Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 227-250

DELFINA ROUX (*)

Sul minimo modulo delle funzioni intere di genere zero.

1. - Introduzione.

Sia

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n \qquad (z = x + iy = r\, e^{i\theta})$$

una funzione intera e poniamo, seguendo le notazioni usuali,

$$M(r) = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq r} |\, f(z)\, |\,, \qquad m(r) = \min_{|z| = r} |\, f(z)\, |\,,$$

$$n(r) = [\text{numero degli zeri di } f(z) \text{ nel cerchio } |\, z\,| \leqq r],$$

$$N(r) = \int_0^r t^{-1}\, n(t)\, \mathrm{d}t \qquad \text{nell'ipotesi } f(0) \neq 0.$$

Per il classico teorema di JENSEN risulta $(\,|\, f(0)\,| = 1)$

$$N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|\, f(re^{i\theta})\,|\, \mathrm{d}\theta = [\text{media di } \log|\, f(z)\,| \text{ in } (0,\, 2\pi)]\,.$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Milano, Italia.

Gli studi riguardanti l'andamento del minimo modulo $m(r)$ (che ovviamente è molto più irregolare di quello del massimo modulo) costituiscono un vasto insieme nel quale una massima parte viene rivolta alle funzioni intere di piccolo ordine ([1]).

Riportiamo qui, come tipici, i seguenti teoremi nei quali si denota con ϱ l'ordine di $f(z)$, cioè l'estremo inferiore dei numeri α tali che $\log M(r) = O(r^\alpha)$, e con $\{\varrho, \tau\}$ la classe delle funzioni intere di accrescimento (ϱ, τ), cioè delle funzioni di ordine $\leqq \varrho$ e, se di ordine $= \varrho$, per le quali risulta

$$\limsup_{r \to \infty} \{ r^{-\varrho} \log M(r) \} = \tau \qquad (0 \leqq \tau \leqq \infty).$$

Teorema di J. E. Littlewood - A. Wiman - G. Valiron.
Se $f(z) \in \{\varrho, 0\}$ con $0 < \varrho < 1$, allora

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log m(r)}{\log M(r)} \geqq \cos \pi \varrho .$$

Teorema di J. Hadamard - G. Valiron - N. G. Chebotarëv - N. N. Meiman.
Se $f(z) \in \{\varrho, \tau\}$, comunque vengano scelti $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$, $k > 1$ esiste un $H = H(\eta, k)$ tale che per R abbastanza grande si abbia

$$\log |f(z)| > -H(\tau + \varepsilon)(kR)^\varrho, \qquad |z| \leqq R,$$

quando si escludano i valori di z appartenenti, nel cerchio $|z| \leqq R$ del piano complesso, a un sistema di cerchi per i quali la somma dei raggi non supera $2\eta k R$.

Teorema di A. S. Besicovitch.
Se $0 < \varrho < 1/2$ e $\varepsilon > 0$, la densità superiore dell'insieme dei valori di r pei quali $\log m(r) > r^{\varrho - \varepsilon}$ è almeno $1 - 2\varrho$.

Teorema di B. Amirà.
Se $0 < \varrho < 1$ e $\varepsilon > 0$, risulta

$$\log m(r) > (\cos \pi\varrho - \varepsilon) \log M(r) \qquad \text{per} \qquad R_n \leqq r \leqq R_n + R_n^{1-\varrho-\varepsilon}$$

dove $R_n \to +\infty$.

([1]) Per una sintesi e una vasta bibliografia vedasi, per esempio, R. P. Boas (jr.). **Entire Functions,** Academic Press, New York 1954 (cfr. Chap. 3, pp. 39-54).

Teorema di M. L. CARTWRIGHT.

Se $0 < \varrho \leqq 1$, si verifica necessariamente una almeno delle due circostanze seguenti:

1°) La densità superiore dell'insieme dei valori di r pei quali

$$\log m(r) > (\cos \pi\varrho - \varepsilon) \log M(r)$$

risulta 1 per ogni $\varepsilon > 0$.

