Riv. Mat. Univ. Parma (2) 1 (1960), 249-262

F. R. MARSICANO (*)

Soluciones estacionarias del movimento de un disco no homogeneo que rueda sin resbalar sobre un plano horizontal. (**)

1. – Planteo del problema.

Sea, fig. 1:

$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{K}$: terna de referencia de dirección invariable, con $\boldsymbol{K}$ versor vertical ascendente.

O: centro del disco.

a: radio del disco.

$\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$: terna *fija al disco* con origen en el centro O y con $\boldsymbol{k}$ versor normal al plano del disco.

$\boldsymbol{i}_1$: eje nodal (paralelo a la tangente del disco en el punto de contacto H).

$\boldsymbol{j}_1$: versor del vector $\overline{H - 0}$.

ψ, φ, θ: ángulos de Euler.

m_0: masa del *disco homogeneo.*

μ: pequeña masa perturbadora situada sobre el eje $\boldsymbol{i}$ a una distancia δ del centro O.

$m = m_0 + \mu$: masa total.

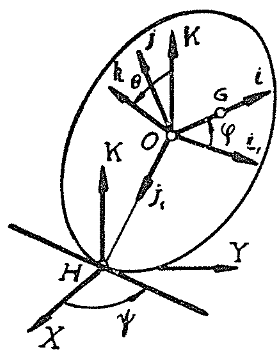

Fig. 1.

(*) Indirizzo: Riego Nuñez 747, Turdera F.C.R. (Argentina).

(**) Ricevuto il 25 aprile 1960

G: baricentro del *disco no homogéneo.*

$\varepsilon = \frac{\mu\delta}{m}$ distancia del centro O al baricentro G.

A; $B = A$; $C = 2A$: momentos principales de inercia del *disco homogéneo* con respecto a los ejes $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ que pasan por O.

A; $A + \mu\delta^2$; $C = 2A + \mu\delta^2$: momentos principales de inercia del disco *no homogéneo* con respecto a los ejes $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

A; $A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)$; $2A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)$: momentos principales de inercia del *disco no homogéneo* con respecto a los ejes paralelos a $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ que pasan por el baricentro.

$\boldsymbol{\Phi}$: reacción de vínculo del plano.

p; q; r: componentes, según $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, del invariante vectorial rotación $\boldsymbol{\Omega}$ del disco.

$\boldsymbol{K}_G = Ap\boldsymbol{i} + [A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)]\,q\boldsymbol{j} + [2A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)]\,r\boldsymbol{k}$: momento de la cantidad de movimiento con respecto al baricentro.

g: acel.ración de la gravedad.

Las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir de las dos primeras universales de la dinámica:

$$-mg\,\boldsymbol{K} + \boldsymbol{\Phi} = m\,\ddot{G}, \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\Phi} \wedge \overline{G - H} = \dot{\boldsymbol{K}}_G, \tag{2}$$

de donde eliminando la reación de vínculo $\boldsymbol{\Phi}$ se llega a la ecuación vectorial pura del movimiento:

$$m\overline{H - G} \wedge (\ddot{\boldsymbol{G}} + g\boldsymbol{K}) = \dot{\boldsymbol{K}}_G, \tag{3}$$

a la cual hay que agregarle la condición de vínculo anholónomo:

$$\dot{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \overline{G - H}\,, \tag{3'}$$

Veamos ahora el cálculo de cada uno de los vectores que intervienen en (3): La derivada absoluta con respecto al tiempo del vector $\boldsymbol{K}_G$ es inmediata:

$$\dot{\boldsymbol{K}}_G = A\,\dot{p}\,\boldsymbol{i} + [A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)]\,\dot{q}\,\boldsymbol{j} + [2A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)]\,\dot{r}\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{K}_G\,. \tag{4}$$

