Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 345-360

NIVES MARIA FERLAN (*) e FULVIA SKOF (*)

Sulla permanenza della struttura lacunare attraverso il prolungamento analitico. (**)

1. – Introduzione.

Consideriamo la serie di potenze

$$f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k \qquad (\limsup_{k\to+\infty} | a_k |^{1/k} = 1/R > 0)$$

e la successione $\{ f_n(z) \}$ di polinomi

$$f_n(z) = \sum_0^n a_k z^k.$$

Seguendo l'uso diremo che:

la serie è *lacunare* (*lacunare pura*) *con la successione* $\{ p_h, q_h \}$ *di lacune* (*H. O.*) quando

$$p_h \leqq q_h \leqq p_{h+1} \leqq q_{h+1} \; (h = 1, 2, 3, \ldots), \qquad \liminf_{h\to+\infty} (q_h/p_h) > 1,$$

$$a_m = 0 \qquad \text{per} \qquad p_h \leqq m \leqq q_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Via C. Saldini 50, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 25-VII-1957.

la serie è *a struttura lacunare con la successione* $\{p_h, q_h\}$ *di lacune* (*H. O.*) quando

$$\limsup_{k\to+\infty} |a_k|^{1/k} > \limsup_{m\to+\infty} |a_m|^{1/m} \qquad (p_h \leqq m \leqq q_h; \quad h = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ogni serie a struttura lacunare ammette evidentemente delle *partizioni relative alla successione* $\{p_h, q_h\}$ del tipo seguente

$$f(z) = f^*(z) + f^{**}(z),$$

dove:

$$a_k = a_k^* + a_k^{**}, \qquad a_k^* = 0 \quad \text{per} \quad k = m \qquad (p_h \leqq m \leqq q_h; \quad h = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\limsup |a_k^{**}|^{1/k} < 1/R,$$

$$f^*(z) = \sum_0^\infty a_k^* z^k, \qquad f^{**}(z) = \sum_0^\infty a_k^{**} z^k.$$

La serie $f^*(z)$ risulta la *componente lacunare pura della partizione* lungo $\{p_h, q_h\}$ ed ha raggio di convergenza R, mentre la serie $f^{**}(z)$ (*componente residua*) ha raggio di convergenza maggiore di R.

G. BOURION (1) ha studiato l'ultraconvergenza delle serie di potenze ed ha osservato, tra l'altro, che la struttura lacunare si conserva, per continuità, in un intorno dell'origine della serie stessa quando se ne ricava il prolungamento analitico.

In questo nostro lavoro ci poniamo il seguente problema:

Consideriamo la funzione analitica $f(z)$ generata dalla serie di potenze

$$f(z; 0) = \sum_0^\infty a_k z^k$$

avente struttura lacunare con la successione di lacune $\{p_h, q_h\}$; sia

$$f(z; \zeta) = \sum_0^\infty b_k (z-\zeta)^k \qquad [b_k = b_k(\zeta, \mathfrak{L})],$$

(1) G. BOURION, *Recherches sur l'ultraconvergence*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **50** (1933), 245-318 (cfr., in particolare, pp. 291-298).

lo sviluppo di $f(z)$ col centro in ζ ottenuto per prolungamento lungo una linea $\mathfrak{L} \equiv (\widehat{0, \zeta})$:

1°) la serie $f(z; \zeta)$ ha ancora struttura lacunare?

2°) in caso affermativo, quale è una successione $\{p'_h, q'_h\}$ di lacune per questa serie?

Oggetto di questo primo studio è il caso dell'*ordine di lacunarità infinito*, cioè il caso in cui $q_h/p_h \to +\infty$. Questa ipotesi porta come conseguenza che la componente $f^*(z; 0)$ lacunare pura genera una funzione uniforme [A. Ostrowski (2)] e l'eventuale polidromia è dovuta alla componente residua $f^{**}(z; 0)$.

Supponiamo, senza alterare la generalità, che il raggio di convergenza della serie

$$f(z; 0) = \sum_0^\infty a_k z^k$$

sia 1 e consideriamo dapprima (nn. **2-6**) il caso delle serie lacunari pure.

Nei nn. **2** e **3** viene stabilito il Teorema I, secondo il quale la struttura lacunare di ordine infinito della serie (lacunare pura) $f(z; 0)$ si conserva quando si passa alla serie $f(z; \zeta)$ con ζ interno al cerchio di convergenza, lungo un cammino interno a questo cerchio, e si dànno informazioni sulla successione delle nuove lacune.

Nel Teorema II (nn. **4** e **5**) si garantisce la struttura lacunare in tutto il campo di esistenza della funzione $f(z)$, precisando anche una successione di lacune per l'elemento dedotto $f(z; \zeta)$.

Nel n. **6** (Teorema III) si dànno informazioni su una successione di lacune presente in ogni elemento analitico $f(z; \zeta)$ dedotto da $f(z; 0)$.