2°) Risulta

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log m(r)}{\log M(r)} = K > \cos\pi\varrho .$$

Nel secondo caso la densità superiore dell'insieme dei valori di r pei quali $\log m(r) > \cos \pi\varrho \cdot \log M(r)$ supera una funzione $\delta(K)$ definita e positiva per $K > \cos \pi\varrho$.

Teorema di R. P. BOAS (jr.) - R. C. BUCK - P. ERDÖS.

Per ogni $\lambda > 1$ esiste un numero K $(0 < K < \lambda^{-1})$, lo stesso per tutte le funzioni intere $f(z)$, tale che $\overline{D}(E_\lambda) \leqq K$, dove $\overline{D}(E_\lambda)$ è la densità planare superiore dell'insieme E_λ dei punti z nei quali è valida la disuguaglianza

$$\log | f(z) | \leqq (1 - \lambda) \log M(r) .$$

La presentazione di questi teoremi ci consente di inquadrare meglio il problema che ci siamo posti e il significato della soluzione trovata.

Sia

$$(1.1) \qquad f(z) = 1 + \sum_1^\infty a_n z^n = \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \qquad [f(0) = 1, \ | z_k | = r_k]$$

una funzione di genere zero, cioè per la quale $\sum_1^\infty (1/r_k)$ converge, e poniamo

$$(1.2) \qquad Q(r) = r \int_r^\infty t^{-2}\, n(t)\, dt = n(r) + r \sum_{r_k > r} (1/r_k) = n(r) + r\,\omega(r)$$

$$[\omega(r) \to 0 \qquad \text{per} \qquad r \to +\infty].$$

Allora è noto che il logaritmo del massimo modulo $M(r)$ verifica la limitazione seguente:

$$N(r) \leqq \log M(r) \leqq N(r) + Q(r), \tag{1.3}$$

mentre il minimo modulo $m(r)$ verifica la limitazione analoga, ma più complicata,

$$N(r) - \Delta(r)\, Q(r) \leqq \log m(r) \leqq N(r), \tag{1.4}$$

dove la disuguaglianza a sinistra deve essere intesa nel seguente senso: comunque sia fissata una funzione $\Delta(r)$ divergente a $+\infty$ per $r \to +\infty$ (lentamente quanto si vuole) la disuguaglianza a sinistra vale quando si escluda sul semiasse $r > 0$ un insieme di densità lineare nulla (2).

Questa disuguaglianza si ricava facilmente da quest'altra analoga (2):

$$\log |\, f(z)\,| \geqq N(r) - \overline{\Delta}(R)\, Q(R) \qquad [\,|\,z\,| \leqq R\,(1-\delta)], \tag{1.5}$$

valida per ogni $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ quando R è abbastanza grande e quando si escluda dal cerchio $|\,z\,| \leqq R\,(1-\delta)$ del piano complesso un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi non supera εR.

Dalla (1.5) si ricava la parte a sinistra di (1.4) cambiando eventualmente la funzione $\Delta(R)$ e osservando che $N(r) \leqq N(R\,(1-\delta)) \leqq N(R)$ e inoltre il rapporto $Q(R)/Q(R\,(1-\delta))$ si mantiene limitato per δ fisso; infatti:

$$Q(R) = R\int_{R}^{+\infty} t^{-2}\, n(t)\, \mathrm{d}t < R \int_{(1-\delta)R}^{+\infty} t^{-2}\, n(t)\, \mathrm{d}t = Q\big((1-\delta)R\big)/(1-\delta)\,.$$

Consideriamo la limitazione (1.4) e poniamo il seguente quesito.

Quali sono le funzioni intere $f(z)$ di genere zero per le quali esiste una costante $K = K_f$ tale da risultare

$$\log m(r) \geqq N(r) - K_f\, Q(r), \tag{1.6}$$

quando si escludano i valori di r appartenenti a un insieme di densità nulla sul semiasse $r > 0$?

(2) Vedasi R. P. BOAS, loc. cit. in (1) (cfr. p. 49).

È possibile assegnare delle condizioni sull'andamento di $\{r_k\}$ sufficienti a garantire la (1.6) con la anzidetta modalità?