Por atra parte, de la fig.:

$$\overline{H - G} = a\,\boldsymbol{j}_1 - \varepsilon \boldsymbol{i} = -a\,(\operatorname{sen}\varphi\,\boldsymbol{i} + \cos\varphi\,\boldsymbol{j}) - \varepsilon\,\boldsymbol{i} = -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\,\boldsymbol{i} - a\cos\varphi\,\boldsymbol{j}\,, \tag{5}$$

y además:

$$\overline{H - G} \wedge \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \ddot{G}_1 & \ddot{G}_2 & \ddot{G}_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a\cos\varphi\,\ddot{G}_3, \tag{6}$$

$$\overline{H - G} \wedge \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \ddot{G}_1 & \ddot{G}_2 & \ddot{G}_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\,\ddot{G}_3, \tag{7}$$

$$\overline{H - G} \wedge \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \ddot{G}_1 & \ddot{G}_2 & \ddot{G}_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\,\ddot{G}_2 + a\cos\varphi\,\ddot{G}_1, \tag{8}$$

$$\overline{H - G} \wedge \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{i} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -a\cos\varphi\cos\theta, \tag{9}$$

$$\overline{H - G} \wedge \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{j} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \cos\theta\,(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon), \tag{10}$$

$$\overline{H - G} \wedge \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} -(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) & -a\cos\varphi & 0 \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\theta\cos\varphi & \cos\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon) + a\cos\varphi\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi. \tag{11}$$

En las tres últimas formulas (9), (10), (11) se ha tenido en cuenta la expresión del versor $\boldsymbol{K}$ según la terna relativa $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{K} = \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi\, \boldsymbol{i} + \operatorname{sen}\theta \cos\varphi\, \boldsymbol{j} + \cos\theta\, \boldsymbol{k} . \tag{12}$$

Per otra parte se tiene:

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{K}_G = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ K_{G_1} & K_{G_2} & K_{G_3} \end{vmatrix} = (qK_{G_3} - rK_{G_2})\, \boldsymbol{i} + \tag{13}$$

$$+ (rK_{G_1} - pK_{G_3})\, \boldsymbol{j} + (pK_{G_2} - qK_{G_1})\, \boldsymbol{k} ,$$

de manera que si multiplicamos escalarmente la ecuación (3) respectivamente por los versores $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ y tenemos en cuenta las fómulas (4), (6), (7), (8), (9), (10), (11), (13) se obtienen las tres ecuaciones escalares diferenciales del segundo orden del movimiento:

$$A\dot{p} + qr\,[2A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon) - A - m\varepsilon(\delta - \varepsilon)] = - ma \cos\varphi\, (\ddot{G}_3 + g \cos\theta), \tag{14}$$

$$[A + m\varepsilon(\delta - \varepsilon)]\, \dot{q} + \tag{15}$$

$$+ pr\,[A - 2A - m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)] = m\,[(a \operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)]\,[\ddot{G}_3 + g\cos\theta] ,$$

$$[2A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)]\, \dot{r} + pq\,[A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon) - A] = \tag{16}$$

$$= m\cos\varphi\, (\ddot{G}_1\, a + ga \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta) - m\,(a\operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\,(\ddot{G}_2 + g \operatorname{sen}\theta \cos\varphi) ,$$

que simplificadas quedan:

$$A\dot{p} + qrA = - ma\cos\varphi\, (\ddot{G}_3 + g \operatorname{vos}\theta), \tag{14'}$$

$$[A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)]\, \dot{q} - pr\,[A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)] = \tag{15'}$$

$$= m\,(a \operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\,(\ddot{G}_3 + g\cos\theta),$$

$$[2A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)]\, \dot{r} + pq\,[m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)] = \tag{16'}$$

$$= m\cos\varphi\, (a\ddot{G}_1 - \varepsilon g \operatorname{sen}\theta) - m\,(a \operatorname{sen}\varphi + \varepsilon)\, \ddot{G}_2 .$$

Con la introducción de nuevas variables p_1 y q_1 dadas por:

$$p_1 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{i}_1 = p \cos\varphi - q \operatorname{sen}\varphi = \dot{\theta} \,,$$