Passando a considerare la serie $f(z; 0)$ a struttura lacunare, nei riguardi delle tre funzioni $f(z)$, $f^*(z)$, $f^{**}(z)$, generate rispettivamente da $f(z; 0)$, $f^*(z; 0)$, $f^{**}(z; 0)$, denotiamo con

$$\begin{array}{llll} E(f), & \overline{E}(f), & f(z; \zeta), & R(\zeta), \\ E(f^*), & \overline{E}(f^*), & f^*(z; \zeta), & R^*(\zeta), \\ E(f^{**}), & \overline{E}(f^{**}), & f^{**}(z; \zeta), & R^{**}(\zeta) \end{array}$$

(2) A. Ostrowski, *Über vollständige Gebiete gleichmässiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **1** (1922), 281-350. Vedere anche loc. cit. in (1) (cfr. pag. 262).

rispettivamente il campo di esistenza (eventualmente su una superficie di RIEMANN), la sua chiusura, l'elemento analitico di centro ζ dedotto lungo un cammino $\widehat{0, \zeta}$ precisato, e il raggio di convergenza dell'elemento stesso.

È evidente che $R(0) = R^*(0) = 1$, $R^{**}(0) > 1$ e inoltre $E(f)$, $E(f^*)$ contengono il cerchio $|z| < 1$ e $E(f^{**})$ contiene il cerchio $|z| < R^{**}(0)$. Di più è evidente che

$$R(\zeta) \geqq \mathrm{Min}\left(R^*(\zeta),\ R^{**}(\zeta)\right)$$

e vale il segno $>$ eventualmente soltanto quando sia $R^*(\zeta) = R^{**}(\zeta)$.

Fra tutte le serie di potenze $f(z;\ \zeta)$ che si possono dedurre per prolungamento da $f(z;\ 0)$, consideriamo quelle $f(z;\ \zeta)$ a struttura lacunare (almeno) lungo una successione $\{p'_h,\ q'_h\}$ *contenuta* in $\{p_h,\ q_h\}$ nel senso che

$$p_h \leqq p'_h < q'_h \leqq q_h \quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \qquad \liminf_{h \to +\infty} (q'_h/p'_h) > 1\ .$$

Consideriamo l'insieme dei centri ζ di queste serie, necessariamente contenuto nel campo $E(f)$ sulla relativa superficie di RIEMANN: questo insieme si dirà *il campo di permanenza della struttura lacunare di $f(z)$ relativo all'elemento analitico $f(z;\ 0)$ e alla successione di lacune $\{p_h,\ q_h\}$*. Questo campo si denoterà con

$$\Gamma_f(0) = \Gamma\left(f(z;\ 0)\right) = \Gamma\left(f(z;\ 0);\ \{p_h,\ q_h\}\right).$$

I Teoremi I e II ci dicono che per le serie lacunari pure $E(f)$ coincide con $\Gamma_f(0)$: che cosa si può dire su questo campo $\Gamma_f(0)$ per le serie a struttura lacunare?

Al n. 7 si indica un campo

$$G = G\left(f(z;\ 0);\ \{p_h,\ q_h\};\ f^*(z;\ 0);\ f^{**}(z;\ 0)\right),$$

relativo alla successione $\{p_h,\ q_h\}$ e alla partizione $f(z;\ 0) = f^*(z;\ 0) + f^{**}(z;\ 0)$, tale che, per ogni $\zeta \in G$, l'elemento $f(z;\ \zeta)$ abbia struttura lacunare con una successione di lacune $\{p'_h,\ q'_h\}$ legate alle $\{p_h,\ q_h\}$ da una legge che viene assegnata. Si dà poi una costruzione geometrica di tale campo.

2. - Permanenza della struttura lacunare all'interno del cerchio di convergenza.

Teorema I. *La serie* $f(z;\,0) = \sum_0^\infty a_k z^k$ *abbia raggio di convergenza* 1 *e sia lacunare pura, cioè*

$$a_m = 0 \quad per \quad p_h \leqq m \leqq q_h \quad (h = 1,\,2,\,3,\,\ldots), \qquad q_h/p_h \to +\infty\,.$$

Sia

$$f(z;\,\zeta) = \sum_0^\infty b_k\,(z-\zeta)^k \qquad (\zeta = |\,\zeta\,|\,e^{i\varphi} = \varrho e^{i\varphi}, \quad 0 < \varrho < 1)$$

la serie dedotta da $f(z;\,0)$ *col centro in* ζ *e diciamo* $R(\zeta)$ *il suo raggio di convergenza* $(R(\zeta) \geqq 1-\varrho)$.

Per ogni $T > 1-\varrho$, *denotiamo con* $\mu = \mu(\varrho,\,T)$ *la radice dell'equazione*

$$\psi(\mu) = \psi(\mu,\,T) = (\varrho+\mu)\,\log(\varrho+\mu) + \mu\,\log(T/\mu) = 0$$

(*radice appartenente all'intervallo* $0 < \mu < 1-\varrho$).

Allora, se $T > R(\zeta)$, *la serie* $f(z;\,\zeta)$ *ha struttura lacunare con le lacune* $\{\,p_h',\,q_h'\,\}$ $(h = 1,\,2,\,3,\,\ldots.)$ *date da*

$$p_h' = p_h, \qquad q_h' = [q_h \cdot \mu/(\varrho+\mu)] \qquad (\mu = \mu(\varrho,\,T))$$

e inoltre la sua componente residua

$$\sum_m b_m\,(z-\zeta)^m \qquad (p_h' \leqq m \leqq q_h'; \quad h = 1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

ha raggio di convergenza $R^{**}(\zeta) > T$.

