Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 279-292

PASQUALE MASTROGIACOMO (*)

Sul tensore di torsione di una connessione tensoriale per tensori controvarianti e covarianti m-pli. (**)

Premessa.

E. BOMPIANI ha introdotto [1] (1), alcuni anni addietro, la nozione di connessione tensoriale per tensori doppi covarianti e controvarianti. Successivamente A. COSSU [3] ha definito alcuni enti geometrici intrinsecamente determinati dalle connessioni di questo tipo e, tra questi, un tensore analogo a quello di torsione per le connessioni affini.

Recentemente ho esteso [4] la nozione di connessione tensoriale ai tensori covarianti e controvarianti m-pli ed ho introdotto [5] alcune connessioni ed alcuni enti geometrici intrinsecamente associati a queste connessioni.

In questa nota si estende la nozione di tensore di torsione alle c.t.c. m-ple (connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti m-pli) e se ne dànno due diverse interpretazioni analoghe ad altre già assegnate da E. BOMPIANI [2] per il tensore di torsione delle connessioni affini e da A. COSSU [3] per il tensore di torsione delle connessioni tensoriali per tensori doppi. Poi, dopo aver introdotto due c.t.c. collegate ad una data c.t.c. m-pla L (la *associata* A e la *coniugata* C) mediante il suddetto tensore di torsione, si effettua una costruzione del trasporto infinitesimo per equipollenza definito dalla L mediante il trasporto subordinato dalla c.t.c. A associata alla L. Inoltre si caratterizza un tipo particolare di c.t.c. m-ple analoghe alle connessioni affini semi-simmetriche di SCHOUTEN, si studiano alcune proprietà del tensore di torsione, determinandone il comportamento rispetto ad alcune c.t.c. m-ple da me precedentemente intro-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, Bari (Italia).
(**) Ricevuto il 5 dicembre 1960.
(1) Le [ ] si riferiscono alla bibliografia posta alla fine della presente nota.

dotte [5] ed infine, dopo aver determinato una legge intrinseca del trasporto per equipollenza, definito da una c.t.c. m-pla L, di una particolare classe di tensori tra loro equivalenti, si esamina il comportamento del tensore di torsione della L rispetto alla più generale trasformazione della L che conserva il suddetto trasporto.

Avverto infine che, data l'analogia che spesso si presenta tra gli enti geometrici determinati da una c.t.c. m-pla con $m > 2$ e quelli determinati da una connessione affine o da una c.t.c. per tensori doppi, talvolta le proposizioni e i risultati che seguono saranno dati senza dimostrazioni o con brevi cenni di dimostrazioni e si porranno in rilievo solo quei risultati e quelle dimostrazioni in cui manca la suddetta analogia o che, almeno per quanto mi consta, si presentano per la prima volta.

1. - Definizioni e generalità.

Ricordiamo [4] che in una varietà differenziabile X_n assegnate, in ogni dominio di coordinate locali x^i, n^{2m+1} funzioni $L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}(x^j)$ delle coordinate x^j (i, j, i_1, j_1, ..., i_m, i_m, $t = 1, 2, \dots, n$) del generico punto x, esse definiscono una *connessione tensoriale per tensori controvarianti e covarianti m-pli* ($m \geqslant 2$), che denoteremo per semplicità con *c.t.c. m-pla*, se, per una generica trasformazione ammissibile di coordinate $x^{i'} = x^{i'}(x^j)$, si trasformano secondo la legge (²)

$$(1.1) \qquad L^{i'_1 i'_2 \dots i'_m}_{j'_1 j'_2 \dots j'_m t'} = L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}\, \vartheta^{j_1}_{j'_1} \vartheta^{j_2}_{j'_2} \dots \vartheta^{j_m}_{j'_m} \vartheta^{i'_1}_{i_1} \vartheta^{i'_2}_{i_2} \dots \vartheta^{i'_m}_{i_m} \vartheta^{t}_{t'} -$$

$$- \vartheta^{i'_1}_{j_1 t} \vartheta^{j_1}_{j'_1} \delta^{i'_2}_{j'_2} \delta^{i'_3}_{j'_3} \dots \delta^{i'_m}_{j'_m} \vartheta^{t}_{t'} - \vartheta^{i'_2}_{j_2 t} \vartheta^{j_2}_{j'_2} \delta^{i'_1}_{j'_1} \delta^{i'_3}_{j'_3} \dots \delta^{i'_m}_{j'_m} \vartheta^{t}_{t'} -$$

$$- \dots - \vartheta^{i'_m}_{j_m t} \vartheta^{j_m}_{j'_m} \delta^{i'_1}_{j'_1} \delta^{i'_2}_{j'_2} \dots \delta^{i'_{m-1}}_{j'_{m-1}} \vartheta^{t}_{t'} .$$