(17)

$$q_1 = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{j}_1 = -(p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi) = -\dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \,,$$

y sus derivadas combinadas:

$$\dot{p} \cos\varphi - \dot{q} \operatorname{sen}\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p \cos\dot{\varphi} - q \operatorname{sen}\varphi) + \\ + (p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi)\,\varphi = \dot{p}_1 - \dot{\varphi}\, q_1 \,,$$

(18) $$\dot{p} \operatorname{sen}\varphi + \dot{q} \cos\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(p \operatorname{sen}\varphi + q \cos\varphi) - \\ - (p \cos\varphi - q \operatorname{sen}\varphi)\,\dot{\varphi} = -\dot{q}_1 - p_1 \dot{\varphi},$$

$$\dot{\varphi} = r - \dot{\psi} \cos\theta = r + q_1 \operatorname{ctg}\theta \,,$$

se pueden simplificar las (14′) y (15′) como indica el Dr. AGOSTINELLI; multiplicando la primera por $\cos\varphi$; la seguanda por $\operatorname{sen}\varphi$ y restando y luego multiplicando la primera por $\operatorname{sen}\varphi$, la segunda por $\cos\varphi$ y sumando, con lo que se obtiene:

(19) $$A\,(\dot{p} + qr)\cos\varphi - [A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)]\,(\dot{q} \operatorname{sen}\varphi - pr \operatorname{sen}\varphi) = \\ = -ma\ddot{G}_3 - \ddot{G}_3\, m\varepsilon \operatorname{sen}\varphi - mga \cos\theta - mg\,\varepsilon \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \,,$$

(20) $$A\,(\dot{p} + qr) \operatorname{sen}\varphi + [A + m\varepsilon\,(\delta - \varepsilon)]\,(\dot{q} - pr)\cos\varphi = \\ = m\varepsilon \cos\varphi \ddot{G}_3 + mg \cos\theta\, \varepsilon \cos\varphi \,.$$

Hay que efectuar ahora el cálculo de: $\ddot{G}_1 = \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{i}$; $\ddot{G}_2 = \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{j}$; $\ddot{G}_3 = \ddot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{k}$:

(21) $$\ddot{G}_1 = \ddot{G} \times \boldsymbol{i} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{i}) - \dot{\boldsymbol{G}} \times \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{i},$$

pero dado que $\dot{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \overline{G - H}$ (fórmula 3′);

la (21) queda:

$$(22)\qquad \ddot{G}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \Omega \wedge \overline{G-H} \times \Omega \wedge \boldsymbol{i} =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \cos\varphi) - r^2(\varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi) + aqp_1 - q^2\varepsilon .$$

En la fórmula (22) se han tenido en cuenta las transformaciones (18). Asimismo se calculan $\ddot{G}_2$; $\ddot{G}_3$:

$$(23)\qquad \ddot{G}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r \operatorname{sen}\varphi) - r^2 a \cos\varphi - pp_1 a + qp\varepsilon + \varepsilon \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},$$

$$(24)\qquad \ddot{G}_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ \varepsilon + a \operatorname{sen}\varphi & a\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a(\dot{p}_1 - q_1 r) - \varepsilon(\dot{q} - pr) .$$

Con los cálculos (22), (23), (24), las ecuaciones del movimiento (19) (20) y (16′) toman la forma siguiente:

$$(25)\quad A\,[\dot{p}_1 - q_1\,(2r + q_1 \operatorname{ctg}\theta)] + mga\cos\theta + ma^2\,(\dot{p}_1 - q_1 r) =$$

$$= \varepsilon m \{ (\delta - \varepsilon)\,(\dot{q}\operatorname{sen}\varphi - pr\operatorname{sen}\varphi) - g\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + a\,(\dot{q} - pr) -$$

$$- a\operatorname{sen}\varphi\,(\dot{p}_1 - q_1 r) + \varepsilon\operatorname{sen}\varphi\,(\dot{q} - pr) \},$$

$$(26)\quad -A\,[\dot{q}_1 + p_1\,(2r + q_1\operatorname{ctg}\theta)] = m\varepsilon \{ g\cos\theta\cos\varphi - (\delta - \varepsilon)\,(\dot{q} - pr)\cos\varphi +$$