Osservazioni. 1°) La serie $f(z;\,\zeta)$ è ultraconvergente lungo la successione $\{\,m\,\}$ tutte le volte che il campo di esistenza $E(f)$ della funzione $f(z)$ deborda dal cerchio $|\,z-\zeta\,| \leqq R(\zeta)$.

2°) Nel caso $T > 1-\varrho$ l'equazione $\psi(\mu) = 0$ ammette una sola radice $\mu = \mu(\varrho,\,T)$ sul semiasse reale positivo, e questa risulta compresa fra i valori 0 e $1-\varrho$. Infatti è $\psi(0) < 0$, $\psi(1-\varrho) > 0$, $\partial\psi(\mu)/\partial\mu > 0$. Fissato ϱ, il rapporto

$\mu/(\varrho+\mu)$ decresce al crescere di T $(T > 1-\varrho)$. Per $T \to 1-\varrho$ risulta $\mu/(\varrho+\mu) \to 1-\varrho$.

3°) È da notare che il Teorema garantisce l'immobilità dell'estremo inferiore di ogni lacuna della successione. Per $T \to R(\zeta)^+$ è $\mu \to \mu(\varrho,\ R(\zeta))^- = \mu_0(\zeta)$, e pertanto $\mu/(\varrho+\mu) \to \{\mu_0/(\varrho+\mu_0)\}^-$. Il nostro procedimento dimostrativo non consente di garantire per la $f(z;\ \zeta)$ una successione di lacune più ampie di $\{p_h,\ q_h\mu_0/(\varrho+\mu_0)\}$.

3. - Dimostrazione del Teorema I.

La dimostrazione si basa sui due seguenti lemmi fondamentali, validi per ogni $f(z)$ avente raggio di convergenza 1 e largamente usati da G. Bourion [3]:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} (1/n) \ \log |f(z) - f_n(z)| < \log r + \varepsilon_n(r) \\ |z| = r < 1, \qquad \varepsilon_n(r) \to 0 \quad \text{per } r \text{ fisso e } n \to +\infty, \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} (1/n) \ \log |f_n(z)| < \log r + \varepsilon'_n(r) \\ |z| = r > 1, \qquad \varepsilon'_n(r) \to 0 \quad \text{per } r \text{ fisso e } n \to +\infty. \end{cases}$$

Nelle ipotesi fatte ($a_m = 0$ per $p_h \leqq m \leqq q_h$) è $f_{p_h}(z) = f_m(z) = f_{q_h}(z)$, ed i due lemmi, in queste ipotesi, si possono scrivere nella forma seguente, dove in (I*) si provvede ad una ulteriore precisazione del termine complementare al secondo membro:

$$\text{(I*)} \quad \begin{cases} \log |f(z) - f_m(z)| < q_h\{\log r + \varepsilon_{q_h}(r)\} \\ |z| = r < 1,\ p_h \leqq m < q_h,\ \varepsilon_{q_h}(r) = \log A_{q_h} + c(f;\, r)/q_h \to 0 \text{ per } h \to +\infty \end{cases}$$

(si è posto $A_k = \operatorname{Sup}\{|a_{k+1}|^{1/(k+1)},\ |a_{k+2}|^{1/(k+2)},\ \ldots\}$),

$$\text{(II*)} \quad \begin{cases} \log |f_m(z)| < p_h\{\log r + \varepsilon'_{p_h}(r)\} \\ |z| = r > 1, \quad p_h \leqq m \leqq q_h, \quad \varepsilon'_{p_h}(r) \to 0 \text{ per } r \text{ fisso e } h \to +\infty. \end{cases}$$

---

[3] Vedasi loc. cit. in [1] (cfr. pp. 248-259).

Incominciamo col dimostrare (I*) con l'opportuna maggiorazione di $\varepsilon_n(r)$. È

$$|f(z)-f_m(z)| \leqq \sum_{m+1}^{\infty} |a_k|\,|z|^k = \sum_{m+1}^{\infty} \{|a_k|^{1/k} r\}^k \leqq \sum_{m+1}^{\infty} (A_m r)^k = \sum_{q_h+1}^{\infty} (A_{q_h} r)^k =$$

$$= (A_{q_h} r)^{q_h} A_{q_h} r/(1-A_{q_h} r).$$

Ora, per $h > h_1$ (abbastanza grande) è $A_{q_h} r < 1$, poichè r è fisso <1 e $\limsup |a_k|^{1/k} = 1$; per $h > h_2$ (opportunamente grande) risulta

$$A_{q_h} r/(1-A_{q_h} r) < 1/(1-r)\,.$$

Allora per $h > \mathrm{Max}(h_1,\ h_2)$ si ha

$$\log|f(z)-f_m(z)| \leqq q_h \log r + q_h \log A_{q_h} + \log\{1/(1-r)\},$$

da cui si deduce la (I*), dove si è posto $\varepsilon_{q_h}(r) = \log A_{q_h} + c(f;\ r)/q_h$.