Ricordiamo inoltre che le $L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}$ diconsi i *parametri* della c.t.c. m-pla e che, assegnati i campi di tensori m-pli $\xi^{i_1 i_2 \dots i_m}(x)$ e $\eta_{j_1 j_2 \dots j_m}(x)$, si definiscono loro *differenziali tensoriali* le espressioni

$$(1.2) \qquad D\xi^{i_1 i_2 \dots i_m} = d\xi^{i_1 i_2 \dots i_m} + L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}\, \xi^{j_1 j_2 \dots j_m}\, dx^t$$

$$(1.3) \qquad D\eta_{j_1 j_2 \dots j_m} = d\eta_{j_1 j_2 \dots j_m} - L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}\, \eta_{i_1 i_2 \dots i_m}\, dx^t ,$$

(²) Per il significato dei simboli adoperati cfr. E. BOMPIANI [1].

che si provano avere carattere tensoriale. In modo analogo si definiscono *derivate covarianti tensoriali* le espressioni

$$\Delta_t\, \xi^{i_1 i_2 \dots i_m} = \partial_t\, \xi^{i_1 i_2 \dots i_m} + L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_w t}\, \xi^{j_1 j_2 \dots j_m}$$

$$\Delta_t\, \eta_{j_1 j_2 \dots j_m} = \partial_t\, \eta_{j_1 j_2 \dots j_m} - L^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}\, \eta_{i_1 i_2 \dots i_m}\,.$$

Ricordiamo infine che l'annullarsi del differenziale tensoriale di un tensore definisce il trasporto infinitesimo per equipollenza subordinato dalla c.t.c. L assegnata e che un campo di tensori $\xi^{i_1 i_2 \dots i_m}(x)$, definito nei punti di una porzione di curva regolare, si dice un campo di tensori equipollenti (o paralleli) se in ogni punto della suddetta perzione di curva risulta $D\xi^{i_1 i_2 \dots i_m}(x) = 0$. Ne consegue la nozione di trasporto per equipollenza dei tensori controvarianti da un punto x ad un punto y lungo un arco di curva regolare avente x ed y per estremi. In modo analogo si definisce ovviamente il trasporto dei tensori m-pli covarianti.

2. - Sul tensore di torsione di una c.t.c. m-pla e su alcune connessioni tensoriali da essa determinate.

Si può facilmente provare che, per $m \geqslant 2$, le espressioni

$$S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m t]} \tag{2.1}$$

sono le componenti di un tensore, che chiameremo *il tensore di torsione* (³) *della c.t.c. m-pla* L, analogo al tensore di torsione di una connessione affine ed ovviamente alternante rispetto agli indici di covarianza.

Segue immediatamente che le

$$L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} + \varrho S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} \tag{2.2}$$

ove ϱ è un'arbitraria funzione scalare, sono le componenti di una c.t.c. m-pla, *il cui tensore di torsione è nullo se, e solo se,* $\varrho = -1$ *ed è invece uguale a* $-S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ *se, e solo se,* $\varrho = -2$. In corrispondenza ai suddetti valori di ϱ si ottengono le due connessioni A e C di parametri

$$A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} \tag{2.3}$$

(³) Per $m = 2$ il tensore in questione è stato introdotto da A. Cossu [3].

e

$$C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - 2\, S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\,, \tag{2.4}$$

che chiameremo rispettivamente *l'associata e la coniugata alla L mediante S.*

È facile verificare che *la relazione di coniugio è reciproca, che due c.t.c. m-ple tra loro coniugate hanno la medesima c.t.c. associata, che sussiste la relazione*

$$2\, A^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} + C^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$$

e che il differenziale tensoriale, secondo la c.t.c. (2.2), *di un tensore m-plo controvariante simmetrico non dipende da* ϱ *ed è quindi lo stesso per le tre connessioni* L, A *e* C.

Si può inoltre provare che *affinchè anche il differenziale tensoriale, secondo la* (2.2), *di un generico tensore m-plo covariante simmetrico non dipenda da* ϱ *occorre e basta che si abbia*

$$S^{(i_1 \dots i_m)}_{j_1 \dots j_m t} = 0\,. \tag{2.5}$$

Per determinare il significato geometrico del tensore $S^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m t}$, assegnati nel generico punto $x\,(x^i)$ della X_n i sistemi di differenziali indipendenti (4) $\underset{\alpha}{dx^i}$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m+1)$ e una generica c.t.c. m-pla $\Gamma^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ a tensore di torsione nullo (5), si considerino gli $m+1$ tensori plückeriani (6) infinitesimi

$$\underset{1}{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_m} = \underset{2}{dx}^{[i_1}\, \underset{3}{dx}^{i_2} \dots \underset{m+1}{dx}^{i_m]}, \qquad \underset{2}{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_m} = -\, \underset{1}{dx}^{[i_1}\, \underset{3}{dx}^{i_2} \dots \underset{m+1}{dx}^{i_m]},$$

$$\dots, \qquad \underset{\alpha}{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_m} = (-1)^{\alpha+1}\, \underset{1}{dx}^{[i_1}\, \underset{2}{dx}^{i_2} \dots \underset{\alpha-1}{dx}^{i_{\alpha-1}}\, \underset{\alpha+1}{dx}^{i_\alpha} \dots \underset{m+1}{dx}^{i_m]},$$

$$\dots, \qquad \underset{m+1}{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_m} = (-1)^{m+2}\, \underset{1}{dx}^{[i_1}\, \underset{2}{dx}^{i_2} \dots \underset{m}{dx}^{i_m]}$$