In queste funzioni intere sono contenute quelle cosiddette « regolari », cioè per le quali $r_k = (ak)^{1/\varrho}$; infatti, quando $0 < \varrho < 1$ per esse risulta (3)

$$N(r) = \frac{1}{\varrho} n(r) + O(1), \qquad Q(r) = \frac{1}{1-\varrho} n(r) + O(1),$$

$$\log m(r) = \pi \operatorname{cotg} \pi\varrho \cdot n(r) - \frac{1}{2\varrho} \log n(r) + O(1),$$

quest'ultima con le solite modalità.

Il problema consisterà nel determinare delle condizioni sufficienti, possibilmente poco restrittive. La presente Nota è dedicata a questa ricerca.

2. - La condizione $\{H;\ C_1,\ C_2\}$ e il risultato.

Siamo obbligati a stabilire in una forma opportuna una condizione alla quale deve sottostare la successione $\{r_k\}$, e lo faremo preliminarmente in questo numero.

Sia $\{r_k\}$ una successione monotona non decrescente di numeri positivi $(0 < r_1 \leqq r_2 \leqq \dots \leqq r_k \leqq \dots)$ e divergente a $+\infty$; siano R, C_1, C_2 numeri positivi; e sia H un intero $\geqq 2$.

Dividiamo l'intervallo $0 < x \leqq R$ in H parti uguali, ciascuna delle quali si dirà *intervallo elementare*:

$$hR/H < x \leqq (h+1)R/H \qquad (h = 0,\ 1,\ \dots,\ H-1), \tag{2.1}$$

e consideriamo il numero $n = n(R)$ degli $r_k \leqq R$.

Dividiamo gli intervalli elementari in due categorie:

(I) quelli contenenti un numero di punti r_k minore di $C_1 n/H$;

(II) quelli contenenti un numero di punti r_k maggiore di $C_1 n/H$;

convenendo di assegnare alla categoria (I), o alla categoria (II), o parte all'una e parte all'altra, quegli intervalli contenenti esattamente $C_1 n/H$ punti r_k.

---

(3) Vedasi, per esempio, A. S. BESICOVITCH, *On integral functions of order* < 1, Math. Ann. **97** (1927), 677-679.

Denotiamo con ν il numero degli intervalli elementari del sistema (II) (cioè quelli che presentano maggiore concentrazione di punti r_k) e denotiamo con n'' il numero complessivo dei punti r_k appartenenti a questi ν intervalli.

Intanto è evidente che

$$n'' \geqq \nu C_1 n/H \tag{2.2}$$

e quindi l'espressione $(n''/n) - (C_1\nu/H)$ è positiva o al più nulla.

Si consideri la differenza

$$\psi(H;\, C_1,\, C_2) = \frac{C_2}{(n''/n) - (C_1\nu/H)} - \log \nu\,.$$

Noi diremo che *la successione* $\{ r_k \}$ *soddisfa alla condizione* $\{ H;\, C_1,\, C_2 \}$ *quando è possibile definire una funzione* $H = H(R)$ *e scegliere due numeri positivi* C_1 *e* C_2 *in guisa che risultino verificate le seguenti proprietà di limite, intese per* $R \to +\infty$,

1°) $H(R) \to +\infty$,

2°) $\{ 1/H(R) \} \log \{ R/H(R) \} \to 0$,

3°) $n''(R)/n(R) \to 0$,

4°) $\psi(H;\; C_1,\, C_2) \to +\infty$.

Un esame del complesso di queste condizioni mostra che esse riguardano la effettiva distribuzione di $\{ r_k \}$ sull'asse reale per ciò che riguarda la loro diffusione e concentrazione.

Osservazione. Nel caso in cui la categoria (II) sia vuota, cioè $\nu = 0$, risulta $n'' = 0$: in questo caso conveniamo di assumere

$$\psi(H;\; C_1,\, C_2) = +\infty$$

e la condizione 4°) come verificata.