Consideriamo ora i due cerchi

$$(\gamma)\qquad |z-\zeta| = \mu, \qquad\qquad (\Gamma)\qquad |z-\zeta| = H,$$

col centro in ζ, il primo (γ) interno a $|z|<1$, e il secondo contenente $|z|=1$ all'interno, cioè

$$0<\mu<1-\varrho, \qquad\qquad H > 1+\varrho,$$

e veniamo a stabilire una maggiorazione per b_m, servendoci della formula fondamentale di CAUCHY. Intanto osserviamo che è

$$|b_m| \leqq |b_m^{(m)}| + |b_m - b_m^{(m)}| \leqq 2\ \mathrm{Max}\,(|b_m^{(m)}|,\ |b_m - b_m^{(m)}|),$$

$$|b_m^{1/m}| \leqq 2^{1/m}\{\mathrm{Max}\,(|b_m^{(m)}|,\ |b_m - b_m^{(m)}|)\}^{1/m} \leqq 2^{1/m}\,\mathrm{Max}\,(|b_m^{(m)}|^{1/m},\ |b_m - b_m^{(m)}|^{1/m}).$$

Valutiamo $|b_m^{(m)}|$. È

$$b_m^{(m)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f_m(z)\,dz}{(z-\zeta)^{m+1}},$$

ed essendo $|z - \zeta| = H$, $|z| \leqq \varrho + H$, applicando la (II*) otteniamo

$$\log |b_m^{(m)}| \leqq -m \log H + p_h \{ \log (H + \varrho) + \varepsilon'_{p_h}(H + \varrho) \},$$

$$\frac{1}{m} \log |b_m^{(m)}| \leqq -\left(1 - \frac{p_h}{m}\right) \log H + \frac{p_h}{m} \log \left(1 + \frac{\varrho}{H}\right) + \frac{p_h}{m} \varepsilon'_{p_h}(H + \varrho) \leqq$$

$$\leqq -\left\{ 1 - \frac{p_h}{m}\left(1 + \frac{\log (1 + \varrho/H)}{\log H}\right) \right\} \log H + \frac{p_h}{m} \varepsilon'_{p_h}(H + \varrho).$$

Fissato $\delta > 0$ arbitrario, si scelga H abbastanza grande in modo che sia $\log (1 + \varrho/H) < (\delta/2) \log H$, e sia inoltre $p_h (1 + \delta) \leqq m \leqq q_h$. Risulta allora:

$$(1/m) \log |b_m^{(m)}| \leqq -\{ \delta/(2(1 + \delta)) \} \log H + \varepsilon'_{p_h}(H + \varrho).$$

Poichè $\varepsilon'_{p_h} \to 0$ per $h \to +\infty$, otteniamo

$$\limsup_{m \to +\infty} \{ (1/m) \log |b_m^{(m)}| \} \leqq -\{ \delta/(2(1 + \delta)) \} \log H \qquad (p_h(1 + \delta) \leqq m \leqq q_h),$$

e, tenendo conto dell'arbitrarietà di H,

$$(1/m) \log |b_m^{(m)}| \to -\infty,$$

e quindi

$$|b_m^{(m)}|^{1/m} \to 0. \tag{3.1}$$

Valutiamo ora $|b_m - b_m^{(m)}|$. È

$$b_m - b_m^{(m)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\{ f(z) - f_m(z) \} \, dz}{(z - \zeta)^{m+1}},$$

ed essendo $|z - \zeta| = \mu$, $|z| \leqq \varrho + \mu$, applicando la (I*) abbiamo

$$\log |b_m - b_m^{(m)}| \leqq -m \log \mu + q_h \{ \log (\varrho + \mu) + \varepsilon_{q_h}(\varrho + \mu) \},$$

$$(1/m) \log |b_m - b_m^{(m)}| \leqq -\log \mu + (q_h/m) \log (\varrho + \mu) + (q_h/m) \, \varepsilon_{q_h}(\varrho + \mu).$$

Osserviamo che $\log \mu < 0$ e si tratta di scegliere convenientemente μ al fine di ottenere un favorevole (piccolo) valore di q_h/m.

L'equazione

$$-\log\mu + \tau \log(\varrho + \mu) = -\log T$$

conduce al rapporto positivo

$$\tau = \log(\mu/T)/\log(\varrho + \mu),$$

che assume il valore minimo per il valore $\mu = \mu(\varrho, T)$, radice dell'equazione $\psi(\mu, T) = (\varrho + \mu) \log(\varrho + \mu) + \mu \log(T/\mu) = 0$. Per tale valore risulta

$$\tau = \{ \varrho + \mu(\varrho, T) \} / \mu(\varrho, T) = 1 + \varrho/\mu(\varrho, T).$$

Otteniamo dunque, per $p_h \leqq m \leqq q_h\, \mu/(\varrho + \mu) \quad (\mu = \mu(\varrho, T))$,

$$(1/m) \log | b_m - b_m^{(m)} | \leqq -\log T + (q_h/m)\, \varepsilon_{q_h}(\varrho + \mu) \leqq$$

$$\leqq -\log T + \{ (\log A_{q_h})/m \} q_h + c/m \qquad (c = c(\varrho + \mu)).$$