---

(4) Si supporrà $n > m$, perchè se fosse $n \leqslant m$ risulterebbe ovviamente

$$S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = 0\,.$$

(5) Ad esempio una c.t.c. m-pla dedotta da una connessione affine simmetrica.

(6) Ricordiamo che si chiama tensore plückeriano m-plo o m-vettore semplice $(m \leqslant n)$ associato agli m vettori controvarianti linearmente indipendenti $\underset{\alpha}{\xi}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ il tensore m-plo di componenti

$$\underset{1}{\xi}^{[i_1}\, \underset{2}{\xi}^{i_2} \dots \underset{m}{\xi}^{i_m]}.$$

e il tensore, anch'esso plückeriano infinitesimo,

$$\lambda^{i_1 \dots i_m} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m+1} \underset{\alpha}{\xi}^{i_1 \dots i_m}$$

la cui m-direzione appartiene alla $(m+1)$ -direzione determinata dal tensore plückeriano $\underset{1}{\mathrm{d}x}^{[i_1} \underset{2}{\mathrm{d}x}^{i_2} \dots \underset{m+1}{\mathrm{d}x}^{i_{m+1}]}$.

Indicato poi con $\underset{\alpha}{\bar{\xi}}$ il tensore applicato in $x + \mathrm{d}x$ ed equipollente al tensore $\underset{\alpha}{\xi}$ secondo la c.t.c. m-pla ausiliaria Γ, sia $\underset{\alpha}{\xi}^*$ l'equipollente in x di $\underset{\alpha}{\bar{\xi}}$ secondo la c.t.c. L assegnata. Si ricava facilmente

$$\underset{\alpha}{\xi}^{*i_1 \dots i_m} = \underset{\alpha}{\xi}^{i_1 \dots i_m} - (\Gamma^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t})\, \underset{\alpha}{\xi}^{j_1 \dots j_m}\, \underset{\alpha}{\mathrm{d}x}^t,$$

da cui, sommando membro a membro per $\alpha = 1, 2, \dots, m+1$, posto

$$\lambda^{*i_1 \dots i_m} = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m+1} \underset{\alpha}{\xi}^{*i_1 \dots i_m}$$

ed osservato che risulta

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m+1} \underset{\alpha}{\xi}^{j_1 \dots j_m}\, \underset{\alpha}{\mathrm{d}x}^t = (m+1)\, \underset{1}{\mathrm{d}x}^{[j_1} \underset{2}{\mathrm{d}x}^{j_2} \dots \underset{m}{\mathrm{d}x}^{j_m} \underset{m+1}{\mathrm{d}x}^{t]}$$

si deduce che la parte principale del tensore $\lambda^* - \lambda$, a meno di infinitesimi di ordine maggiore di $m+1$, ha per componenti le espressioni

$$\lambda^{*i_1 \dots i_m} - \lambda^{i_1 \dots i_m} = (m+1)\, S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\, \underset{1}{\mathrm{d}x}^{j_1} \dots \underset{m}{\mathrm{d}x}^{j_m} \underset{m+1}{\mathrm{d}x}^t, \tag{2.6}$$

dipendenti esclusivamente dal tensore $S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ e dai vettori infinitesimi $\underset{\alpha}{\mathrm{d}x}^i$. Si prova facilmente che se *si sostituiscono ai sistemi di differenziali* $\underset{\alpha}{\mathrm{d}x}^i$ $m+1$ *vettori controvarianti linearmente indipendenti* $\underset{\alpha}{\xi}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m+1)$ *determinanti la stessa* $(m+1)$ *-direzione definita dagli assegnati* $\underset{\alpha}{\mathrm{d}x}^i$, *il tensore*

$$S^{i_1 i_2 \dots i_m} = S^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m j_{m+1}}\, \underset{1}{\xi}^{j_1} \underset{2}{\xi}^{j_2} \dots \underset{m}{\xi}^{j_m} \underset{m+1}{\xi}^{j_{m+1}} \tag{2.7}$$

differisce dal tensore (2.6) *solo per un fattore scalare.*

Si osservi che il tensore (2.7), che chiameremo *tensore di torsione relativo agli* $m+1$ *vettori* $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$, dipende essenzialmente dal tensore plückeriano definito dai vettori $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$.

Si ha inoltre ovviamente che *una c.t.c. m-pla coincide con la sua associata* (2.3) *se, e soltanto se, per ogni scelta degli* $m+1$ *vettori* $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$, *risulta nullo il relativo tensore di torsione* (2.7).

