Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 263-266

CARLO SILLI (*)

Una osservazione sulla più generale forma del tensore quadruplo isotropo. (**)

In una sua Nota il Prof. RACAH [1] (1) determina il numero dei paramatri indipendenti da cui dipendono i tensori isotropi ed emisotropi di ordine n di un S_3 euclideo [2] risolvendo, in questo modo, il problema che si era presentato, tanto al prof. CISOTTI [3], quando alla Prof.ssa PASTORI [4], quando essi avevano dato: il primo le espressioni generali dei tensori isotropi ed emisotropi di ordine 2, 3, 4, 5, facendoli dipendere, rispettivamente, da 1, 1, 3, 10 parametri non necessariamente indipendenti; la seconda l'espressione generale di un tensore isotropo di ordine $2K$, facendolo dipendenre da $(2K-1)!!$ parametri, anche questi, non necessariamente indipendenti.

Il risultato del RACAH, era già stato ottenuto, in un caso particolare, dal Prof. CALDONAZZO [5] che aveva mostrato che i tensori emisotropi di ordine 5 dipendono solo da 6 parametri indipendenti.

Rileggendo la dimostrazione del teorema del CISOTTI [6], relativo ai tensori quadrupli isotropi, ci è parso opportuno fare qualche osservazione.

È ben noto [7] che il tensore $A\delta_{ik}$, con A scalare e δ_{ik} tensore fondamentale [8], è il più generale tensore isotropo del secondo ordine; che il tensore quadruplo:

$$T_{ikjh} = A\delta_{ik}\,\delta_{jh} + B\delta_{ij}\,\delta_{kh} + C\delta_{ih}\,\delta_{kj} \tag{1}$$

(con A, B e C scalari) è un tensore isotropo [7].

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia e note poste al termine del lavoro.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze (Italia).

(**) Ricevuto il 7 novembre 1960.

Per dimostrare viceversa che, fissato un riferimento cartesiano ortogonale $(0, u_h)$, *ogni tensore quadruplo isotropo T ha necessariamente le componenti espresse dalla* (1), ci è parso più naturale procedere nel modo seguente.

Dalle prime proprietà del calcolo tensoriale risulta [6] che le uniche componenti non nulle del tensore quadruplo isotropo T sono quelle che contengono un numero pari di volte ciascuno degli indici. Queste componenti rientrano necessariamente in uno dei seguenti sette tipi:

$$
\begin{array}{lll}
 & T_{pppp} & \\
 & T_{ppp+1\,p+1}, & T_{ppp+2\,p+2}, \\
(2) & & \\
 & T_{pp+1\,pp+1}, & T_{pp+2\,pp+2}, \\
 & T_{pp+1\,p+1\,p}, & T_{pp+2\,p+2\,p}.
\end{array}
$$

Ragionando in modo analogo al CISOTTI [6], si ottiene:

$$
(3) \qquad
\begin{gathered}
T_{ppp+1\,p+1} = T_{ppp+2\,p+2} = a \\
T_{pp+1\,p\,p+1} = T_{pp+2\,p\,p+2} = b \\
T_{pp+1\,p+1\,p} = T_{pp+2\,p+2\,p} = c \\
T_{pppp} = d
\end{gathered}
$$

(con $p = 1, 2, 3$ e a, b, c, d scalari indipendenti da p).

Per il teorema del RACAH [1] i quattro scalari a, b, c, d devono risultare legati da una relazione.

Col cambiamento di assi definito da:

$$u_p \times \bar{u}_p = \cos\alpha; \quad u_{p+1} \times \bar{u}_{p+1} = \cos\alpha; \quad u_{p+2} \times \bar{u}_{p+2} = 1,$$

$\left(\text{con } 0 < \alpha < \pi \text{ e diverso da } \dfrac{\pi}{2}\right)$ che fornisce per i nove coseni direttori:

$$
(4) \qquad
\begin{gathered}
\alpha^p{}_p = \alpha^{p+1}{}_{p+1} = \cos\alpha; \quad \alpha^{p+1}{}_p = -\alpha^p{}_{p+1} = \operatorname{sen}\alpha \\
\alpha^{p+2}{}_{p+2} = 1; \quad \alpha^p{}_{p+2} = \alpha^{p+2}{}_p = \alpha^{p+1}{}_{p+2} = \alpha^{p+2}{}_{p+1} = 0,
\end{gathered}
$$

si ha:

$$\overline{T}_{pppp} = T_{j_1 j_2 j_3 j_4}\, \alpha^{j_1}{}_p\, \alpha^{j_2}{}_p\, \alpha^{j_3}{}_p\, \alpha^{j_4}{}_p\,,$$

e da questa, tenendo conto delle (4) e dell'isotropia:

$$T_{pppp} = \frac{1}{4}(T_{pppp} + T_{ppp+1\,p+1} + T_{pp+1\,pp+1} + T_{pp+1\,p+1\,p} +$$

$$+ T_{p+1\,ppp+1} + T_{p+1\,pp+1\,p} + T_{p+1\,p+1\,pp} + T_{p+1\,p+1\,p+1\,p+1})$$

e quindi la ricercata relazione:

$$d = a + b + c, \tag{5}$$

e con questa la necessità della (1).

Se, come è lecito, e come fa il CISOTTI [6], si ponesse:

$$T_{pp+1\,pp+1} = b; \quad T_{pp+1\,p+1\,p} = c; \quad T_{pppp} = a + b + c,$$

con a, b, c scalari qualsiansi, si dovrebbe dimostrare che è:

$$T_{ppp+1\,p+1} = a,$$

o, ciò che è lo stesso, con le notazioni introdotte con le (3):

$$d - b - c = a,$$

che è ancora la (5).

Di questo però sembra non esservi traccia nel lavoro del CISOTTI [6] che, almeno apparentemente, non considera componenti del tipo: $T_{ppp+1\,p+1}$ fra quelle « che non contengono un numero dispari di volte nessuno degli indici 1, 2, 3 ». ([6], pag. 1056).

Summary.

In this paper are shown some observations about Prof. CISOTTI's demonstration on the most general form of quadruple isotropic tensor.

Bibliografia e Note.

[1] G. Racah, *Determinazione del numero dei tensori isotropi indipendenti di rango n*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **17** (1933) 386-389.

[2] U. Cisotti, *Tensori isotropi e tensori emisotropi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. F's. Mat. Nat. (6) **11**. (1930) 917-920.

[3] U. Cisotti, *Tensori isotropi e tensori emisotropi*. Loc. cit. [2]; *Tensori quadrupli isotropi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **11**. (1930) 1055-1058; *Tensori quintupli emisotropi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12**. (1930) 195-199.

[4] M. Pastori, *Sui tensori isotropi: relazioni fra le componenti*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12**. (1930) 374-379; *Espressione generale dei tensori isotropi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **12**. (1930) 499-502.

[5] B. Caldonazzo, *Osservazione sui tensori quintupli emisotorpi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **15**. (1932) 840-843.

[6] U. Cisotti, *Tensori quadrupli isotropi*. Loc. Cit. [3].

[7] U. Cisotti, *Tensori isotropi*. Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (6) **11**. (1930) 727-731.

[8] B. Finzi - M. Pastori, *Calcolo Tensoriale e Applicazioni*. Zanichelli Editore (1949), 80-81.