$$+ a\cos\varphi\,(\dot{p}_1 - q_1 r) - \varepsilon\cos\varphi\,(\dot{q} - pr) \},$$

$$(27)\quad 2A\dot{r} + ma^2\cos\varphi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\operatorname{sen}\varphi) + m\,a^2\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\operatorname{sen}\varphi) - m\,a^2\cos\varphi\,p_1\,q -$$

$$- m\,a^2\,pp_1\operatorname{sen}\varphi = m\varepsilon \{ -(\delta - \varepsilon)\,(\dot{r} + pq) - aq^2\cos\varphi - g\operatorname{sen}\theta\cos\varphi -$$

$$- a\operatorname{sen}\varphi\,\dot{r} - a\operatorname{sen}\varphi\,pq - a\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\operatorname{sen}\varphi) + a\,pp_1 - gp\varepsilon - \varepsilon\dot{r} \}.$$

Estas ecuaciones son más exactas que las del Dr. AGOSTINELLI, en el sentido que no se desprecia en ellas el cuadrado de ε.

Si el disco es homogèneo, volvemos a encontrar sustancialmente la ecuaciones de APPELL:

$$(28)\qquad A\,[\dot{p}_1 - q_1\,(2r + q_1\operatorname{ctg}\theta)] + m_0\,ga\cos\theta + m_0\,a^2(\dot{p}_1 - q_1 r) = 0,$$

$$(29)\qquad \dot{q}_1 + p_1\,(2r + q_1\operatorname{ctg}\theta) = 0,$$

$$(30)\qquad 2A\dot{r} + m_0\,a^2\,p_1\,q_1 + m_0\,a^2\,\dot{r} = 0\,.$$

Si despreciamos el cuadrado de ε y tenemos en cuenta que $C = 2A = 2B$; de las (25), (26), (27) se obtiene:

$$(31)\quad (A + ma^2)\,\dot{p}_1 - (C + ma^2)\,rq_1 - Aq_1^2\operatorname{cgt}\theta + mga\cos\theta =$$

$$= m\varepsilon \{ \delta\operatorname{sen}\varphi\,(\dot{q} - pr) - g\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + a\,(\dot{q} - pr) - a\operatorname{sen}\varphi\,(\dot{p}_1 - q_1 r) \},$$

$$(32)\quad A\dot{q}_1 + (Cr + Aq_1 \operatorname{ctg}\theta)\, p_1 =$$

$$= -\, m\varepsilon \left\{ g \cos\theta \cos\varphi - \delta\,(\dot{q} - pr)\cos\varphi + a\cos\varphi\,(\dot{p}_1 - q_1 r\right\},$$

$$(33)\quad (C + ma^2)\,\dot{r} + ma^2\, p_1 q_1 = -\, m\varepsilon \{ \delta(\dot{r} + pq) - aqq_1 +$$

$$+ g \operatorname{sen}\theta \cos\varphi + a\dot{r} + a\dot{r}\operatorname{sen}\varphi + ar^2\cos\varphi + arq_1\cos\varphi \operatorname{ctg}\theta - app_1 \}.$$

2. – Rotacion con el baricentro en la parte superior.

Una solución estacionaria del sistema *no perturbado* (28), (29), (30) consiste en una rotación a lo largo de un eje vertical tal que se tiene inmediatamente:

$$(34)\quad \begin{aligned} &\theta_0 = \pi/2,\ \ \dot{\psi} = \dot{\psi}_0 = \text{const.},\ \ \varphi_0 = \pi/2,\ \ \operatorname{sen}\theta_0 = 1,\ \ \cos\theta_0 = 0,\\ &\operatorname{sen}\varphi_0 = 1,\ \ \cos\varphi_0 = 0,\ \ \dot{\theta}_0 = 0,\ \ \dot{\varphi}_0 = 0,\ \ q_{10} = -\,\dot{\psi}_0,\ \ r_0 = 0,\ \ p_{10} = 0. \end{aligned}$$