Se invece S è della forma (7)

$$S^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{j_1 i_2 \ldots j_m t} = \delta^{i_1}_{[j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \ldots \delta^{i_m}_{j_m} \varphi_{t]}\,, \tag{2.8}$$

ove φ_t è un arbitrario vettore covariante, si deduce

$$S^{p_1 \ldots p_m}_{p_1 \ldots p_m t} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-m)}{(m+1)!}\varphi_t,$$

per cui il tensore (2.7) diventa

$$S^{i_1 i_2 \ldots i_m} = \underset{1}{\xi}{}^{[i_1} \underset{2}{\xi}{}^{i_2} \ldots \underset{m}{\xi}{}^{i_m} \underset{m+1}{\xi}{}^{i_{m+1}]} \varphi_{i_{m+1}}$$

ed è quindi plückeriano e la sua m-direzione appartiene alla $(m+1)$ *-direzione del tensore plückeriano*

$$\underset{1}{\xi}{}^{[i_1} \underset{2}{\xi}{}^{i_2} \ldots \underset{m+1}{\xi}{}^{i_{m+1}]}.$$

Viceversa se si vuole che il tensore (2.7) determini una m-direzione appartenente alla $(m+1)$-direzione del tensore $\underset{1}{\xi}{}^{[i_1} \underset{2}{\xi}{}^{i_2} \ldots \underset{m+1}{\xi}{}^{i_{m+1}]}$ è necessario che il tensore di torsione $S^{i_1 i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_m t}$ sia alternante rispetto agli indici di controvarianza ed inoltre che si abbia identicamente

$$\underset{1}{\xi}{}^{[r_1} \underset{2}{\xi}{}^{r_2} \ldots \underset{m}{\xi}{}^{r_m} \underset{m+1}{\xi}{}^{i_{m+1}} S^{i_1] i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_m j_{m+1}} \underset{1}{\xi}{}^{j_1} \underset{2}{\xi}{}^{j_1} \ldots \underset{m+1}{\xi}{}^{j_{m+1}} = 0, \tag{2.9}$$

ossia

$$\delta^{r_1 r_2 \ldots r_{m+1} i_1}_{s_1 s_2 \ldots s_{m+1} i} S^{i i_2 \ldots i_m}_{j_1 j_2 \ldots j_m j_{m+1}} \underset{1}{\xi}{}^{j_1} \underset{1}{\xi}{}^{s_1} \underset{2}{\xi}{}^{j_2} \underset{2}{\xi}{}^{s_2} \ldots \underset{m+1}{\xi}{}^{j_{m+1}} \underset{m+1}{\xi}{}^{s_{m+1}} = 0\,.$$

---

(7) Le c.t.c. m-ple per le quali il tensore di torsione ha la forma (2.7), per l'analogia che esse presentano con le *connessioni affini semi-simmetriche* di SCHOUTEN, le chiameremo *c.t.c. m-ple semi-simmetriche*.

Da questa identità, simmetrizzando rispetto alle coppie di indici $s_1 j_1$, $s_2 j_2$, ... , $s_{m+1} j_{m+1}$, annullando il generico coefficiente della precedente forma quadratica in ciascuno dei vettori $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m+1)$, e contraendo rispetto alle coppie $r_1 s_1$, $r_2 s_2$, ... , $r_{m+1} s_{m+1}$, si deduce

$$S^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m j_{m+1}} = \frac{(m+1)!}{(n-1)(n-2)\dots(n-m)} S^{p_1 p_2 \dots p_m}_{p_1 p_2 \dots p_m [j_{m+1}} \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots {}^{i_m}_{j_m]}$$

e cioè il tensore S è del tipo (2.8) e quindi il tensore (2.7) è plückeriano (8).

Concludendo si ha che

Condizione necessaria e sufficiente affinchè il tensore di torsione (2.7), *relativo ad una qualunque* $(m+1)$*-pla di vettori* $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$ $(\alpha = 1, 2, \dots, m+1)$ *linearmente indipendenti, sia plückeriano e la sua m-direzione appartenga alla* $(m+1)$*-direzione determinata dai suddetti* $m+1$ *vettori* $\underset{\alpha}{\xi}{}^i$, *è che il tensore* $S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ *sia del tipo* (2.8). E, poichè in tal caso si ha $S^{i_1 \dots i_{m-1} i_m}_{j_1 \dots j_{m-1} i_m t} \varphi_{i_m} = 0$, si può precisare che *la m-direzione del tensore* (2.7), *relativo ad una prefissata* $(m+1)$*-direzione, è quella comune a questa* $(m+1)$*-direzione e alla* $(n-1)$*-direzione del vettore covariante* $S^{p_1 \dots p_m}_{p_1 \dots p_m t}$ (9).

