\complement G_n^*)$ è un intorno aperto di $H_{n+1\iota}$: per ciò, se E è normale, esiste un insieme aperto $G_{n+1\iota}$ di E tale che $H_{n+1\iota} \subset G_{n+1}$, $\overline{G}_{n+1\iota} \subset U_\iota \cap (\complement G_n^*)$ e se E è α-collettivamente normale e card $(I) \leqslant \alpha$, $(\overline{G}_{n+1\iota})_{\iota\in I}$ risulta discreta. Evidentemente, da ciò e da (8) risulta:

$$A_{n+1} \subset \bigcup_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\iota\in I} G_{k\iota}$$

e, per ogni $\iota \in I$, si ha $G_n^* \cap G_{n+1\iota} = \varnothing$, $G_{n+1\iota} \subset U_\iota$: inoltre, essendo $\bigcup_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\iota\in I} G_{n+1\iota}$ intorno aperto di $A_{n+1} \cap \overline{G}_n^*$, in forza della normalità di E, esiste un insieme aperto G_{n+1}^* tale che $A_{n+1} \cap \overline{G}_n^* \subset G_{n+1}^*$, $\overline{G}_{n+1}^* \subset \bigcup_{k=0}^{n+1} \bigcup_{\iota\in I} G_{k\iota}$. Così $(G_{n+1\iota})_{\iota\in I}$ e G_{n+1}^* sono determinate e, per ricorrenza, (1) e (2) sono definite con le condizioni volute.

Costruite, in tal modo, (1) e (2), nella sola ipotesi della normalità di E, in forza della prop. 7 di [2] esiste un ricovrimento chiuso $(F_\iota)_{\iota\in I}$ di E tale che $F_\iota \subset U_\iota$ per ogni i $\in I$. Cosicchè è dimostrata la nota proposizione:

Prop. 1 - *Se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento aperto puntualmente finito dello spazio normale* E *esiste un ricovrimento chiuso* $(F_\iota)_{\iota\in I}$ *di* E *tale che, per ogni* $\iota \in I$, *sia* $F_\iota \subset U_\iota$. ([3]).

Se E è collettivamente normale e card $(I) \leqslant \alpha$, per ogni $n \in N$, in forza di (7) e della def. 1 e relativa osservazione, esiste una famiglia discreta di insiemi aperti di E, $(V_{n\iota})_{\iota\in I}$, tale che per ogni $\iota \in I$ sia $\overline{G}_{n\iota} \subset V_{n\iota}$, $\overline{V}_{n\iota} \subset U_\iota$. Ed allora $(V_{n\iota})_{(n,\iota)\in N\times I}$ è un ricovrimento aperto, $\mathcal{U}$-riducibile (E è normale) e σ-localmente finito (discreto per l'esattezza) più fine di $(U_\iota)_{\iota\in I}$ (cfr. [1] § 1, def. 2). Poichè E è normale, in forza del lemma 12, § 2 di [1], esiste un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E più fine di $(V_{n\iota})_{(n,\iota)\in N\times I}$ e quindi di $(U_\iota)_{\iota\in I}$

È stata stabilita così una proposizione che generalizza un risultato di E. Michael ([14] teor. 2):

Prop. 2 - *Se* α *è un numero cardinale infinito, se* E *è uno spazio* α-*collettivamente normale* (def. 1) *e se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento aperto puntualmente finito di* E *tale che* card $(I) \leqslant \alpha$, *esiste un ricovrimento aperto localmente finito di* E *più fine di* $(U_\iota)_{\iota\in I}$.

Indichiamo ora una proposizione che generalizza un risultato di C. H. Dowker ([7] lemma 1); la tecnica di dimostrazione, basata sulla precedente costruzione di (1) e (2), differisce da quella di tale Autore.

Prop. 3 - *Se* α *è un numero cardinale infinito, se* E *è uno spazio* α-*collettivamente normale* (def. 1), *se* F *è un insieme chiuso di* E *e se* $(U_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento aperto localmente finito del sottospazio* F *tale che* card $(I) \leqslant \alpha$, *esiste un ricovrimento aperto localmente finito* $(W_\iota)_{\iota\in I}$ *dell'intero spazio* E *tale che, per ogni* $\iota \in I$, *sia* $W_\iota \cap F \subset U_\iota$.

Dim. Si tenga presente che il sottospazio F, al pari di E, è α-collettivamente normale e si riferisca ad F ed al suo ricovrimento aperto localmente (e quindi puntualmente) finito $(U_\iota)_{\iota\in I}$ la costruzione di (1) e (2) con le condizioni da (3) a (7). Dunque, per ogni $n \in N$, esiste una famglia discreta $(F_{n\iota})_{\iota\in I}$ di insiemi chiusi del sottospazio F (cfr. (7)) tale che per ogni $\iota \in I$ sia $F_{n\iota} \subset U_\iota$ e risulti $F = \bigcup_{n\in N} \bigcup_{\iota\in I} F_{n\iota}$ (cfr. (3)).