Perturbando esta solución en base a la *no homogeneidad* y eliminando infinitèsimos de orden superior al primero en ε, se tiene:

$$p_1 = p_{10} + \xi = \xi,\quad q_1 = q_{10} + \eta = -\,\dot{\psi}_0 + \eta,\quad r = r_0 + \zeta = \zeta,$$

$$(35)\quad \begin{aligned} &\theta = \pi/2 + \tau,\quad \varphi = \pi/2 + \sigma,\quad \operatorname{sen}\theta = \cos\tau \cong 1,\quad \cos\theta \cong -\tau,\\ &\cos\varphi \cong -\sigma,\quad \operatorname{sen}\varphi \cong 1,\quad \operatorname{ctg}\theta \cong -\tau, \end{aligned}$$

$$p = p_1\cos\varphi - q_1\operatorname{sen}\varphi \cong \dot{\psi}_0 - \eta,\quad q = -\,p_1\operatorname{sen}\varphi - q_1\cos\varphi \cong -\,\xi + \sigma\dot{\psi}_0\,.$$

La introducción de estas variables en (31), (32), (33), conducen al siguiente sistema de ecuaciones a las variaciones del primer orden del movimiento perturbado:

$$(36)\quad (A + ma^2)\,\dot{\xi} + (C + ma^2)\,\zeta\dot{\psi}_0 + A\tau\dot{\psi}_0^2 - mga\tau =$$

$$= m\varepsilon\{ \delta(-\,\dot{\xi} + \dot{\sigma}\,\dot{\psi}_0) + a(-\,\dot{\xi} + \dot{\sigma}\,\dot{\psi}_0) - a\dot{\xi} \},$$

$$(37)\qquad A\dot{\eta} = 0,$$

$$(38)\qquad (C + ma^2)\,\dot{\zeta} - ma^2\,\xi\dot{\psi}_0 = -\,m\varepsilon\{ \delta\dot{\zeta} + 2a\dot{\zeta} \}.$$

De la (37), suponiendo que las condiciones iniciales sean $\eta_0 = 0$; sale $\eta = 0$ (39).

De las (17) y (18) se obtienen las siguientes relaciones entre las perturba ciones ξ; $\dot{\tau}$; ζ; $\dot{\sigma}$:

$$\xi = \dot{\tau} \qquad \dot{\sigma} = \zeta + \tau \dot{\psi}_0 . \tag{40}$$

Por otra parte, derivando con respecto al tiempo la (38), se obtiene:

$$\dot{\xi} = \ddot{\zeta} \frac{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon}{ma^2 \dot{\psi}_0}, \tag{41}$$

mientras que de la misma (38) y de la primera de las (40) sale:

$$\dot{\tau} = \dot{\zeta} \frac{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon}{ma^2 \dot{\psi}_0}, \tag{42}$$

que integrada, suponiendo $\tau_0 = \zeta_0 = 0$ permite calcular:

$$\tau = \zeta \frac{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon}{ma^2 \dot{\psi}_0} . \tag{43}$$

La introducción de las (40), (41), y (43) en (36) nos permite hallar una ecuación resolvente en la única variable ζ:

$$\begin{aligned} &\ddot{\zeta} \frac{(C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2m\varepsilon a)\,(A + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2ma\varepsilon)}{ma^2 \dot{\psi}_0} + \\ &+ \zeta \left[(C + ma^2)\, \dot{\psi}_0 + \frac{(C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon)\,(A\ \dot{\psi}_0^2 - mga)}{ma^2 \dot{\psi}_0} - \right. \\ &\left. - \dot{\psi}_0\, (m\varepsilon\delta + m\varepsilon a) \left(1 + \frac{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon}{ma^2} \right) \right] = 0 . \end{aligned} \tag{44}$$

La (44) es una ecuación diferencial lineal del segundo orden del tipo:

$$D_1 \ddot{\zeta} + D_2 \zeta = 0 . \tag{45}$$

Dado que D_1, es siempre positivo, para que haya estabilidad, esdecir para que las raíces de la ecuación característica sean imaginarias puras, es sufi ciente con que $D_2 > 0$ o sea:

$$(46) \qquad (C + ma^2)\,\dot{\psi}_0 + \frac{(C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon)}{ma^2\,\dot{\psi}_0}(A\,\dot{\psi}_0 - mga) >$$

$$> m\varepsilon\,(\delta + a)\,\dot{\psi}_0 \left[1 + \frac{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon}{ma^2}\right].$$