Poichè $\log A_k \to 0$ per $k \to +\infty$, si può scegliere una successione di interi m_h tali che

$$p_h(1 + \delta) \leqq m_h < q_h, \qquad q_h/m_h \to +\infty, \qquad \{ (\log A_{q_h})/m_h \} q_h \to 0$$

e quindi risulta anche

$$\frac{\log A_{q_h}}{m} q_h \to 0 \tag{3.2}$$

per $m \to +\infty$ lungo la successione $m_h \leqq m \leqq \{ \mu/(\varrho + \mu) \} q_h \quad (h = h_0, h_0 + 1, \ldots)$. Si può scegliere, per esempio,

$$m_h = \operatorname{Max} \{ q_h \cdot (\log A_{q_h})^{1/2}, \quad p_h(1 + \delta) \}.$$

Consideriamo la successione degli interi m che verificano la condizione

$$m_h \leqq m \leqq q_h\, \mu/(\varrho + \mu) \qquad (h = h_0, h_0 + 1, \ldots).$$

Per la scelta così fatta di m_h vale (3.2) e quindi

$$\limsup \{ (1/m) \log | b_m - b_m^{(m)} | \} \leqq -\log T. \tag{3.3}$$

Tenendo presente che

$$| b_m |^{1/m} \leqq 2^{1/m} \operatorname{Max}\{ | b_m^{(m)} |^{1/m}, \ | b_m - b_m^{(m)} |^{1/m} \},$$

in forza delle maggiorazioni (3.1) e (3.3) si ottiene

$$\limsup | b_m |^{1/m} \leqq 1/T \qquad \text{per} \quad m_h \leqq m \leqq \{ \mu/(\varrho + \mu) \} q_h, \quad m \to +\infty .$$

Dimostriamo ora che è

$$\limsup | b_m |^{1/m} \leqq 1/T \qquad \text{anche per} \quad p_h \leqq m < m_h, \quad m \to +\infty .$$

1°) Ricordiamo che è $q_h/m_h \to +\infty$.

2°) Determiniamo V così grande da avere

$$eV | \zeta |^{(V-2)/2} < 1/T, \qquad V > 2/\log (1/| \zeta |) \tag{3.4}$$

(il che è possibile, essendo $| \zeta | < 1$).

3°) Per $h \geqq h_3$ risulta $m_h V + 1 \leqq q_h$. Allora per $p_h \leqq m < m_h$ è $p_h V + 1 \leqq mV + 1 < m_h V + 1 \leqq q_h$.

Veniamo a stabilire una maggiorazione per $| b_m | = |b_m(\zeta)|$. Essendo $\log | a_s | \leqq s \log A_{s-1} = s\, \varepsilon(s)$ ($\varepsilon(s) \to 0$, non crescente), $a_s = 0$, per $m \leqq s \leqq mV$, otteniamo

$$| b_m | \leqq \sum_{s=m}^{\infty} \binom{s}{m} | a_s | \, | \zeta |^{s-m} = \sum_{s=mV+1}^{\infty} \binom{s}{m} | a_s | \, | \zeta |^{s-m} \leqq \frac{1}{| \zeta |^m} \sum_{s=mV+1}^{\infty} \binom{s}{m} e^{\varepsilon(s)\cdot s} | \zeta |^s.$$

La successione dei termini di questa serie è decrescente (almeno) per $s \geqq mV + 1$, e quindi

$$| b_m | \leqq \frac{1}{| \zeta |^m} \int_{mV}^{\infty} \frac{u!}{m!\,(u-m)!} e^{\varepsilon(u)\cdot u} | \zeta |^u \, du \leqq$$

$$\leqq (1/| \zeta |^m) \int_{mV}^{\infty} \exp\{ T(\tau)\cdot u - (1/2) \log u - (1/2) \log \{ \tau(1-\tau) \} - (1/2) \log (2\pi) +$$

$$+ \sigma_{u,\tau} + \varepsilon(u)\cdot u \} | \zeta |^u \, du,$$

dove $\tau = m/u$ ed è

$$u \cdot T(\tau) = u\{\tau \log(1/\tau) + \tau\,\psi(\tau)\} \leqq m \log u - m \log m + m \qquad (\psi(\tau) \leqq 1),$$

$$-(1/2)\log\{\tau(1-\tau)\} \leqq (1/2)\log u - (1/2)\log m - (1/2)\log(1-1/V),$$

$$\sigma_{u,\tau} = \sigma_u - \sigma_{u(1-\tau)} - \sigma_{u\tau} < c(m_0) \qquad \text{per} \qquad m > m_0 .$$

Allora risulta

$$|b_m| \leqq \frac{\exp m}{m^{m+1/2}|\zeta|^m}\int_{mV}^{\infty} \exp\{m\log u + c_1 + \varepsilon(u)\cdot u - u\log(1/|\zeta|)\}\,du.$$

Per $m \geqq m_1$ è $\{c_1 + \varepsilon(u)\cdot u\}/\log(1/|\zeta|) < u/2$, e quindi

$$|b_m| \leqq \frac{\exp m}{m^{m+1/2}|\zeta|^m}\int_{mV}^{\infty} \exp\{-(u/2)\log(1/|\zeta|)\}\,u^m\,du \qquad (m \geqq m_1).$$

Posto $v = (u/2)\log(1/|\zeta|)$, si ottiene

$$|b_m| \leqq \frac{e^m}{m^{m+1/2}|\zeta|^m\{(1/2)\log(1/|\zeta|)\}^{m+1}}\int_{mU}^{\infty} e^{-v}\,v^m\,dv,$$

essendo $U = (V/2)\log(1/|\zeta|)$.