Ciò premesso, per ogni $\iota \in I$, U_ι essendo aperto in F, esiste un insieme aperto V_ι di E tale che $U_\iota = F \cap V_\iota$.

Sia $n\in N$. La $(F_{n\iota})_{\iota\in I}$ è discreta nel sottospazio F, che è chiuso in E, e quindi è discreta nell'intero E; inoltre, per ogni $\iota \in I$, è $F_{n\iota} \subset V_\iota$. Per ciò e poichè E è

([3]) Le dimostrazioni già note allo scrivente usano il teorema di Zermelo (ogni insieme può essere ben ordinato) ([6] § 4, n. 3, teor. 3) o il teor. di Zorn ([13], [15], [10], [11]); quella qui fornita adopera direttamente l'assioma della scelta.

α-collettivamente normale e card $(I) \leqslant \alpha$, esistono due famiglie $(U_{n\iota})_{\iota\in I}$ e $(V_{n\iota})_{\iota\in I}$ di insiemi aperti di E tali che $(U_{n\iota})_{\iota\in I}$ sia discreta (in E) e per ogni $\iota \in I$ sia

$$F_{n\iota} \subset V_{n\iota}, \quad \overline{V}_{n\iota} \subset U_{n\iota} \subset V_\iota . \tag{9}$$

Poniamo:

$$V = \bigcup_{n\in N} \bigcup_{\iota\in I} V_{n\iota}; \tag{10}$$

risulta

$$F \subset V . \tag{11}$$

Sia k un fissato elemento di I e siano $(V_\iota^*)_{\iota\in I}$ $(F_{n\iota}^*)_{(n,\iota)\in N\times I}$, $(G_{n\iota}^*)_{(n,\iota)\in N\times I}$ le famiglie di parti di E definite ponendo per ogni $\iota \in I$

$$V_\iota^* = \begin{cases} V_k \cup (\complement F) & \text{per} \quad \iota = k \\ V_\iota & \text{per} \quad \iota \neq k \end{cases} \tag{12}$$

e, per ogni $(n, \iota) \in N \times I$

$$F_{n\iota}^* = \begin{cases} \overline{V}_{nk} \cup (\complement V) \\ \overline{V}_{n\iota} \end{cases} \qquad G_{n\iota}^* = \begin{cases} U_{n\iota} \cup (\complement F) & \text{per} \quad n = 0 \quad \text{e} \quad \iota = k \\ U_{n\iota} & \text{per} \quad (n, \iota) \neq (0, k) . \end{cases} \tag{13}$$

Ovviamente, per (10), risulta

$$E = (\bigcup_{n\in N} \bigcup_{\iota\in I} \overline{V}_{n\iota}) \cup (\complement V) = \bigcup_{(n,\iota)\in N\times I} F_{n\iota}^* \tag{14}$$

per ogni $(n, \iota) \in N \times I$, in forza delle (11) e (13), si ha

$$F_{n\iota}^* \subset G_{n\iota}^* \tag{15}$$

Dalle (14) e (15) consegue che $(G_{n\iota}^*)_{(n,\iota)\in N\times I}$ è un ricovrimento aperto σ-localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile di E (si tenga presente che E è normale e si richiamino la osservazione 2 alla def. 3 e le deff. 5 e 6 del § 3 di [1]) e $(F_{n\iota}^*)_{(n,\iota)\in N\in I}$ è una sua $\mathcal{U}$-riduzione.

Inoltre, da (9), (12) e (10) consegue che $(G^*_{n\iota})_{(n,\iota)\in N\times I}$ è un raffinamento di $(V^*_\iota)_{\iota\in I}$. In forza dei lemmi 12 e 13 del § 2 di [1] (e delle deff. 5 e 6 § 3 ibidem) esiste un ricovrimento aperto localmente finito (ed $\mathcal{U}$-riducibile) $(W_\iota)_{\iota\in I}$ di E tale che per ogni $\iota\in I$ sia $W_\iota \subset V^*_\iota$: consegue $W_\iota \cap F \subset V^*_\iota \cap F = V_\iota \cap F = U_\iota$.

Da ciò la tesi.

Prima di chiudere il presente n. 1, anche se non se ne farà uso, si trae una ulteriore conseguenza dal lemma 1.

Prop. 4 - *Nelle ipotesi e con le notazioni del lemma* 1, *se* E *è numerabilmente compatto* (4), *esiste una parte finita* L *di* I *tale che* $E = \bigcup_{\iota\in L} U_\iota$.

Dim. Stabiliamo preliminarmente che:

α) *per ogni* $n\in N$ *esiste una parte finita* L_n *di* I *tale che* $A_n \subset \bigcup_{\iota\in L_n} U_\iota$.

In primo luogo la α) è vera per $n=0$, dato che $A_0 = \emptyset$.

Supponiamo ora che α) sia vera per un certo $n\in N$.