In relazione alla questione che ci eravamo proposti, vale il seguente

Teorema I. *Se la funzione intera* $f(z)$ *di genere zero ha la successione* $\{ r_k \}$ *dei moduli dei suoi zeri* z_k *soddisfacente alla condizione* $\{ H;\; C_1,\, C_2 \}$ *per un'opportuna scelta di* $H = H(R) \to +\infty$, C_1 *e* C_2 *costanti, allora per ogni* δ *minore di* 1 *e di* $1/(2C_1 e^{1+C_2})$ *risulta*

$$\log |\, f(z)\,| \geqq N(r) - K(C_1,\, C_2)\, Q(r) \qquad (|\, z \,| \leqq R), \tag{2.3}$$

dove

$$K(C_1,\ C_2) = \{1/(1-\delta)\}\log(1/\delta), \tag{2.4}$$

quando si escludano dal cerchio $|z| \leqq R$ *i punti* z *appartenenti a un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi è* $o(R)$ *per* $R \to +\infty$.

Ne segue immediatamente per il minimo modulo $m(r)$ il

Teorema I*. *Se la funzione* $f(z)$ *verifica le ipotesi del Teorema* I, *allora vale la disuguaglianza*

$$\log m(r) \geqq N(r) - K(C_1,\ C_2)\, Q(r)$$

per $r > 0$, *quando si escludano i valori di* r *appartenenti a un insieme avente densità nulla sul semiasse* $r > 0$.

Il Teorema I si deduce dal seguente

Teorema II. *Se* $f(z)$ *ha genere zero e* $\{r_k\}$ *soddisfa alla condizione* $\{H;\ C_1,\ C_2\}$, *allora, fissato* $\delta < 1$, $\delta < 1/(2C_1 e^{1+C_2})$, *nel cerchio* $|z| \leqq (1-\delta)R$, *per* R *abbastanza grande, è verificata la disuguaglianza*

$$\log|f(z)| \geqq N(R) - Q(R)\log(1/\delta)$$

quando si escludano i valori z *di* $|z| \leqq (1-\delta)R$ *appartenenti a un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi è* $o(R)$.

Osservazione. Per le funzioni $f(z)$ soddisfacenti alla condizione $\{H;\ C_1,\ C_2\}$ sussiste la limitazione

$$-(1+K)\, Q(r) \leqq \log\{m(r)/M(r)\} \leqq 1$$

quando per la disuguaglianza a sinistra si escludano gli r come nel Teorema I*.

3. – Valutazione al disotto della somma $\sum_{r_k \leqq R} \log|r - r_k|$.

Consideriamo la partizione degli intervalli nelle due categorie (I) e (II), e supponiamo che il sistema (II) non sia vuoto: nel caso in cui questo fosse vuoto, tutte le considerazioni successive risulterebbero estremamente più semplici. Si scelgano due interi positivi a e b in guisa da avere

$$\nu(1 + 2a + 2b) < H, \tag{3.1}$$

e riportiamo, a sinistra e a destra di ogni intervallo della categoria (II), $a+b$ intervalli elementari, conservando, di questi, tutti quelli che appartengono all'intervallo $0<x\leqq R$; si otterrà un insieme (II*) che, per la (3.1), non esaurirà l'intervallo $0<x\leqq R$; gli intervalli elementari rimasti, che sono almeno $H-\nu(1+2a+2b)$, costituiranno un sistema (I*) contenuto in (I); ogni punto $x\in(\mathrm{I}^*)$ dista da ogni $r_k\in(\mathrm{II})$ di almeno $(a+b)R/H$.

Adesso, nell'intento di presentare il caso più sfavorevole per la valutazione al disotto della somma che abbiamo in vista, supponiamo che l'intervallo elementare contenente il centro $R/2$ dell'intervallo $0<x\leqq R$ appartenga a (I*).

Denotiamo rispettivamente con

(I_0) l'intervallo elementare contenente $R/2$;

(I_a) il sistema di $2a$ intervalli elementari, in numero di a per ciascuna parte e consecutivi, vicini a (I_0);

(I_b) il sistema di $2b$ intervalli elementari, b per ciascuna parte e consecutivi, vicini a $(\mathrm{I}_0)+(\mathrm{I}_a)$;

(I_c) il sistema dei rimanenti $H-\nu(1+2a+2b)$ intervalli appartenenti a $(\mathrm{I})=(\mathrm{I}_0)+(\mathrm{I}_a)+(\mathrm{I}_b)+(\mathrm{I}_c)$;

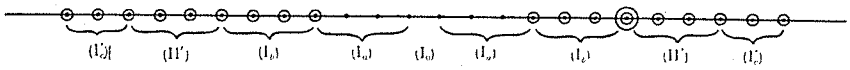
(II) il sistema dei ν intervalli del sistema (II).