3. Su di una interpretazione del tensore di torsione di una c.t.c. m-pla.

Allo scopo di dare un'altra interpretazione alla torsione di una c.t.c. m-pla, analoga a quella data da E. Bompiani [2] alla torsione di una connessione affine, si consideri lo spazio T^m_x potenza tensoriale m-esima dello spazio vettoriale tangente T_x nel punto x della X_n.

Le equazioni

$$\bar{\xi}^{i_1 i_2 \dots i_m} = \xi^{j_1 j_2 \dots j_m} (\delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots \delta^{i_m}_{j_m} - \varepsilon^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m}), \tag{3.1}$$

ove $\varepsilon^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m}$ sono le componenti di un tensore in x, funzioni infinitesime dello stesso ordine dei differenziali dx^t ,rappresentano, per ogni sistema di differenziali dx^t, un autmorfismo di T^m_x in sè *prossimo all'automorfismo identico.*

---

(8) Osserviamo che, pur non avendo imposto esplicitamente che il tensore (2.7) sia plückeriano ciò consegue dalla (2.9) e dall'ipotesi che S sia alternante rispetto agli indici di controvarianza.

(9) Il tensore $S^{p_1 \dots p_m}_{p_1 \dots p_m t}$, poichè ricorda il vettore di Einstein S^p_{pt} di una connessione affine, lo chiameremo il *vettore di* Einstein della c.t.c. da cui è determinato.

Supponendo in particolare

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m} = E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\, \mathrm{d}x^t$$

le (3.1) diventano

$$\bar{\xi}^{i_1 \dots i_m} = \xi^{j_1 \dots j_m} (\delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_m}_{j_m} - E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\, \mathrm{d}x^t) \,. \tag{3.2}$$

Ovviamente le (3.2) rappresentano, per ogni sistema di differenziali $\mathrm{d}x^t$ e per ogni scelta del tensore $E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$, un automorfismo prossimo all'identità in cui i tensori uniti sono quelli per cui

$$E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\, \xi^{j_1 \dots j_m}\, \mathrm{d}x^t = 0 \,. \tag{3.3}$$

Ha senso imporre la condizione che, per ogni scelta del sistema di differenziali $\mathrm{d}x^t$, sia unito ogni tensore prodotto tensoriale di m vettori controvarianti $\underset{\alpha}{\xi}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) allorquando uno degli m vettori ha la stessa direzione definita da $\mathrm{d}x$ e sia inoltre unito ogni prodotto tensoriale di m vettori controvarianti allorquando due di essi hanno la stessa direzione. Ciò equivale ad imporre che il tensore $E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ sia alternante rispetto ad ogni coppia di indici di covarianza e quindi rispetto a tutti gli indici di covarianza. Perciò si ha che:

Assegnare in un punto x della X_n un tensore $E^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ alternante rispetto agli indici di covarianza equivale a fissare nello spazio T^m_x potenza tensoriale m-esima dello spazio vettoriale tangente in x alla X_n, e per ogni sistema di differenziali $\mathrm{d}x^t$, un automorfismo prossimo all'identità in cui sia unito ogni prodotto tensoriale

$$\underset{1}{\xi} \otimes \underset{2}{\xi} \otimes \dots \otimes \underset{m}{\xi} \,, \tag{3.4}$$

per cui uno dei vettori $\underset{\alpha}{\xi}$ ha la direzione di $\mathrm{d}x$ ed inoltre sia unito ogni tensore (3.4) se due dei vettori $\underset{\alpha}{\xi}$ hanno la stessa direzione.

4. - Sul trasporto per equipollenza di una c.t.c. m-pla.

Allo scopo di dare una costruzione del trasporto infinitesimo per equipollenza definito da una c.t.c. m-pla mediante il trasporto subordinato da una c.t.c. a torsione nulla, si consideri l'automorfismo di equazione

$$\bar{\xi}^{i_1 \dots i_m} = \xi^{j_1 \dots j_m} (\delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots \delta^{i_m}_{j_m} - S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}\, \mathrm{d}x^t) \tag{4.1}$$

determinato dal tensore di torsione $S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$ della c.t.c. m-pla L e da un assegnato sistema di differenziali dx^t. Osservato che tra la connessione L, la sua torsione e la sua c.t.c. associata A sussiste la relazione (2.3), è facile dimostrare, seguendo E. BOMPIANI [2], che

Il tensore applicato in $x + dx$ ed equipollente secondo la c.t.c. m-pla L al tensore controvariante ξ applicato in x è anche equipollente secondo la c.t.c. m-pla associata A al tensore $\bar{\xi}$ applicato in x e corrispondente di ξ nell'automorfismo prossimo all'identità (4.1).

5. - Su alcune proprietà del tensore di torsione di una c.t.c. m-pla L.