Sia $U^*_n = \bigcup_{\iota\in L_n} U_\iota$: se è $A_{n+1} - U^* = \emptyset$ si assuma $L_{n+1} = L_n$ altrimenti si proceda come appresso. Essendo $A_n \subset U^*_n$ con argomentazione analoga a quella effettuata nel corso della costruzione di (1) e (2) si riconosce che $((A_{n+1} - U^*_n) \cap \cap F_{n+1X})_{X\in\mathfrak{F}_{n+1}}$ è un ricovrimento chiuso discreto del sottospazio $A_{n+1} - U^*_n$. Poichè $A_{n+1} - U^*_n$ è chiuso in E, come sottospazio di E, al pari di E, è numerabilmente compatto e quindi (5) è finito l'insieme $\mathfrak{F}^*_{n+1}$ degli $X\in\mathfrak{F}_{n+1}$ tali che $(A_{n+1} - U^*_n) \cap F_{n+1X} \neq \emptyset$. Detta K_{n+1} la riunione di la riunione di $\mathfrak{F}^*_{n+1}$ (cioè $K = \bigcup_{X\in\mathfrak{F}_{n+1}} X$), si riconosce che è $A_{n+1} - U^*_n \subset \bigcup_{\iota\in K_{n+1}} U_\iota$ (cfr. b) del lemma 1). Posto $L_{n+1} = L_n \cup K_{n+1}$ si ha $A_{n+1} \subset \bigcup_{\iota\in L_{n+1}} U_\iota$ mentre che L_{n+1} è finito (al pari di L_n e di K_{n+1}).

Dunque α) è vera per $n+1$.

Sia $K = \bigcup_{n\in N} L_n$. Evidentemente K è numerabile e risulta $E = \bigcup_{\iota\in K} U_\iota$ ciò che, E essendo numerabilmente compatto, dimostra la tesi.

---

(4) Nessun assioma di separazione viene richiesto.

(5) Invero sussiste il lemma:

Se $(F_\iota)_{\iota\in I}$ *è un ricovrimento chiuso discreto* (o, equivalentemente, aperto e formato da insiemi a due a due disgiunti) *dello spazio numerabilmente compatto* E, *l'insieme* L *degli* $\iota\in I$ *tali che* $U_\iota \neq \emptyset$ *è finito.*

Dem. Ragionando per assurdo, supponiamo che L non sia finito e che K sia una sua parte numerabile. Posto $F = \bigcup_{\iota\in K} F_\iota$, F *è* chiuso in E e quindi come sottospazio, al pari di E, è numerabilmente compatto mentre che $(F_\iota)_{\iota\in K}$ è un suo ricovrimento aperto numerabile (oltre che chiuso). Esiste dunque una parte finita J di K tale che $F = \bigcup_{\iota\in J} F_\iota$, il che gli F_ι essendo non vuoti e a due a due disgiunti per ogni $\iota\in K$, non è possibile (K è equipotente ad N!).

Nel caso in cui E verifichi l'assioma di separazione (T_1) (di FRÉCHÉT) il risultato stabilito è implicitamente noto ad ARENS e DUGUNDJI, insieme all'altro, che ormai può essere dimostrato senza assiomi di separazione di alcun tipo e da essi esplicitamente stabilito per spazii (T_1):

Ogni spazio metacompatto ([**10**] cap. 5, probl. V; [**6**] § 4, exerc. 25; [**12**] cap. 3, § 13, def. 13 f) *e numerabilmente compatto è compatto* ([**3**] per spazii (T_1)).

2. – Si analizzano ora alcune proprietà degli spazii α-collettivamente normali principalmente dal punto di vista delle strutture uniformi.

Prop. 5 - *Se α è un numero cardinale infinito, se E è uno spazio topologico, e, se per ogni parte X di E, $\mathcal{E}_\alpha(X)$ denota la α-struttura uniforme del sottospazio X* ([**1**] § 3, def. 4) *e $\mathcal{E}_\alpha(E)_X$ denota la struttura uniforme indotta da $\mathcal{E}_\alpha(E)$ su X, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) *per ogni insieme chiuso F di E risulta $\mathcal{E}_\alpha(E)_F = \mathcal{E}_\alpha(F)$.*

b) *se $(F_\iota)_{\iota\in I}$ è una famiglia discreta* ([**6**] § 4, excer. 18) *di insiemi chiusi di E tale che* card $(I) \leqslant \alpha$, *allora esiste un'adiacenza W di E per $\mathcal{E}_\alpha(E)$ tale che da $k \in I$, $\lambda \in I$ e $k \neq \lambda$ consegua $W(F_k) \cap W(F_\lambda) = \varnothing$.*

c) *E è α-collettivamente normale* (def. 1).