La funzione $e^{-v}\,v^m$ è decrescente per $v > m$ e risulta

$$\{e^{-(v+1)}(v+1)^m\}/(e^{-v}\,v^m) = e^{-1}\{e(1+K/v)\}^{m/v} = e^{-1+m/v}\{(1+K/v)^{v/K}\}^{Km/v^2} \leqq$$

$$\leqq e^{-(1-1/U)}\{1 + o(1)\} \qquad \text{per} \qquad m \to +\infty, \text{ uniformemente rispetto a } v.$$

Ne segue

$$\int_{mU}^{\infty} e^{-v}\,v^m\,dv = \int_{mU}^{mU+1}\ldots + \int_{mU+1}^{mU+2}\ldots + \ldots \leqq e^{-mU}(mU)^m\{1 - e^{-(1-1/U)}(1+o(1))\}^{-1},$$

da cui

$$|b_m| \leqq 2e^m\,V^m\,m^{-1/2}\,|\zeta|^{-m}\{\log(1/|\zeta|)\}^{-1}\,e^{-m\{(V/2)\log(1/|\zeta|)\}}\cdot$$

$$\cdot\{1 - e^{-\{1-2/(V\log(1/|\zeta|))\}}(1+o(1))\}^{-1}$$

e quindi

$$|b_m|^{1/m} \to eV\,|\zeta|^{(r/2)-1} \quad \text{per} \quad m \to \infty \quad \text{lungo i tratti} \quad p_h \leqq m < m_h\,.$$

In base alla (3.4) si conclude che il raggio di convergenza $R^{**}(\zeta)$ della componente residua $\sum b_m (z-\zeta)^m$ $(p_h \leqq m \leqq q_h\,\mu/(\varrho+\mu);\quad h=1,\,2,\,3,\,\ldots)$ risulta maggiore di T. Il Teorema è così dimostrato.

4. – Permanenza della struttura lacunare all' interno del campo di esistenza.

Teorema II. *Sia* $f(z;\,0)=\sum\limits_0^\infty a_k z^k$ *una serie lacunare con la successione delle lacune* $\{p_h,\,q_h\}$ $(h=1,\,2,\,3,\,\ldots)$. *Fissato* $\zeta \in E(f)$, *esiste una costante*

$$\omega(\zeta)=\omega(E(f),\,0,\,\zeta),$$

dipendente soltanto dalla geometria dell'insieme $(E(f),\,0,\,\zeta)$, *tale che lo sviluppo nel punto* ζ

$$f(z;\,\zeta)=\sum_0^\infty b_k (z-\zeta)^k,$$

dedotto da $f(z;\,0)$ *ha struttura lacunare con la successione di lacune* $\{p_h',\,q_h'\}$, *dove*

$$p_h'=p_h, \qquad q_h'=[\omega(\zeta)\cdot q_h]\,.$$

Osservazioni. 1°) Essendo $q_h/p_h \to +\infty$, in forza di un classico teorema di A. Ostrowski, $f(z)$ è uniforme ed $E(f)$ è contenuto in un piano. L'insieme complementare di $E(f)$ si compone di un continuo, o più continui privi di punti comuni, ciascuno dei quali è illimitato (4).

---

(4) Vedere: S. Mandelbrojt, *Sur les séries de Taylor qui présentent des lacunes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **40** (1923), 413-462 (cfr., in particolare, pag. 430).

2°) Sia $\zeta \in E(f)$ e consideriamo una catena di elementi analitici ciascuno col centro interno al precedente, di cui il primo sia $f(z;\ 0)$ e l'ultimo $f(z;\ \zeta)$, e la successione dei centri e quella dei rispettivi raggi siano

$$0, \quad \zeta_1, \quad \zeta_2, \quad \ldots, \quad \zeta_{l-1}, \quad \zeta_l = \zeta,$$

$$1, \quad R_1, \quad R_2, \quad \ldots, \quad R_{l-1}, \quad R;$$

accanto a queste consideriamo la successione dei rapporti

$$\varrho = |\zeta_1| = |\zeta_1 - 0|/1, \qquad \varrho_1 = |\zeta_2 - \zeta_1|/R_1, \quad \ldots, \quad \varrho_{l-1} = |\zeta_l - \zeta_{l-1}|/R_{l-1}.$$

La costante $\omega(\zeta)$ dipende *soltanto* dalla doppia l-upla di numeri reali non negativi

$$(\varrho, \ \varrho_1, \ \ldots, \ \varrho_{l-1}), \qquad (1, \ R_1, \ \ldots, \ R_{l-1}).$$

5. - Dimostrazione del Teorema II.

Riferiamoci alle notazioni dell'Osservazione 2°) alla fine del n. precedente, e diciamo $f(z;\ \zeta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ gli elementi analitici via via dedotti per prolungamento.