Que con la eliminación de los tèrminos que contiene ε^2 conduce a la siguiente desigualdad:

$$(47) \qquad \dot{\psi}_0^2 > \frac{g/a\,(C + ma^2 + m\varepsilon\delta + 2am\varepsilon)}{C + ma^2 + \frac{AC}{ma^2} + A + \frac{A\varepsilon\delta}{a^2} + \frac{2A\varepsilon}{a} - \frac{C\varepsilon\delta}{a^2} - \frac{C\varepsilon}{a} - 2m\varepsilon\delta - 2m\varepsilon a}.$$

Si el disco es homogèneo y se recuerda que $A = B = \frac{m_0\,a^2}{4}$, $C = \frac{m_0\,a^2}{2}$ se obtiene:

$$(48) \qquad \dot{\psi}_0^2 > \frac{4}{5}\,g/a\,.$$

Es interesante señalar que las condiciones (47)- (48) son mucho menos restrictivas qua las que se obtienen para un disco que se apoya sobre un plano perfectamente liso, en este último caso, se llega para el disco homogèneo, a la siguiente desigualdad: (*)

$$(49) \qquad \dot{\psi}_0^2 > 4g/a\,.$$

Que comparada con la (48) pone en evidencia el rol importante que tienen los vínculos de anholonomía en los problemas de estabilidad.

(*) VEASE, «Ciencia y Têcnica» vol. **119** n. 601, Julio 1952, p. 9.

3. – Rotacion alrededor de un eje horizontal de direccion invariable.

Las ecuaciones del movimiento *no perturbado* (28), (29), (30) admiten la solución:

$$\theta_0 = \pi/2, \quad \dot{\psi} = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0, \quad p_{10} = 0, \quad q_{10} = 0, \quad r_0 = \dot{\varphi}_0, \quad \varphi = \varphi_0 t,$$

que consiste en una rotación de módulo y dirección horizontal constante, mantenièndose el plano del disco en posición vertical.

Perturbando esta solución, tal como hemos hecho en el capítulo anterior, se tiene:

$$\varphi = \varphi_0 + \sigma, \quad \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}(\sigma + \dot{\varphi}_0 t) \cong \sigma \cos \dot{\varphi}_0 t + \operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t,$$

$$\cos\varphi \cong \cos \dot{\varphi}_0 t - \sigma \operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t, \quad r = \dot{\varphi}_0 + \zeta, \quad \theta = \pi/2 + \tau,$$

$$\cos\theta \cong -\tau, \quad \operatorname{sen}\theta \cong 1, \quad p_1 = \xi, \quad q_1 = \eta, \quad p_1 q_1 \cong 0,$$

$$p_1 p \cong 0, \quad q_1 p \cong 0, \quad p_1 q \cong 0, \quad q_1 q \cong 0\,.$$

Reemplazando en las ecuaciones (31), (32), (33) queda:

$$(51)\quad (A + ma^2)\,\dot{\xi} - (C + ma^2)\,\eta\dot{\varphi}_0 - mga\tau = m\varepsilon\{-\delta \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t\,(\,\dot{\xi} \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t +$$

$$+ \dot{\eta} \cos\dot{\varphi}_0 t) - a\,(\,\dot{\xi} \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t + \dot{\eta}_0 \cos\dot{\varphi}\, t) - a\,\dot{\xi} \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t\,\},$$

$$(52)\quad A\dot{\eta} + C\xi\,\dot{\varphi}_0 = -m\varepsilon\{\,\delta(\dot{\xi} \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t + \dot{\eta} \cos\dot{\varphi}_0 t) \cos\dot{\varphi}_0 t + a\,\dot{\xi} \cos\dot{\varphi}_0 t\,\},$$

$$(53)\quad (C + ma^2)\,\dot{\zeta} = -m\varepsilon\{\,\delta\dot{\zeta} + g \cos\dot{\varphi}_0 t + a\dot{\zeta} + a\,\dot{\zeta} \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t + a\,\dot{\varphi}_0^2 \cos\dot{\varphi}_0 t\,\}.$$