Dim. a) *implica* b). Supponiamo vera la a) e $(F_\iota)_{\iota\in I}$ sia una famiglia discreta di insiemi chiusi di E tale che card $(I) \leqslant \alpha$: posto $F = \bigcup_{\iota\in I} F_\iota$, come è noto, F risulta chiuso in E ed $(F_\iota)_{\iota\in I}$, essendo un ricovrimento chiuso discreto del sottospazio F, è formato da insiemi aperti di F a due a due disgiunti. Per ciò $(F_\iota)_{\iota\in I}$ è un ricovrimento aperto e chiuso localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile del sottospazio F ([**1**] § 3, deff. 5 e 6). Poichè è card. $(I) \leqslant \alpha$, come è noto ([**1**] § 3, deff. 5 e 6 e § 2 teor. 1) esiste un'adiacenza V' di F per $\mathcal{E}_\alpha(F)$ tale che $V'(F_\iota) \subset F_\iota$ per ogni $\iota \in I$ e quindi $V'(F_\iota) = F_\iota$. Poichè è vera la a), esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{E}_\alpha(E)$ tale che $V \cap (F \times F) = V'$: sia W un'adiacenza simmetrica di E per $\mathcal{E}_\alpha(E)$ tale che $W \circ W \subset V$. Se è $k \in I$, $\lambda \in I$, $k \neq \lambda$ risulta immediatamente $W(F_k) \cap W(F_\lambda) = \varnothing$. Da ciò la b).

b) *implica* c). Consegue dalla def. 1.

c) *implica* a). Supponiamo vera la c) ed F sia un insieme chiuso di E: al pari di E, F, come sottospazio, è (collettivamente) normale e quindi, in forza della def. 4 § 3 e del teor. 1, § 2 di [**1**], se V' è un'adiacenza di F per $\mathcal{E}_\alpha(F)$ esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(U'_\iota)_{\iota\in I}$ del sottospazio F tale che card $(I) \leqslant \alpha$ e tale che $\bigcup_{\iota\in I} (U'_\iota \times U'_\iota) \subset V'$. Per la prop. 3, esiste un ricovrimento aperto localmente finito $(U_\iota)_{\iota\in I}$ di E tale che per ogni $\iota \in I$ sia $U_\iota \cap F \subset U'_\iota$. Posto $V = \bigcup_{\iota\in I} (U_\iota \times U_\iota)$, in forza della def. 4, § 3 e della a) del teor. 1, § 2 di [1], V è un'adiacenza di E per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$ (cfr. prop. 1) e quindi $V \cap (F \times F)$ è 'un'adiacenza di V per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)_F$. Ma risulta $V \cap (F \times F) = \bigcup_{\iota\in I} ((U_\iota \cap F) \times (U_\iota \cap F)) \subset \subset \bigcup_{\iota\in I} (U'_\iota \times U'_\iota) \subset V'$ e per ciò V' è un'adiacenza di E per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)_F$ e così $\mathfrak{C}\alpha\,(F)$ è meno fine di $\mathfrak{C}\alpha(E)_F$; poichè, ovviamente, è anche più fine di $\mathfrak{C}\alpha\,(E)_F$, la a) è dimostrata.

Osservazione. - Se è $\omega = \text{card}\,(N)$ e se E è uno spazio normale (non necessariamente separate nè regolare), in forza della prop. 7, § 3 di [1], la a) della prop. 5 è vera per $\alpha = \omega$ e quindi, per la equivalenza di a) e c) in tale prop. 5, E ω-collettivamente normale (ciò è stato precisato da K. KURATOWSKY [12] (lemma 1) in spazi metrici e generalizzato da K. ISEKI [9]).

I seguenti lemmi saranno adoperati nel n. 3.

Lemma 2 - *Supponiamo che E sia uno spazio topologico che α sia un numero cardinale infinito, che $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$ sia la α-struttura uniforme su E* ([1] § 3, def. 4) *e che $(U_\iota)_{\iota\in I}$ sia un ricovrimento aperto localmente finito e $\mathcal{U}$-riducibile di E* ([1] § 3, def. 6) *tale che* card $(I) \leqslant \alpha$. *Allora esiste una struttura uniforme quasi-metrizzabile* ([1] § 3, def. 7). *$\mathcal{M}$ su E meno fine di $\mathfrak{C}\alpha(E)$, la topologia $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}$ su E dedotta da $\mathcal{M}$ ha una base $(B_\lambda)_{\lambda\in L}$ tale che* card $(L) \leqslant \alpha$ *ed esiste un'adiacenza V si E per $\mathcal{M}$ tale che $(V(x))_{x\in E}$ sia un raffinamento di $(U_\iota)_{\iota\in I}$.*