Poniamo

$$f(z;\ 0) = \varphi_0(z;\ 0)$$

e indichiamo con

$$\varphi_1(z;\ \zeta_1) + g_1(z;\ \zeta_1)$$

la serie dedotta da $\varphi_0(z;\ 0)$, con la successione di lacune $\{p'_h,\ q'_h\}$, essendo $\varphi_1(z;\ \zeta_1)$ la componente lacunare pura e $g_1(z;\ \zeta_1)$ la componente residua.

Sia T il diametro dell'insieme, necessariamente piano (A. OSTROWSKI), dei punti di $E(f)$ ricoperti dalla catena degli $l+1$ elementi analitici.

Fissato $T_1 \geqq T$, si determini la radice $\mu_1 = \mu(\varrho_1,\ T_1)$ dell'equazione $\psi(\mu) = \psi(\mu,\ T_1) = 0$.

Allora, per il Teorema I, $\varphi_1(z;\ \zeta_1)$ è lacunare con la successione di lacune $\{p'_h,\ q'_h\}$, dove

$$p'_h = p_h, \qquad q'_h = q_h\,\mu_1/(\varrho_1 + \mu_1);$$

inoltre $g_1(z;\ \zeta_1)$ ha raggio di convergenza almeno T e quindi il suo cerchio di convergenza contiene tutta la catena.

Adesso operiamo su $\varphi_1(z;\ \zeta_1)$ per ottenere $\varphi_2(z;\ \zeta_2) + g_2(z;\ \zeta_2)$ come abbiamo operato precedentemente su $\varphi_0(z;\ 0)$: fissato $T_2 \geqq T/R_1$, si determina $\mu_2 = = \mu(\varrho_2,\ T_2)$ e si assume

$$p_h'' = p_h', \qquad q_h'' = q_h'\, \mu_2/(\varrho_2 + \mu_2);$$

così la componente residua $g_2(z;\ \zeta_2)$ ha raggio di convergenza almeno T.

Così continuando perverremo a

$$\varphi_l(z;\ \zeta_l) + g_l(z;\ \zeta_l)$$

e risulterà

$$f(z;\ \zeta) = \varphi_l(z;\ \zeta_l) + \sum_{j=1}^{l} g_j(z;\ \zeta_j),$$

dove $\sum_{j=1}^{l} g_j(z;\ \zeta_j)$ è olomorfa nell'insieme ricoperto dai cerchi della catena, mentre $\varphi_l(z;\ \zeta_l)$ è lacunare pura con la successione di lacune $\{ p_h^{(l)},\ q_h^{(l)} \}$:

$$p_h^{(l)} = p_h, \qquad q_h^{(l)} = q_h \cdot \prod_{(i=1,\ldots,l)} \frac{\mu(\varrho_i,\ T/R_i)}{\varrho_i + \mu(\varrho_i,\ T/R_i)} = \omega(\zeta)\cdot q_h .$$

Il Teorema II è così dimostrato.

6. – Ancora nelle ipotesi formulate per il Teorema II, è possibile indicare una successione di lacune $\{ p_h',\ q_h' \}$ che si presentano nello sviluppo di $f(z)$ nell'intorno di qualunque punto $\zeta \in E(f)$. Infatti sussiste il

Teorema III. *Sia* $f(z;\ 0) = \sum_0^\infty a_k z^k$ *una serie lacunare con la successione delle lacune* $\{ p_h,\ q_h \}$ $(h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. *Fissata arbitrariamente una successione* $\{ \omega_h \}$, *con* $\omega_h \to 0$ *lentamente quanto si vuole, lo sviluppo*

$$f(z;\ \zeta) = \sum_0^\infty b_k\, (z - \zeta)^k$$

di $f(z)$ *col centro in un qualunque punto* $\zeta \in E(f)$ *ha struttura lacunare con la successione di lacune* $\{ p_h',\ q_h' \}$ *dove*

$$p_h' = p_h, \qquad q_h' = [\omega_h\ q_h] .$$

Dimostrazione. Questo Teorema è immediata conseguenza del Teorema II; infatti per ogni ζ è stata costruita la serie $f(z;\ \zeta)$ a struttura lacunare con le lacune $\{p_h,\ \omega(\zeta)q_h\}$; essendo $\omega_h \to 0$, risulta, per $h \geqq h_0(\zeta)$, $\omega_h\ q_h < \omega(\zeta)\ q_h$ e pertanto $\{p_h,\ \omega_h\ q_h\}$ è una successione di lacune per la serie $f(z;\ \zeta)$.

7. - Caso delle serie a struttura lacunare.

Sia $f(z;\ 0) = \sum_0^\infty a_k\, z^k$ una serie a struttura lacunare con la successione delle lacune $\{p_h,\ q_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ e sia $f(z;\ 0) = f^*(z;\ 0) + f^{**}(z;\ 0)$ una sua partizione in componente lacunare pura e componente residua, relativa a $\{p_h,\ q_h\}$.