La (53) es una ecuación en la sola variable $\dot{\zeta}$, de donde se obtiene:

$$(54)\qquad \dot{\zeta} = -\frac{m\varepsilon \cos\dot{\varphi}_0 t\,(g + a\dot{\varphi}_0^2)}{C + ma^2 + m\varepsilon\delta + m\varepsilon a + m\varepsilon a \operatorname{sen}\dot{\varphi}_0 t}\,.$$

y con una integración; $\zeta = \zeta\,(t)$; que da la variación de la rotación propria r; mientras que de (51) y (52) se llega a estas otras dos:

$$(51') \quad \dot{\xi}[A + ma^2 + m\varepsilon\,\delta\,\mathrm{sen}^2\,\dot{\varphi}_0\,t + 2m\varepsilon a\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t] - \dot{\varphi}_0\,\eta\,(C + ma^2) -$$

$$- mag\tau + \dot{\eta}\,[m\varepsilon\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t\cos\dot{\varphi}_0\,t + m\varepsilon a\cos\dot{\varphi}_0\,t)] = 0,$$

$$(52') \quad \dot{\eta}\,[A + m\varepsilon\delta\cos^2\dot{\varphi}_0\,t] + C\dot{\varphi}_0\,\xi + \dot{\xi}\,[m\varepsilon\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t\cos\dot{\varphi}_0\,t + m\varepsilon a\cos\dot{\varphi}_0\,t)] = 0\,.$$

Por otra parte, se tiene $\xi = \dot{\tau}$ (55) que introducida en (51′) y (52′) permite plantear un sistema diferencial en τ y η con coeficientes variables.

$$(56) \quad \ddot{\tau}\,[A + ma^2 + m\varepsilon\delta\,\mathrm{sen}^2\,\dot{\varphi}_0\,t + 2m\varepsilon a\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t] - \eta\,\dot{\varphi}_0\,(C + ma^2) - mag\tau +$$

$$+ \dot{\eta}\,[m\varepsilon\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t\cos\dot{\varphi}_0\,t + m\varepsilon a\cos\dot{\varphi}_0\,t] = 0,$$

$$(57) \quad \dot{\eta}\,[A + m\varepsilon\delta\cos^2\dot{\varphi}_0\,t)] + \dot{\tau}C\dot{\varphi}_0 + \ddot{\tau}\,[m\varepsilon\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t\cos\dot{\varphi}_0\,t + m\varepsilon a\cos\dot{\varphi}_0\,t] = 0.$$

Derivando ambas ecuaciones con respecto al tiempo, eliminando de la (57) la variable η y sus derivadas primera y segunda y volviendo a la variable ξ se obtiene una única ecuación diferencial homogènea de segundo órden en ξ a coeficientes variables $A\,(t)$; $B\,(t)$; $C\,(t)$ dados por:

$$(58) \quad \begin{aligned} A(t) &= f_3\,(f_1\,f_3 - f_2^2)\,, \\ B\,(t) &= \dot{f}_1\,f_3^2 + f_2\,f_3\,\dot{\varphi}_0\,ma^2 + f_2^2\,\dot{f}_3 - 2f_2\,\dot{f}_2\,f_3, \\ C\,(t) &= Cf_3\,\dot{\varphi}_0\,(C + ma^2) - magf_3^2 + C\dot{\varphi}_0\,f_2\,\dot{f}_3 - C\dot{f}_2\,f_3\,\dot{\varphi}_0, \end{aligned}$$

donde:

$$(59) \quad \begin{aligned} f_1 &= A + ma^2 + m\varepsilon\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t\,(\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t + 2a), \\ f_2 &= m\varepsilon\cos\dot{\varphi}_0\,t\,(\delta\,\mathrm{sen}\,\dot{\varphi}_0\,t + a)\,, \\ f_3 &= A + m\varepsilon\delta\cos^2\dot{\varphi}_0\,t\,. \end{aligned}$$