Dim. In base all'ipotesi di $\mathcal{U}$-riducibilità per $(U_\iota)_{\iota\in I}$, esiste una $\mathcal{U}$-riduzione $(F_\iota)_{\iota\in I}$ di $(U_\iota)_{\iota\in I}$ ([1] § 3, def. 5) ed esiste ([1] § 3, deff. 4, 5, 6 e § 2. § 2, teor. 1, a)) un'adiacenza V_0 di E per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$ tale che, per ogni $\iota \in I$, sia $V_0(F_\iota) \subset U_\iota$. Per la definizione di $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$, esiste un ricovrimento aperto localmente finito ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_{0\iota})_{\iota\in I_0}$ di E tale che card $(I_0) \leqslant \alpha$ e $\bigcup_{\iota\in I_0} (U_{0\iota} \times \times U_{0\iota}) \subset V_0$. Sia $(F_{0\iota})_{\iota\in I_0}$ una $\mathcal{U}$-riduzione di $(U_{0\iota})_{\iota\in I_0}$: esiste un'adiacenza V_1 di E per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$ tale che $V_1 \circ V_1 \subset V_0$ e, per ogni $\iota \in I_0$, $V_1(F_{0\iota}) \subset U_{0\iota}$.

Ciò consente di costruire per ricorrenza una successione $(V_n)_{n\in N}$ di adiacenze di E per $\mathfrak{C}\alpha\,(E)$ ed una successione $((U_{n\iota})_{\iota\in I_n})_{n\in N}$ di ricovrimenti aperti localmente finiti ed $\mathcal{U}$-riducibili di E tali che card $(I_n) \leqslant \alpha$, per ogni $n \in N$, nonchè una successione $((F_{n\iota})_{\iota\in I_n})_{n\in N}$ di ricovrimenti chiusi di E tale che, per ogni $n \in N$, $(F_{n\iota})_{\iota\in I_n}$ sia una $\mathcal{U}$-riduzione di $(U_{n\iota})_{\iota\in I_n}$ e si abbia

$$(1) \qquad V_0(F_\iota) \subset U_\iota \quad \text{per ogni} \quad \iota \in I$$

$$(2) \qquad V_{n+1} \circ V_{n+1} \subset V_n \quad \text{e, per ogni} \quad \iota \in I_n, \quad V_{n+1}(F_{n\iota}) \subset G_{n\iota}.$$

L'insieme delle parti di $E \times E$ che sono elementi della successione $(V_n)_{n \in N}$ è un sistema fondamentale di adiacenze di una struttura uniforme quasi-metrizzabile $\mathcal{M}$ su E. Se è $n \in N$ e $\iota \in I_n$, denotiamo con B_n l'interno di $V_{n+1}(F_{n\iota})$ per la topologia $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}$ su E dedotta da $\mathcal{M}$ risulta $F_{n\iota} \subset B_{n\iota}$.

Sia $I^* = \bigcup_{n \in N} I_n$ e sia K la parte di $N \times I^*$ univocamente determinata dal fatto che, per ogni $n \in N$, la sezione $K(n)$ di K, relativa ad n, sia I_n. In forza di (1) e (2), $(B_{n\iota})_{(n,\iota) \in N \times I}$ è una base di $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}$: essendo, inoltre, card $(K) \leqslant$ card $(N) \cdot$ card $(I^*) \leqslant \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, la tesi è dimostrata.

Lemma 3 - *Nelle ipotesi e con le notazioni del Lemma 2, se $(V_n)_{n \in N}$ è una successione di adiacenze di E per $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{a}}(E)$, esiste una struttura uniforme quasi-metrizzabile $\mathcal{M}$ su E tale che ogni V_n sia un'adiacenza di $\mathcal{M}$ e tale che la topologia $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}$ su E dedotta da $\mathcal{M}$ (che è meno fine della topologia di E) abbia una base $(B_\lambda)_{\lambda \in L}$ tale che* card $(L) \leqslant \mathfrak{a}$.

Dim. Sia $n \in N$: poichè V_n è in $\mathfrak{Cl}_{\mathfrak{a}}(E)$, esiste un ricovrimento aperto localmente ed $\mathcal{U}$-riducibile $(U_{n\iota})_{\iota \in I}$ di E tale che $\bigcup_{\iota \in I_n} (U_{n\iota} \times U_{n\iota}) \subset V_{n\iota}$. Sia $\mathcal{M}_n$ la struttura uniforme quasi-metrizzabile su E, prevista dal lemma 2, tale che la topologia $\mathfrak{T}_n$ su E dedotta da $\mathcal{M}_n$ abbia una base di numero cardinale inferiore ad $\mathfrak{a}$ e tale che esista un'adiacenza simmetrica W_n di $\mathcal{M}_n$ tale che $(W_n(x))_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(U_{n\iota})_{\iota \in I_n}$. Per la simmetria di W_n risulta $W_n \circ W_n \subset V_n$ e quindi V_n è un'adiacenza per $\mathcal{M}_n$. Sia $\mathcal{M}$ la struttura uniforme estrema superiore della successione $(\mathcal{M}_n)_{n \in N}$ e sia $\mathfrak{T}_{\mathcal{M}}$ la topologia da essa dedotta: $\mathcal{M}$ è quella prevista dalla tesi.