Veniamo a ripartire la somma di $n(R)$ termini:

$$\sum_{r_k\leq R}\log|r-r_k|=\sum_{(0)}+\sum_{(a)}+\sum_{(b)}+\sum_{(c)}+\sum_{(\mathrm{II})}, \tag{3.2}$$

dove le somme parziali, con notazione evidente, sono estese ai numeri r_k contenuti rispettivamente nei sistemi di intervalli (I_0), (I_a), (I_b), (I_c), (II).

Adesso operiamo alcuni spostamenti degli intervalli dei sistemi (II) e (I_c) e dei punti contenuti in essi e in (I_b), nell'intento di rendere più piccola la somma $\sum\limits_{(c)}+\sum\limits_{(\mathrm{II})}$.



Consideriamo gli intervalli $j_1, j_2, \ldots, j_\nu$ di (II) e numeriamoli per numerosità decrescente (o almeno non crescente) di punti r_k contenuti: quelli che contengono egual numero di punti r_k potranno essere numerati per distanza crescente dal centro $R/2$, e le coppie eventuali equidistanti in un modo qualunque.

Lo stesso si faccia per gli intervalli $c_1, c_2, \ldots, c_{n_c}$ del sistema (I_c). Poi, alterando eventualmente la posizione, su $0 < x \leqq R$, degli intervalli, si dispongano j_1 aderente al sistema (I_b) da una parte qualunque, per esempio dalla parte destra, j_2 aderente a (I_b) dalla parte sinistra, ecc., e così via si continui alternativamente fino ad esaurire gli intervalli $j_1, \ldots, j_\nu, c_1, \ldots, c_{n_c}$ di (II) e (I_c); nelle nuove posizioni gli intervalli e i sistemi stessi si denoteranno con un apice:

$$j_1', \ldots, j_\nu', c_1', \ldots, c_{n_c}'; \ (\mathrm{II}'), \ (\mathrm{I}_c').$$

In questo spostamento tutti gli intervalli hanno subito una traslazione: adesso, in ciascun intervallo di (I_b), (II'), (I_c') trasportiamo (se già non vi fossero collocati) i punti r_k in una nuova posizione e, precisamente, in quell'estremo dell'intervallo stesso che si trova più vicino al punto $R/2$.

Ogni j_l' $(l = 1, \ldots, \nu)$ contiene all'estremo almeno $C_1 n/H$ punti; in quell'estremo ne lasciamo precisamente $C_1 n/H$ e gli eventuali sovrabbondanti li spostiamo collocandoli in quell'estremo di j_1' più prossimo a $R/2$.

Ogni intervallo di (I_b) e (I_c'), essendo della categoria (I), contiene al più $C_1 n/H$ punti collocati all'estremo; su questo stesso estremo accumuliamo precisamente $C_1 n/H$ punti, togliendoli eventualmente dagli intervalli che si trovano più lontani da $R/2$. Questi potranno a turno rimanere vuoti ed eventualmente uno di essi potrà contenere meno di $C_1 n/H$ punti.

È evidente che, dopo questa operazione, nel sistema $(\mathrm{I}_b) + (\mathrm{I}_c')$ si potranno presentare intervalli vuoti soltanto nelle parti estreme dell'intervallo $0 < x \leqq R$.

In definitiva avremo: al centro di $0 < x \leqq R$ l'intervallo (I_0) avente a sinistra e a destra il sistema (I_a) con la distribuzione originale degli r_k; poi $2b$ intervalli (b per ogni parte) di (I_b) che presentano i punti accumulati all'estremo; poi ν intervalli $j_1', \ldots, j_\nu'$ del sistema (II') i quali presentano i punti accumulati all'estremo e, in particolare, j_1' presenta una accumulazione ulteriore di $n'' - \nu C_1 n/H$ punti; poi, infine, alcuni intervalli del sistema (I_c') con la solita accumulazione.

Si veda lo schema segnato sopra che vorrebbe rendere visivo il risultato dell'operazione.