Ahora bien, para que las curvas integrales de la ecuación: $A(t)\ddot{\xi} + B(t)\dot{\xi} + C(t)\xi = 0$ tengan caracter oscilante, es necesario que $\frac{C(t)}{A(t)} e^{\int \frac{B(t)}{A(t)} dt}$ sea mayor que cero (*); pero dado que $A(t)$, por las (58) y (59), se conserva siempre positivo, basta con que sea $C(t) > 0$ o bien, de acuerdo a la última de las (58):

$$\dot{\varphi}_0 Cf_3 (C + ma^2) - magf_3^2 + C\dot{\varphi}_0 f_2 \dot{f}_3 - C\dot{f}_2 f_3 \dot{\varphi}_0 > 0, \tag{60}$$

que simplificada, teniendo en cuanta las (59) da:

$$\dot{\varphi}_0 > \frac{mag\,(A + m\varepsilon\delta \cos^2 \dot{\varphi}_0 t)^2}{\Delta}, \tag{61}$$

con,

$$\begin{aligned}\Delta = Cf_3 (C + ma^2) - Cf_3\, 2m\varepsilon\delta \cos \dot{\varphi}_0 t \operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t - \\ - Cf_3 \left[m\varepsilon\delta \cos^2 \dot{\varphi}_0 t - m\varepsilon \operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t(\delta \operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t + a)\right],\end{aligned} \tag{62}$$

derivando con respecto al tiempo el segundo miembro de la (61) e igualando a cero, se ve fácilmente que el máximo se obtiene para $\cos \dot{\varphi}_0 t = 0$ $\operatorname{sen} \dot{\varphi}_0 t = -1$ luego $\dot{\varphi}_0$ debe superar el valor crítico:

$$mag \left.\frac{(A + m\varepsilon\delta \cos^2 \dot{\varphi}_0 t)^2}{\Delta}\right|_{\dot{\varphi}_0 t = \frac{3\pi}{2}} = \frac{magA}{C^2 + Cma^2 + Cm\varepsilon\delta - Cam\varepsilon} \tag{63}$$

La condición (61) es necesaria, pero no podemos afirmar que sea suficiente para asegurar la estabilidad del movimiento. Para un estudio profundo de las condiciones suficientes de la estabilidad, habría que recurrir a los teoremas de comparación de Sturm pero su aplicación en este caso resulta harto complicada.

Una vez calculado el movimiento perturbado, es necesario recurrir a la fórmula (1) y proceder a la obtención del valor de la reacción de vinculo Φ; descompuesta esta en una fuerza vertical Φ_1 y en una horizontal Φ_2 debe cumplirse $\Phi_2 \leqslant \lambda\Phi_1$ (con λ coeficiente de frotamiento dinámico) para que quede asegurada la condición de rodar sin resbalar. La misma limitación rige para el caso tratado en el capítulo 2.

(*) F. Tricomi, *Equazioni differenziali*, G. Einaudi (1948) p. 116.

Summary.

In edition N. 638 of « Ciencia y Técnica » magazine we published a letter of Dr. C. Agostinelli which refers to the movement equations of a non homogeneous discus; in this work we will state a few stationary solutions together with stability conditions. We study the problem again extensively and in more detail to illustrate some transformations wich indoubtedly cannot be easely presented in concise letter form. As much as possible we have adopted the same notations.

Bibliografia.

APPELL P., *Sur l'Integration des equations du mouvement d'un corps pesant de révolution roulant par une arete circulaire sur un plan horizontal; cas particulier de cerceau.* « R. C. Circ. Mat. Palermo » **XIV** (1900) 1.

KORTEWEG J., *Extrait d'une lettre a M. Appell,* id. id. p. 7.

CARVALLO E., *Theorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette,* « J. de l'Ecole Polytech. » (2) 5, (1900) 119-188.

Seminario Matematico, Fac. di Ing. de Br. As.