Lemma 4 - *Supponiamo che $\mathfrak{a}$ sia un numero cardinale infinito, che E sia uno spazio topologico dotato di una base $(U_\iota)_{\iota \in I}$ tale che* card $(I) \leqslant \mathfrak{a}$ *e che f sia una applicazione surgettiva, continua e chiusa di E sopra uno spazio topologico E' con la proprietà che, per ogni $x' \in E'$, $f^{-1}(x')$ sia un sottospazio $\mathfrak{a}$-compatto di E. Allora si ha che, se $\mathcal{U}$ è l'insieme delle parti finite di I e se per ogni $A \in \mathcal{U}$ si pone $V_A = \bigcup_{\iota \in A} U_\iota$ e $U'_A = \complement(f(\complement V_A))$, la famiglia $(U'_A)_{A \in \mathcal{U}}$ è una base di E.*

Dim. Se G' è un insieme aperto di E', poniamo $G = f^{-1}(G')$ e denotiamo con $\mathcal{U}_G$ l'insieme degli $A \in \mathcal{U}$ tali che $V_A \subset G$. Poichè $(U_\iota)_{\iota \in I}$ è una base di E è facile riconoscere che risulta $G = \bigcup_{A \in \mathcal{U}_G} V_A$. Da ciò, f essendo surgettiva, consegue $\complement G' = f(f^{-1}(\complement G') = f(f^{-1}(G')) = f(\complement G)$ e quindi

$$\complement G' \subset \bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} f(\complement V_A). \tag{1}$$

Dimostriamo che, reciprocamente, risulta:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} f(\complement V_A) \subset \complement G'. \tag{2}$$

A tal fine, supponiamo $x' \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} f(\complement V_A)$. Per ogni $A \in \mathcal{U}_G$ esiste un $x \in \complement V_A$ tale che $x' = f(x)$: dunque è $x \in f^{-1}(x') \cap (\complement V_A)$. Ciò mostra che $(f^{-1}(x') \cap \cap (\complement G_A))_{A \in \mathcal{U}_G}$ è una famiglia decrescente di insiemi chiusi non vuoti del sottospazio $f^{-1}(x')$ (dove $\mathcal{U}_G$ è ordinato per inclusione). Poichè $f^{-1}(x')$ è un sottospazio $\mathfrak{a}$-compatto ed è card $(\mathcal{U}_G) \leqslant$ card $(\mathcal{U}) \leqslant \mathfrak{a}$ ($\mathfrak{a}$ è infinito), esiste un $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} (f^{-1}(x') \cap \cap (\complement V_A))$. Si ha $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} \complement V_A = \complement G$ e poi $x' = f(x) \subset f(\complement G) = \complement G'$ e da ciò la (2): da questa e dalla (1) consegue $\complement G' = \bigcap_{A \in \mathcal{U}_G} f(\complement V_A)$ e poi $G' = \bigcup_{A \in \mathcal{U}_G} U'_A$. Così la tesi è dimostrata.

Osservazione 1 - Si utilizzerà la circostanza che, $\mathfrak{a}$ essendo infinito, risulta card $(\mathcal{U})$ = card $(I) \leqslant \mathfrak{a}$.

Osservazione 2 - Dunque, se E ha base numerabile, E' gode della medesima proprietà, ammesso che ogni $f^{-1}(x')$ sia numerabile compatto (cfr. [6] § 2, exerc. 23).

n. **3**. – Ricordiamo una ben nota definizione.

Def. 2 - *Se E è uno spazio topologico e se $\mathfrak{S}$ è una classe di spazi topologici diremo che E è un estensore assoluto per $\mathfrak{S}$ se per ogni spazio X della classe $\mathfrak{S}$, per ogni insieme chiuso A di X e per ogni applicazione continua f del sottospazio A in E esiste un'applicazione continua $\bar{f}$ di X in E la cui restrizione ad A sia f.*

Lemma 5 – *Sia $\mathfrak{a}$ un numero cardinale infinito e siamo $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$ e, rispettivamente, $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}^*$ le classi* (6) *degli spazii topologici aventi base di numero cardinale inferiore ($\leqslant$) ad $\mathfrak{a}$ e metrizzabili, rispetto., quasi-metrizzabili. Allora se E è un estensore assoluto per $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}$* (def. 2) *esso è anche estensore assoluto per la classe $\mathfrak{M}_\mathfrak{a}^*$.*

Dim. Supponiamo che lo spazio topologico X sia in $\mathfrak{M}$ e sia $\mathcal{U}$ una struttura uniforme di spazio quasi-metrizzabile su X compatibile con la sua topologia. Il filtro $\mathfrak{U}$ delle adiacenze di X per $\mathcal{U}$ ha una base numerabile.

(6) Il termine « classe » viene usato con significato differente da quello del termine « insieme » al fine di evitare una ben nota antinomia della teoria degli insiemi (in conformità all'assiomatica di VON NEUMANN-BERNAYS-GÖDEL).