Recentemente [5] ho introdotto alcune c.t.c. m-ple intrinsecamente definite da una assegnata c.t.c. m-pla L. Una di esse è quella di parametri

$$N^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - \Omega^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} \tag{5.1}$$

in cui [5]

$$\Omega^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{(i_1 \dots i_m)}_{j_1 \dots j_m t} + L^{i_1 \dots i_m}_{(j_1 \dots j_m) t} + L^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m t} + L^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m] t} -$$
$$- 2\, L^{(i_1 \dots i_m)}_{(j_1 \dots j_m) t} - 2\, L^{[i_1 \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_m] t} - L^{(i_1 \dots i_m)}_{[j_1 \dots j_m] t} - L^{[i_1 \dots i_m]}_{(j_1 \dots j_m) t}$$

Le altre sono quelle di parametri

$$L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_w t} = L\left({}^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_m}\right)_t \tag{5.2}$$

e

$$M^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - L\left[{}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m}\right]_t \tag{5.3}$$

ove si è posto

$$L\left({}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m}\right)_t = \frac{1}{m!} \sum_{r_1, \dots r_w}^{1 \dots m} L^{i_{r_1} i_{r_2} \dots i_{r_m}}_{j_{r_1} j_{r_2} \dots j_{r_m} t}$$

e

$$L\left[{}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m}\right]_t = \frac{1}{m!} \sum_{r_1, \dots, r_m}^{1 \dots m} (-1)^r L^{i_{r_1} i_{r_2} \dots i_{r_m}}_{j_{r_1} j_{r_2} \dots j_{r_m} t}$$

r essendo il numero delle inversioni della permutazione $r_1, r_2, \dots, r_m$ rispetto alla permutazione fondamentale $1, 2, \dots, m$ e le sommatorie essendo estese a tutte le permutazioni $r_1, r_2, \dots, r_m$ di $1, 2, \dots, m$.

Poichè si ha

$$\Omega^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m t]} = S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - S^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m t}$$

il tensore di torsione della c.t.c. (5.1) N ha per componenti

$$N^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m t]} = L^{[i_1 \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_m t]} = S^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m t}.$$

Inoltre, tenendo conto della relazione ([**5**], p. 437)

$$L({}^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m]})_t = L^{[i_1 \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_m]t} = L({}^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m})_t$$

si ha, per il tensore di torsione S' della c.t.c. L' (5.2), l'espressione

$$\begin{aligned} S'^{\,i_1 \dots i_m}_{\,j_1 \dots j_m t} &= \frac{1}{m+1}\left\{ L({}^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m]})_t - \sum_{s=1}^{s=m} L({}^{i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_m}_{[j_1 \dots j_{s-1} t j_{s+1} \dots j_m]})_{j_s} \right\} = \\ &= \frac{1}{m+1}\left\{ L({}^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m})_t - \sum_{s=1}^{s=m} L({}^{[i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_m]}_{j_1 \dots j_{s-1} t j_{s+1} \dots j_m})_{j_s} \right\} = \\ &= \frac{1}{m+1}\left\{ L^{[i_1 \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_m]t} - \sum_{s=1}^{s=m} L^{[i_1 \dots i_{s-1} i_s i_{s+1} \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_{s-1} t j_{s+1} \dots j_m] j_s} \right\} = \\ &= L^{[i_1 \dots i_m]}_{[j_1 \dots j_m t]} = S^{[i_1 \dots i_m]}_{j_1 \dots j_m t}. \end{aligned}$$

Si può quindi concludere che:

I tensori di torsione delle due connessioni N (5.1) *ed* L' (5.2), *determinate da una c.t.c. m-pla L, coincidono tra loro e col tensore ottenuto alternando rispetto agli indici di controvarianza il tensore di torsione della L.*

Procedendo in modo analogo e tenendo conto della relazione ([**5**], p. 437)

$$L[{}^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m]}]_t = L[{}^{(i_1 \dots i_m)}_{j_1 \dots j_m}]_t = L^{(i_1 \dots i_m)}_{[j_1 \dots j_m]t}$$

si prova che il tensore di torsione della connessione M (5.3) ha per componenti le espressioni

$$M^{i_1 \dots i_m}_{[j_1 \dots j_m t]} = S^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - S^{(i_1 \dots i_m)}_{j_1 \dots j_m t}.$$

Da quanto precede segue immediatamente che *le due c.t.c.* N (5.1) *ed* L' (5.2) *hanno lo stesso tensore di torsione* S *della c.t.c.* L [10] *se, e solo se, quest'ultimo*

---

[10] È facile provare che ciò accade, ad esempio, nel caso delle c.t.c. m-ple semisimmetriche.

tensore S è alternante rispetto agli indici di controvarianza. Analogamente si ha che *il tensore di torsione della c.t.c. M* (5.3) *è nullo se, e solo se, il tensore di torsione della L è simmetrico rispetto agli indici di controvarianza.*

Osserviamo infine che *ognuna delle connessioni M, N ed L'*, poichè soddisfa alla (2.5), *è tale che i differenziali tensoriali di un generico tensore covariante simmetrico* (oltre che di un generico tensore controvariante (11) simmetrico), *rispetto ad essa stessa, alla sua connessione associata* (2.3) *e alla sua c.t.c. coniugata* (2.4), *sono tra loro coincidenti.*

6. - Trasporto di classi di tensori equivalenti e trasformazioni della c.t.c. conservanti quel trasporto.

