Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 19-24

LUIGI ANTONIO ROSATI (*)

Il gruppo delle collineazioni dei piani di Hughes infiniti. (**)

In una nota [3] in corso di pubblicazione, estendendo al caso infinito una definizione data in [2] per mostrare l'autodualità dei piani di HUGHES, ho introdotto una nuova classe di piani proiettivi infiniti dei quali ho già messo in luce alcune proprietà. In questa breve nota determino il loro gruppo delle collineazioni e dimostro in particolare che non sono di traslazione. Seguirò naturalmente la via aperta da G. ZAPPA in [4] e da me già usata per la determinazione del gruppo delle collineazioni dei piani di HUGHES.

Richiamiamo prima di tutto la definizione di questi piani. Sia R un quasicorpo associativo destro avente per centro un campo F e di rango due sopra F, tale cioè che, preso un qualsiasi elemento, t, dell'insieme $R-F$ degli elementi di R non appartenenti ad F, un qualunque elemento, α, di R determina univocamente due elementi di F, a, a_1, tali che $\alpha = a + a_1 t$: chiameremo a, a_1 le componenti di α secondo t e scriveremo sempre il coefficiente di t al secondo posto (l'esistenza di tali quasicorpi è dimostrata in [3]). Siano allora x, y, z, u, v, w elementi di R di componenti p, p_1; q, q_1; r, r_1; a, a_1; b, b_1; c, c_1 e supponiamo che valga una delle due relazioni

$$ax + by + cz + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, t = 0$$

$$pu + qv + rw + (p_1 u + q_1 v + r_1 w)\, t = 0\, .$$

(*) L'autore fa parte dell'ottavo gruppo di ricerca matematica del C.N.R. Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze.

(**) Ricevuto il 21 dicembre 1960.

Allora vale anche l'altra (per il medesimo t) e valgono anche le analoghe eguaglianze ottenute in corrispondenza dei vari valori di t in $R-F$ [3]: in tal caso diremo che le due terne ordinate di elementi di R x, y, z e u, v, w sono incidenti. Si ha subito che, se x, y, z e u, v, w sono incidenti, lo sono anche due qualunque terne ad esse proporzionali secondo un fattore sinistro appartenente ad R e diverso da zero kx, ky, kz e hu, hv, hw. Questa relazione di proporzionalità è riflessiva, simmetrica e transitiva e permette di dividere le terne ordinate di elementi di R non tutti nulli in classi di terne proporzionali.

Ad una qualunque di queste classi associamo due enti astratti, uno chiamato «punto» e indicato col simbolo (x, y, z) e uno chiamato «retta» e indicato col simbolo $[x, y, z]$, essendo x, y, z una terna qualsiasi della classe considerata. Diciamo poi incidenti il punto (x, y, z) e la retta $[u, v, w]$ se le due terne x, y, z e u, v, w (o qualunque altra coppia di terne ad esse proporzionali) sono incidenti. Ebbene, con questa relazione d'incidenza i punti e le rette ora definiti costituiscono un piano proiettivo, π. Evidentemente la retta $[u, v, w]$ risulta il luogo dei punti (x, y, z) che verificano l'equazione (equazione di $[u, v, w]$)

$$ax + by + cz + (a_1 x + b_1 y + c_1 z)\, t = 0,$$

dove t è un elemento arbitrario di $R-F$ e $u = a + a_1 t$, $v = b + b_1 t$, $w = c + c_1 t$.

Vogliamo ora determinare il gruppo delle collineazioni di π. Si vede subito che π contiene un sottopiano desarguesiano, π_0, formato con i punti e con le rette a coordinate proporzionali ad elementi di F. E, come nei piani di Hughes, ogni retta di π, non appartenente a π_0, contiene uno ed un solo punto di π_0, e dualmente per ogni punto di π, non appartenente a π_0, passa una ed una sola retta di π_0. Si vede subito che

Teorema 1. – *La corrispondenza fra i punti di* π *d'equazioni*

$$x' = a_{11}\,\sigma x + a_{12}\,\sigma y + a_{13}\,\sigma z$$

$$y' = a_{21}\,\sigma x + a_{22}\,\sigma y + a_{23}\,\sigma z$$

$$z' = a_{31}\,\sigma x + a_{32}\,\sigma y + a_{33}\,\sigma z,$$

dove σ *è un qualsiasi automorfismo di* R, a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ *sono elementi di* F, $|a_{ij}| \neq 0$, *è una collineazione di* π *che muta in sè* π_0.