Sia A un insieme chiuso di X e sia $\mathcal{U}_A$ la strkttura uniforme indotta da $\mathcal{U}$ su A: essa ha come filtro delle adiacenze la traccia $\mathfrak{A}_A$ di $\mathfrak{A}$ su $A \times A$.

Siano C e, rispett., C_A le intersezioni di $\mathfrak{A}$ e, rispett., di $\mathfrak{A}_A$: esse sono delle relazioni di equivalenza su X e, rispett., su A.

Siano X/C e, rispett., A/C_A gli spazii uniformi separati associati ([5] cap. II, § 1, n. 4) ad X (munita di $\mathcal{U}$) e, rispett., ad A (munito di $\mathcal{U}_A$). Siano s e, rispettivamente, s_A le surgezioni canoniche di X sopra X/C e, rispett., di A sopra A/C_A. Come è noto ([5] cap. II, § 2, n. 2, Remarque), s e s_A sono applicazioni continue chiuse e aperte e quindi, in forza della osservazione 1 al lemma 4, X/C, al pari di X, ha una base di numero cardinale inferiore ad α.

Dunque X/C è in $\mathfrak{M}_\alpha$.

Sia j_A l'ingezione canonica di A in X: l'applicazione $s \circ j_A$ di A in X/C, si può decomporre secondo la

$$s \circ j_A = j_{s(A)} \circ h \circ s_A , \tag{1}$$

dove $j_{s(A)}$ è l'ingezione canonica di $s(A)$ in X/C e h è la bigezione canonica di A/C_A sopra $s(A)$ la quale è un omeomorfismo, in forza del coroll. alla prop. 4, § 9, cap. I di [5] e perchè A è chiuso in X ed ogni insieme chiuso di X è saturato per C.

Sia f un'applicazione continua del sottospazio A in E: come è noto ([5] cap. II, § 2, n. 2, Remarque) f è compatibile con C_A e Δ dove Δ è la diagonale di $E \times E$ che, E essendo separato, è identica all'intersezione del filtro delle adiacenze della struttura uniforme di spazio metrico della quale E è munito. Consegue che esiste un'applicazione f_* di A/C_A in E tale che:

$$f_* \circ s_A = f . \tag{2}$$

Sia k l'omeomorfismo di $s(A)$ sopra A/C_A inverso di h: la $f_* \circ k$ è continua e, poichè $s(A)$ è chiuso (A è chiuso ed s è chiusa) e poichè E è un estensore assoluto per $\mathfrak{M}_\alpha$ (def. 2), essendo X/C in $\mathfrak{M}_\alpha$, esiste un'applicazione continua g di X/C in E tale che

$$g \circ j_{(s)A} = f_* \circ k . \tag{3}$$

Sia $\overline{f} = g \circ s$. La $\overline{f}$ è un'applicazione continua di X in E e, in forza di (1), (2) e (3) si ha $\overline{f} \circ j_A = g \circ s \circ j_A = g \circ j_{(s)A} \circ h \circ s_A = f_* \circ k \circ h \circ s_A = f_* \cdot s_A = f$. Dunque la restrizione di $\overline{f}$ ad A è f e quindi, per la def. 2, la tesi.

Ora è facile stabilire che:

Prop. 6 - *Sia $\mathfrak{a}$ un numero cardinale infinito e sia $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$ la classe* (7) *degli spazii metrizzabili dotati di base avente numero cardinale inferiore ad $\mathfrak{a}$; inoltre, sia $\mathcal{CM}_{\mathfrak{a}}$ la classe degli spazii $\mathfrak{a}$-collettivamente normali* (def. 1). *Allora se E è uno spazio topologico della classe $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$ ed è un G_δ assoluto, ogni volta che E sia un estensore assoluto per $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$* (def. 2) *esso è anche estensore assoluto per $\mathcal{CM}_{\mathfrak{a}}$.*

Dim. Poichè E è un G_δ assoluto esiste una struttura uniforme di spazio metrico completo su E compaibile con la topologia di E e che denotiamoc on $\mathcal{U}$: sia $(W_n)_{n\in N}$ un sistema fondamentale di adiacenze per $\mathcal{U}$. Poichè E è in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$ esiste, inoltre, una base della topologia di E il cui numero cardinale è inferiore ad $\mathfrak{a}$. In forza della def. 4 e della prop. 4 del § 3 di [**1**], per ogni $n \in N$ esiste un ricovrimento aperto localmente finito (ed $\mathcal{U}$-riducibile) $(U_{n\iota})_{\iota\in I_n}$ di E tale che:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{card}(I_n) \leqslant \mathfrak{a}, \qquad \bigcup_{\iota\in I_n} (U_{n\iota} \times U_{n\iota}) \subset W_n .$$