Per ogni punto ζ di $D = E(f^*) \cap E(f^{**})$ indichiamo con $R(\zeta)$, $R^*(\zeta)$, $R^{**}(\zeta)$ i raggi degli elementi analitici dedotti rispettivamente da $f(z;\ 0)$, $f^*(z;\ 0)$, $f^{**}(z;\ 0)$ lungo una linea fissata.

Fra i raggi sussiste la relazione

$$R(\zeta) \geqq \mathrm{Min}\,(R^*(\zeta),\ R^{**}(\zeta))$$

e il segno $>$ vale eventualmente quando $R^*(\zeta) = R^{**}(\zeta)$.

Per ogni ζ di D consideriamo la terna $\mathfrak{T}(\zeta)$ di cerchi

$$C(\zeta):\ |z-\zeta| < R(\zeta), \qquad C^*(\zeta):\ |z-\zeta| < R^*(\zeta), \qquad C^{**}(\zeta):\ |z-\zeta| < R^{**}(\zeta),$$

dove $C(\zeta) \supseteqq C^*(\zeta) \cap C^{**}(\zeta)$. Ogni terna $\mathfrak{T}(\zeta)$, per $\zeta \in D$, appartiene ad uno dei seguenti tre tipi:

1° tipo: $\quad 0 < R(\zeta) = R^*(\zeta) < R^{**}(\zeta),$

2° tipo: $\quad 0 < R(\zeta) = R^{**}(\zeta) \leqq R^*(\zeta),$

3° tipo: $\quad 0 < R^*(\zeta) = R^{**}(\zeta) < R(\zeta).$

Si osservi che se la terna $\mathfrak{T}(\zeta)$, $\zeta \in D$, è del 1° tipo, l'elemento analitico $f(z;\ \zeta)$ presenta struttura lacunare e pertanto il campo G di permanenza della struttura lacunare, relativo alla successione $\{p_h,\ q_h\}$ e alla partizione $f(z;\ 0) = f^*(z;\ 0) + f^{**}(z;\ 0)$ è quel campo (contenuto in D) che contiene ogni punto ζ per il quale la terna $\mathfrak{T}(\zeta)$ risulta del 1° tipo. È da notare che il campo G risulta contenuto nel campo $\Gamma_f(0)$.

I risultati stabiliti nei Teoremi II e III, e riguardanti l'ampiezza delle lacune dell'elemento analitico dedotto $f(z;\ \zeta)$, rimangono validi anche nel caso delle serie a struttura lacunare purchè sia $\zeta \in G$. Infatti, fissati un punto ζ di G ed una linea $\mathfrak{L}$, interamente contenuta in D e congiungente 0 con ζ, si consideri una catena di terne $\mathfrak{T}$ di cerchi (contenente eventualmente anche terne del 2° e del 3° tipo) i cui centri ζ_i sono punti di $\mathfrak{L}$ così scelti:

$$\zeta_{i+1} \in C(\zeta_i) \cap C^*(\zeta_i) \cap C^{**}(\zeta_i) \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k;\quad \zeta_0 = 0,\ \zeta_k = \zeta)\,.$$

Per il Teorema II l'elemento analitico $f^*(z;\ \zeta)$ dedotto dalla componente lacunare pura $f^*(z;\ 0)$ ha struttura lacunare con le lacune $\left\{ p_h,\ \omega(\zeta)\ q_h \right\}$; l'elemento analitico $f^{**}(z;\ \zeta)$, dedotto dalla parte residua $f^{**}(z;\ 0)$ ha raggio di convergenza $R^{**}(\zeta) > R^*(\zeta) = R(\zeta)$, essendo ζ in G: pertanto l'elemento $f(z;\ \zeta)$ è scomponibile nella somma di una serie lacunare pura con la successione di lacune $\left\{ p_h,\ \omega(\zeta)\ q_h \right\}$ e di una parte residua, avente raggio di convergenza maggiore.

Osservazioni. 1°) È da notare che il campo G di permanenza della struttura lacunare non è necessariamente connesso.

2°) Il campo G si costruisce geometricamente nel seguente modo: Si consideri un punto z^* [singolare per la funzione $f^*(z)$] non coincidente con alcun punto z^{**} [singolare per la $f^{**}(z)$], e si denoti con $P(z^*,\ z^{**})$ il semipiano aperto, contenente z^* e limitato dall'asse del segmento rettilineo $z^*\, z^{**}$. Indichiamo con $A(z^*)$ l'insieme aperto, intersezione dei semipiani $P(z^*,\ z^{**})$, dove z^* è fisso e z^{**} descrive l'insieme dei punti singolari della funzione $f^{**}(z)$:

$$A(z^*) = \bigcap_{z^{**}} P(z^*,\ z^{**})\,.$$

Costruito l'analogo campo $A(z^*)$ per ogni $z^* \not\equiv z^{**}$, il campo G di permanenza della struttura lacunare si ottiene come riunione degli $A(z^*)$:

$$G = \bigcup_{z^* \not\equiv z^{**}} \left\{ \bigcap_{z^{**}} P(z^*,\ z^{**}) \right\}.$$

3°) Nel caso in cui sia $\overline{E}(f^*) \subset E(f^{**})$ la struttura lacunare permane in tutto il campo di esistenza $E(f)$ $\left(\equiv E(f^*)\right)$ della funzione $f(z)$.