Indicheremo con $\sum$ il gruppo di queste collineazioni mentre indicheremo con G il gruppo delle collineazioni di π d'equazioni

$$x' = a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z$$

$$y' = a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z$$

$$z' = a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z,$$

dove a_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ sono elementi di F e $|a_{ij}| \neq 0$, e con Γ il gruppo (isomorfo al gruppo degli automorfismi di R) delle collineazioni di π d'equazioni

$$x' = \sigma x, \quad y' = \sigma y, \quad z' = \sigma z,$$

dove σ è un automorfismo di R. Come in [1] si ha facilmente il seguente teorema

Teorema 2. – *Il gruppo $\sum$ è il gruppo delle collineazioni di π che mutano in sè π_0 e si ha $\sum = G\Gamma$, $G \cap \Gamma = 1$.*

Per provare che $\sum$ è anche il gruppo delle collineazioni di π basterà dimostrare che ogni collineazione di π muta in sè π_0. Intanto come in [1] si ha subito

Lemma 1. – *Il gruppo $\sum$ è transitivo sui punti di π non appartenenti a π_0.*

Poi come in [4] si dimostrano i seguenti quattro lemmi.

Lemma 2. – *Una collineazione di π appartenente a G, la quale subordini in π_0 un'omologia, è essa stessa un'omologia.*

Lemma 3. – *Comunque si prendano un punto P e una retta r incidenti, appartenenti a π_0, esiste in G qualche omologia (speciale) non banale di π di centro P e asse r.*

Lemma 4. – *Il gruppo $\sum$ è transitivo sull'insieme delle coppie punto-retta incidenti non appartenenti a π_0.*

Lemma 5. – *Le coppie punto-retta incidenti, P, r, di π si suddividono rispetto a $\sum$ in quattro sistemi di transitività:* a) *coppie con P ed r in π_0;* b) *coppie con P in π_0 ed r non in π_0;* c) *coppie con P non in π_0, r in π_0;* d) *coppie con P ed r non in π_0.*

Finalmente possiamo dimostrare il

Teorema 3. – *Il gruppo $\sum$ è il gruppo delle collineazioni di π.*

Per comodità chiameremo punti impropri quelli della retta $z = 0$ (retta impropria) e nel modo usuale introdurremo in π coordinate non omogenee. Allora i punti propri di π saranno rappresentati dalle coppie ordinate di elementi di R e le rette proprie potranno rappresentarsi con le equazioni (nè identiche, nè impossibili)

$$ax + by + c + (a_1 x + b_1 y + c_1) t = 0$$

(t elemento di $R - F$; a, b, c, a_1, b_1, c_1 elementi di F).

Supponiamo per assurdo che il gruppo, $\overline{\sum}$, di tutte le collineazioni di π sia più ampio di $\sum$. Allora, ragionando come in [4], si vede che $\overline{\sum}$ è transitivo sull'insieme di tutte le coppie punto-retta incidenti e che, comunque si prendano in π un punto P ed una retta r incidenti, esiste almeno un'omologia speciale non banale di centro P ed asse r. Consideriamo allora un'omologia speciale (traslazione), σ, avente per asse la retta impropria e per centro un punto improprio C non appartenente a π_0, e supponiamo che, per effetto di σ, $O \equiv (0, 0)$ venga portato in $Q \equiv (\alpha, \beta)$. È chiaro che Q non appartiene a π_0 perchè, se questo fosse, la retta OQ apparterrebbe a π_0 e quindi anche il suo punto improprio che invece è C. Prendiamo un generico elemento t di $R - F$ e siano c, a; d, b rispettivamente le componenti di α e di β secondo t. Allora, detta τ la traslazione di π d'equazioni $x' = x - a$, $y' = y - b$, la traslazione $\omega = \sigma\tau$ porta $(0, 0)$ in (at, bt). Siccome a e b non possono essere entrambi nulli, perchè allora α e β apparterrebbero ad F e quindi (α, β) a π_0, potremo supporre ad esempio $b \neq 0$. La direzione della traslazione ω è quella della retta che unisce $(0, 0)$ con (at, bt), cioè quella della retta (di π_0) d'equazione $bx = ay$. Ora, se $(X, 0)$ è un qualsiasi punto dell'asse delle x e $(\overline{X}', \overline{Y}')$ il suo corrispondente in ω, l'asse delle x e la retta che congiunge (at, bt) con $(\overline{X}', \overline{Y}')$ saranno corrispondenti in ω e quindi parallele. Ne viene che la retta che congiunge (at, bt) con $(\overline{X}', \overline{Y}')$ ha l'equazione $y = bt$: difatti questa retta è parallela all'asse delle x, passa per (at, bt) e d'altra parte è unica la retta per due punti. Pertanto $\overline{Y}' = bt$. Ma la congiungente $(X, 0)$ con $(\overline{X}', \overline{Y}')$ deve avere la direzione della retta $bx = ay$ e, dovendo passare per $(X, 0)$ avrà l'equazione $bx - ay - bX = 0$: infatti, poichè le coordinate omogenee $[u, v, w]$ di una retta sono determinate a meno d'un fattore sinistro, si potrà supporre che v appartenga ad F, cioè che l'equazione omogenea di $[u, v, w]$ sia del tipo