Supponiamo che X sia un qualunque spazio topologico in $\mathcal{CM}_{\mathfrak{a}}$ e suponiamo che A sia un insieme chiuso di X e che f sia un'applicazione continua del sottospazio A in E. Per ogni $n \in N$, f essendo continua, $(f^{-1}(U_{n\iota}))_{\iota\in I_n}$ è un ricovrimento aperto localmente finito (ed $\mathcal{U}$-riducibile) del sottospazio A, e posto $V_n = \bigcup_{\iota\in I_n} (f^{-1}(U_{n\iota}) \times f^{-1}(U_{n\iota}))$, V_n è un'adicenza del sottospazio A per la $\mathfrak{a}$-struttura uniforme $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(A)$ di A ([**1**] § 3, def. 4). Per la prop. 5, risulta $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(X)_A = \mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(A)$ dove $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(X)_A$ è la struttura uniforme indotta su A dalla $\mathfrak{a}$-struttura uniforme $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(X)$ di X: pertanto, per ogni $n \in N$, esiste un'adiacenza V_n^* di $\mathcal{E}_{\mathfrak{a}}(X)$ la cui traccia su $A \times A$ è V_n. Per il lemma 3 precedente, esiste una struttura uniforme di spazio quasi-metrizzabile $\mathcal{Q}$ su E tale che la topologia $\mathfrak{T}_Q$ da essa dedotta sia meno fine della topologia di X e abbia una base avente un insieme d'indici di numero cardinale $\leqslant \mathfrak{a}$ ed, inoltre, ogni V_n^* sia un'adiacenza per $\mathcal{Q}$. Se $\mathcal{Q}_A$ è la struttura uniforme (di spazio quasi-metrizzabile) indotta da $\mathcal{Q}$ su A, la f è un'applicazione uniformemente continua di A, munito di $\mathcal{Q}_A$, in E, munito di $\mathcal{U}$. Poichè $\mathcal{U}$ è una struttura uniforme di spazio completo, denotata con B l'aderenza di A in X munito della topologia dedotta da $\mathcal{Q}$, esiste un'applicazione g uniformemente continua di B, munito della struttura uniforme $\mathcal{Q}_B$ indotta da $\mathcal{Q}$ su B, in E, munito di $\mathcal{U}$ tale che la sua restrizioni ad A sia f. Poichè E è un estensore assoluto per $\mathfrak{M}_{\mathfrak{a}}$, in forza del lemma 5, esiste un'applicazione continua $\bar{f}$ di X, munito della topologia $\mathfrak{T}_Q$ in E munito della topologia dedotta da $\mathcal{U}$, tale che la sua restrizione a B sia g. Poichè $\mathfrak{T}_Q$ è meno fine della topologia iniziale di X la tesi è dimostrata.

---

(7) Cfr. (6).

Supposto $\omega = \text{card}(N)$, in forza dell'osservazione alla prop. 5, dalla prop. 6 ora dimostrata risulta parte del teor. 4.1 della ben nota [8] di O. HANNER (cfr. anche il teor. 1 della nota [7] di C. H. DOWKER) (cfr. Introduzione).

Inoltre, se si tiene presente che gli spazi collettivamente normali sono tutti e soli quelli α-collettivamente normali per ogni α, secondo la def. 1, ancora dalla prop. 6 consegue parte del teor. 2 di [7] di C. H. DOWKER (cfr. Introduzione).

Bibliografia.

1. G. AQUARO, *Ricoprimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** (1959), 319-390.

2. G. AQUARO, *Proprietà locali e proprietà globali di uno spazio topologico*, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli (4) **27** (1960).

3. R. ARENS e J. DUGUNDJI, *Remark on the concept of compactness*, Portugaliae Math. **9** (1950), 141-143.

4. R. H. BING, *Metrization of topological spaces* Canadian J. Math., **3** (1931), 175-186.

5. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Actualites Sci. Ind. **858-1142**, Hermann, Paris 1958.

6. N. BOURBAKI, *Topologie générale*, Actualites Sci. Ind., **1045**, Hermann, Paris 1958.

7. C. H. DOWKER, *On a theorem of Hanner*, Ark. Mat., **2** (1952), 307-313.

8. O. HANNER, *Solid spaces and absolute retracts*, Ark. Mat., **1** (1951), 375-382.

9. K. ISEKI, *A note on normal spaces*, Math. Japonicae, **3** (1953), 45.

10. J. L. KELLEY, *General topology*, Von Nostrand, New York 1955.

11. H. J. KOWALSKI, *Topologische Räume*, Birkhauser, Basel-Stutgart 1961.

12. K. KURATOWSKI, *Sur le prolongment des fonctions continues et les transformations en polytopes*, Fund. Math., **24** (1935), 259-268.

13. S. LEFSCHETZ, *Algebraic topology*, Colloquium Amer. Math. Soc., **27**, New York 1942.

14. E. MICHAEL, *Point-finite and locally finite coverings*, Canadian J. Math, **7** (1955), 275-279.

15. G. NÖBELTING, *Grundlagen der Analytischen Topologie*, Springer, Berlin 1954.