È evidente che, con le operazioni eseguite,

$\sum\limits_{(0)}$ e $\sum\limits_{(a)}$ sono rimaste inalterate;

$\sum\limits_{(b)}$, $\sum\limits_{(\mathrm{II})}$ e $\sum\limits_{(c)}$ sono rimaste inalterate o al più aumentate (continueremo a denotarle con lo stesso simbolo).

Il numero degli intervalli di $(\mathrm{I}_b) + (\mathrm{I}_c') + (\mathrm{II}')$ contenenti almeno $C_1 n/H$ punti risulta

$$L = \left[\frac{n - n_a - n''}{C_1 n/H}\right] + \nu = \frac{H}{C_1}\left\{\left(1 - \frac{n_a}{n}\right) - \frac{n''}{n}\right\} + \nu - \theta, \tag{3.3}$$

dove $0 \leqq \theta < 1$ e n_a è il numero degli r_k contenuti in $(\mathrm{I}_0) + (\mathrm{I}_a)$, ed è

$$(3.4) \qquad n_a \leqq (2a+1)C_1 n/H,$$

e pertanto

$$(3.5) \qquad L \geqq (H/C_1) - \{2a + 1 + Hn''/(C_1 n)\} + \nu - \theta \qquad (0 \leqq \theta < 1).$$

Abbiamo supposto che (I_0) fosse l'intervallo più centrale di $0 < x \leqq R$; in caso contrario potremo trasportare con una traslazione, nella posizione centrale, il sistema $(\mathrm{I}_0) + (\mathrm{I}_a)$ e poi disporre i sistemi (I_b), (II'_b), (I'_c) come sopra. È facile vedere che con questa trasformazione la somma a sinistra in (3.2) non aumenta: infatti, se (I_0) è l'intervallo elementare $hR/H < x \leqq (h+1)R/H$, possiamo considerare l'intervallo fittizio costituito da H intervalli elementari consecutivi, avente (I_0) intervallo più centrale; gli spostamenti da effettuare per passare dal sistema effettivo a quello fittizio (analogo a quello presentato) risulteranno tutti sfavorevoli, nel senso che o lasciano la somma inalterata oppure la diminuiscono.

Valutazione di $\sum\limits_{(0)} + \sum\limits_{(a)}$. Per questa valutazione ci basiamo sul noto lemma di BOUTROUX-CARTAN [4], secondo il quale risulta:

$$(3.6) \qquad \sum_{(0)} + \sum_{(a)} \geqq n_a \log B$$

quando r è scelto in $(\mathrm{I}_0) + (\mathrm{I}_a)$ e fuori di un insieme di intervalli aventi lunghezza complessiva $\leqq 2eB$.

Fissiamo $r \in (\mathrm{I}_0)$. Allora, per il modo come abbiamo disposto i punti r_k negli intervalli di (I'_b), (II') e (I'_c), possiamo dire

$$(3.7) \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{(b)} + \sum_{(\mathrm{II})} + \sum_{(c)} \geqq (n'' - \nu C_1 n/H) \log\{(a+b)R/H\} + \\ + (C_1 n/H)\{\log(aR/H) + 2\log((a+1)R/H) + \ldots + \log((a+[L/2])R/H)\}, \end{cases}$$

valida tanto nel caso di L pari quanto, a maggior ragione, in quello di L dispari.

---

[4] Vedasi, per esempio, R. P. BOAS (jr.), loc. cit. in [1] (cfr. pp. 46-47).

Poniamo

$$\mathfrak{L} = \log a + 2\log(a+1) + \ldots + 2\log(a + [(L-2)/2]) + \log(a + [L/2]);$$

allora risulta

$$(3.8)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{L} &\geqq 2\{\log a + \log(a+1) + \ldots + \log(a + [(L-2)/2])\} \\ &\geqq 2\log\{(a + [(L-2)/2])!/(a-1)!\} \\ &\geqq 2\{(a + (L-3)/2)\log(a + (L-3)/2) - (a + (L-3)/2) - \\ &\qquad\qquad - (a-1)\log(a-1) + (a-1)\} \\ &\geqq (L+2a-3)\log(L+2a-3) - L(1+\log 2) - 2a\log a + O(a)\,. \end{aligned}\right.$$