Diremo che due campi di tensori controvarianti m-pli, $\bar{\xi}^{i_1 \cdots i_m}(x)$ e $\xi^{i_1 \cdots i_m}(x)$ sono *equivalenti* se fra di essi intercede la relazione di equivalenza (12)

$$\bar{\xi}^{i_1 \cdots i_m}(x) = \varrho(x)\, \xi^{i_1 \cdots i_m}(x), \tag{6.1}$$

$\varrho(x)$ essendo un'arbitraria funzione (scalare) del punto $x(x^i)$. L'insieme di tutti i campi equivalenti a $\xi^{i_1 \cdots i_m}(x)$, che indicheremo col simbolo $\{\xi^{i_1 \cdots i_m}(x)\}$, lo chiameremo una *classe di equivalenza* rispetto alla suddetta relazione.

Ciò premesso, ricordiamo che la condizione

$$D\xi^{i_1 \cdots i_m} = \mathrm{d}\xi^{i_1 \cdots i_m} + L^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_m t}\, \mathrm{d}x^t = 0 \tag{6.2}$$

definisce il trasporto per equipollenza, rispetto alla c.t.c. m-pla $L^{i_1 \cdots i_m}_{j_1 \cdots j_m t}$, del campo di tensori controvarianti m-pli $\xi^{i_1 \cdots i_m}(x)$.

Poichè dalla (6.1) si ha

$$D\bar{\xi}^{i_1 \cdots i_m} = \xi^{i_1 \cdots i_m}\, \mathrm{d}\varrho + \varrho D\xi^{i_1 \cdots i_m}, \tag{6.3}$$

segue che *la differenziazione tensoriale non conserva la nozione di classe di equivalenza, nozione che invece, com'è facile provare, si conserva nel trasporto per equipollenza* (13), per cui sarà lecito parlare di *trasporto delle classi di equivalenza o*

(11) Cfr. pag. 4 della presente Nota.

(12) È facile provare che si tratta di una effettiva relazione di equivalenza, cioè che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

(13) Nel senso che tensori tra loro equivalenti si trasportano per equipollenza in tensori ancora equivalenti.

trasporto per parallelismo dei tensori per distinguerlo dal trasporto per equipollenza.

Osservato che, per le (6.3), le (6.2) non sono invarianti rispetto alle (6.1), allo scopo di determinare delle relazioni invarianti rispetto alle (6.1) si noti che dalle (6.2), (6.1) si ottiene

$$D\bar{\xi}^{i_1 \dots i_m} = \tau \bar{\xi}^{i_1 \dots i_m}, \quad \left(\text{con } \tau = \frac{d\varrho}{\varrho}\right)$$

e da questa seguono le relazioni

$$\bar{\xi}^{i_1 \dots i_m} D\bar{\xi}^{j_1 \dots j_m} - D\bar{\xi}^{j_1 \dots j_m} \bar{\xi}^{i_1 \dots i_m} = 0,$$

ovviamente invarianti rispetto alle (6.1) e perciò atte a rappresentare in modo intrinseco il trasporto delle classi di equivalenza.

Inoltre, se il campo di tensori (6.1) è definito nei punti di una porzione di curva regolare $x^i = x^i(u)$ [14], per cui in ogni punto di essa risulta determinata una classe di tensori equivalenti, si ha che

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la classe di equivalenza $\{\xi\}$ *si trasporti per equipollenza lungo la suddetta porzione di curva regolare è che in ogni suo punto sia soddisfatta la relazione*

$$\xi^{i_1 \dots i_m} D\xi^{j_1 \dots j_m} - \xi^{j_1 \dots j_m} D\xi^{i_1 \dots i_m} = 0\,. \tag{6.4}$$

Se perciò si indica con $\bar{D}$ il simbolo di differenziazione tensoriale rispetto ad un'altra generica c.t.c. m-pla $\bar{L}$, determinante, come la L, il medesimo trasporto per equipollenza delle classi lungo la stessa curva $x^i = x^i(u)$, deve necessariamente aversi

$$\xi^{i_1 \dots i_m} \bar{D}\xi^{j_1 \dots j_m} - \xi^{j_1 \dots j_m} \bar{D}\xi^{i_1 \dots i_m} = 0\,.$$

Sottraendo membro a membro le ultime due relazioni e posto

$$\bar{L}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = R^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$$

si ottengono le identità

$$(\xi^{i_1 \dots i_m} R^{j_1 \dots j_m}_{h_1 \dots h_m t}\, \xi^{h_1 \dots h_m} - \xi^{j_1 \dots j_m} R^{i_1 \dots i_m}_{h_1 \dots h_m t}\, \xi^{h_1 \dots h_m})\, dx^t = 0\,,$$