$$lx + my + nz + (l_1 x + n_1 z) t = 0 .$$

Allora il passaggio per $(a, b, 0)$ porta $la + mb + l_1 at = 0$. Da cui per l'equazione omogenea di $[u, v, w]$ si ottiene la forma

$$bx - ay + nz + n_1 zt = 0 .$$

Di conseguenza il passaggio per $(X, 0, 1)$ porta $n + n_1 t = -bX$ e quindi quanto si voleva dimostrare. Ponendo allora $y = bt$, ricaviamo $\overline{X}' = X + at$.

Diciamo ora (X', Y') il corrispondente in ω del generico punto proprio (X, Y) di π. Sarà naturalmente $X' = \overline{X}' = X + at$, perchè la retta che congiunge $(X, 0)$ e (X, Y) e quella che congiunge $(\overline{X}', \overline{Y}')$ e (X', Y') devono essere parallele. Ma anche la retta che congiunge (X, Y) con (X', Y') deve essere parallela alla retta $bx = ay$, e, ragionando come sopra si trova per essa l'equazione $bx - ay - bX + aY = 0$. Ponendo allora $x = X' = X + at$, si ricava $Y' = Y + bt$. Perciò se prendiamo la retta $y = xs$, essendo s un qualunque elemento di R, i punti della sua corrispondente, r, in ω^{-1} dovranno soddisfare l'equazione $y + bt = (x + at)s$. D'altra parte la corrispondente di $y = xs$ in ω^{-1} passa per il corrispondente $(-at, -bt)$ di $(0, 0)$ in ω^{-1} ed è parallela alla retta $y = xs$ e quindi la sua equazione si potrà scrivere nella forma $y + c + (-x + c_1)s = 0$, essendo c, c_1 due elementi di F (univocamente) determinati dalla condizione

$$-bt + c + (at + c_1)s = 0, \tag{1}$$

esprimente il passaggio per $(-at, -bt)$: infatti si potrà supporre ancora che l'equazione omogenea di r sia del tipo

$$lx + my + nz + (l_1 x + n_1 z)s = 0 .$$

Allora il passaggio per $(1, s, 0)$ e per $(-at, -bt, 1)$ dimostra quanto si voleva. Perciò, qualunque sia x in R, sarà

$$(x + at)s - bt = (x - c_1)s - c,$$

e per la (1)

$$(x + at)s = (x - c_1)s + (at + c_1)s .$$

Da questa, ponendo $x - c_1 = X$, $at + c_1 = \varrho$, si ha

$$(X + \varrho)s = Xs + \varrho s, \tag{2}$$

dove X è un qualunque elemento di R perchè lo è anche x e d'altra parte c_1, per la (1), non dipende da x.

Osserviamo ora che si ha $\varrho \neq 0$, perchè $\varrho = 0$ porta $a = c_1 = 0$ e questo, essendo $b \neq 0$, è incompatibile con la (1). Quindi se u, v sono due elementi qualunque di R si ha, tenuto conto della (2)

$$(u + v)s = v\varrho^{-1}(\varrho v^{-1}u + \varrho)s = v\varrho^{-1}(\varrho v^{-1}us + \varrho s) = us + vs .$$

Cioè la moltiplicazione è distributiva tanto a sinistra quanto a destra. Ma allora R è un corpo, contro le ipotesi. Pertanto $\overline{\sum}$ non può essere più ampio di $\sum$ ed il teorema è dimostrato.

Concludiamo notando che

Teorema 4. – *π non è un piano di traslazione e quindi non è desarguesiano.*

Difatti ogni collineazione di π muta in sè π_0 e pertanto anche ogni omologia speciale porta punti di π_0 in punti di π_0.

Bibliografia.

[1] L. A. Rosati « I gruppi di collineazioni dei piani di Hughes », Boll. Un. Mat. Ital., (3) **13**, (1958), 505-513.

[2] L. A. Rosati « Unicità e autodualità dei piani di Hughes », Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **30** (1960), 316-327.

[3] L. A. Rosati « Su una generalizzazione dei piani di Hughes », in corso di pubblicazione in Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.

[4] G. Zappa « Sui gruppi di collineazioni dei piani di Hughes », Boll. Un. Mat. Ital. (3), **12** (1957), 507-516.