---

[14] Essendo perciò ϱ un'arbitraria funzione del punto della curva.

dalle quali si ha

$$\delta^{i_1}_{p_1} \dots \delta^{i_m}_{p_m} \dots R^{j_1 \dots j_m}_{h_1 \dots h_m t} - \delta^{j_1}_{p_1} \dots \delta^{j_m}_{p_m} R^{i_1 \dots i_m}_{h_1 \dots h_m t} +$$

$$+ \delta^{i_1}_{h_1} \dots \delta^{i_m}_{h_m} R^{j_1 \dots j_m}_{p_1 \dots p_m t} - \delta^{j_1}_{h_1} \dots \delta^{j_m}_{h_m} R^{i_1 \dots i_m}_{p_1 \dots p_m t} = 0,$$

da cui ancora, contraendo rispetto alle coppie di indici $i_1\, p_1$, $i_2\, p_2$, ..., $i_m\, p_m$, si ricava

$$n^m R^{j_1 \dots j_m}_{h_1 \dots h_m t} = R^{p_1 \dots p_m}_{p_1 \dots p_m t}\, \delta^{j_1}_{h_1} \dots \delta^{j_m}_{h_m}$$

e quindi

$$\overline{L}^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} + \delta^{i_1}_{j_1} \dots \delta^{i_m}_{j_m} \varphi_t, \tag{6.5}$$

ove si è posto

$$\varphi_t = \frac{1}{n^m} R^{p_1 \dots p_m}_{p_1 \dots p_m t}\,. \tag{6.6}$$

Poichè viceversa si può provare che *ogni c.t.c. m-pla del tipo* (6.5), *con* φ_t *arbitrario vettore covariante, definisce una legge di trasporto per le classi* $\{\xi^{i_1 \dots i_m}\}$ *coincidente con quella definita dalla connessione* $L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t}$, *concludiamo che le* (6.5) *sono tutte e sole le c.t.c. m-ple che godono di questa proprietà.*

Osserviamo infine che, assegnato un generico sistema di differenziali dx^t, due c.t.c. m-ple L ed $\overline{L}$ legate dalla relazione (6.5) determinano il medesimo trasporto, dal punto x al punto $x + dx$, delle classi di tensori equivalenti, ma non lo stesso trasporto per equipollenza dei tensori; *esistono però particolari sistemi di differenziali per cui esse determinano anche lo stesso trasporto per equipollenza di un qualsiasi tensore e precisamente sono tali tutti e soli quei sistemi* dx^t *le cui direzioni appartengono alla* $(n-1)$*-direzione associata al vettore* φ_t (6.6).

Ciò che si è detto per i campi di tensori m-pli controvarianti vale ovviamente anche per quelli m-pli covarianti.

In relazione alle trasformazioni (6.5) sussistono le seguenti proprietà:

a) *Tra le trasformate* (6.5) *di una c.t.c. m-pla L, cioè fra le c.t.c. che determinano lo stesso trasporto delle classi della L, ne esiste una ed una sola, di parametri*

$$L^{*\,i_1 \dots i_m}_{\;j_1 \dots j_m t} = L^{i_1 \dots i_m}_{j_1 \dots j_m t} - \frac{(m+1)!}{(n-1)(n-2)\dots(n-m)} S^{p_1 \dots p_m}_{p_1 \dots p_m [t}\, \delta^{i_1}_{j_1} \delta^{i_2}_{j_2} \dots \delta^{i_m}_{j_m]}\,,$$

caratterizzata dall'annullarsi del relativo vettore di EINSTEIN. *Detta connessione è*, come si prova facilmente, *invariante rispetto alle trasformazioni* (6.5).

b) *Le c.t.c. m-ple trasformate mediante le* (6.5) *di una c.t.c. m-pla a torsione nulla sono tutte semi-simmetriche, cioè del tipo* (2.8).

c) *Viceversa le c.t.c. m-ple trasformate mediante le* (6.5) *di una c.t.c. m-pla semi-simmetrica sono tutte semi-simmetriche eccezion fatta per una sola di esse che è a torsione nulla.*

Bibliografia.

[1] E. BOMPIANI, *Le connessioni tensoriali*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **1**, (1946).

[2] E. BOMPIANI, *Significato del tensore di torsione di una connessione affine*, Boll. Un. Mat. Ital. (5) **4**, (1951).

[3] A. COSSU, *Alcune osservazioni sulle connessioni tensoriali*, Rend. Mat. e Appl. (5) **13**, (1955).

[4] P. MASTROGIACOMO, *Sulle connessioni tensoriali per tensori controvarianti e covarianti m-pli*, Giorn. Mat. Battaglini (5) **5**, (1957).

[5] P. MASTROGIACOMO, *Enti geometrici associati ad una connessione tensoriale per tensori controvarianti e covarianti m-pli*, Rend. Mat. e Appl. (5) **18**, (1959) 426-449.