Tenendo conto della (3.3) e della (3.8) possiamo semplificare il secondo membro della (3.7):

$$(3.9)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{(b)} + \sum_{(II)} + \sum_{(c)} \geqq \\ &\geqq (n'' - \nu C_1 n/H)\log\{(a+b)R/H\} + (C_1 n/H) L \log(R/H) + \mathfrak{L} C_1 n/H = \\ &= \{n'' - \nu C_1 n/H + L C_1 n/H\}\log(R/H) + \{n'' - \nu C_1 n/H\}\log(a+b) + \\ &\qquad + \mathfrak{L} C_1 n/H = n\{1 - (n_a/n) - (\theta C_1/H)\}\log(R/H)\,. \end{aligned}\right.$$

Le due disuguaglianze (3.6) e (3.9) ci forniscono la valutazione, oggetto di questo n. **3**,

$$\sum_{r_k \leqq R} \log|r - r_k| \geqq$$

$$\geqq n_a \log B + n\{1 - (n_a/n) - (\theta C_1/H)\}\log(R/H) + (n'' - \nu C_1 n/H)\log(a+b) +$$

$$+ \mathfrak{L}\, C_1 n/H,$$

che risulta valida per $r \in (\mathrm{I}_0)$ e fuori di un sistema di intervalli di lunghezza complessiva non superiore a $2cB$.

4. – Valutazione al disotto della somma $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log |1 - (r/r_k)|$.

Poniamo

$$\Omega(R) = \sum_{r_k \leqq R} \log r_k . \tag{4.1}$$

Ripartiamo la somma da valutare:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ldots = \sum_{r_k \leqq R} \ldots + \sum_{r_k > R} \ldots = \sum_1 + \sum_2 .$$

Risulta

$$\sum_1 = \sum_{r_k \leqq R} \log |r - r_k| - \Omega(R) .$$

Sia $0 < r \leqq (1-\delta)R \quad (0 < \delta < 1)$. Allora

$$\sum_2 = -\sum_{r_k > R} \{ r/r_k + r^2/(2r_k^2) + \ldots \} = -r \sum_{r_k > R} \{ 1/r_k + r/(2r_k^2) + \ldots \} \geqq$$

$$\geqq -r(\sum_{r_k > R} 1/r_k) \{ 1 + (1-\delta)/2 + (1-\delta)^2/3 + \ldots \} = -\{ r/(1-\delta) \} \log(1/\delta) \cdot \omega(R) .$$

La valutazione eseguita nel n. **3** e le disuguaglianze precedenti ci dànno:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - (r/r_k)| \geqq n_a \log B + n \{ 1 - (n_a/n) - (\theta C_1/H) \} \log (R/H) +$$

$$+ (n'' - \nu C_1 n/H) \log (a+b) + \mathfrak{L} C_1 n/H - \Omega(R) - \{ r\omega(R)/(1-\delta) \} \log (1/\delta) .$$

Introduciamo $N(R)$ e $Q(R)$: a questo scopo osserviamo che

$$N(R) = \int_0^R t^{-1}\, n(t)\, dt = n(R) \log R - \Omega(R),$$

e quindi, tenendo presente anche la (1.2), abbiamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log |1 - (r/r_k)| \geqq N(R) - \log (1/\delta)\; Q(R) + A\, n(R), \tag{4.2}$$

dove

$$\text{(4.3)}\qquad \begin{cases} A = -\log H - \{(n_a/n) + (\theta C_1/H)\}\log(R/H) + C_1\mathfrak{L}/H + \\ \qquad + (n_a/n)\log B + \{(n''/n) - (\nu C_1/H)\}\log(a+b) + \log(1/\delta)\,. \end{cases}$$

La disuguaglianza (4.2) vale per ogni punto che verifica le seguenti proprietà:

1°) $r \leqq (1-\delta)R$;

2°) r appartiene a uno degli intervalli elementari [in numero di $H - \nu(1 + 2a + 2b)$] del sistema (I*);

3°) r non appartiene a un sistema di intervalli contenuti in $0 < x \leqq R$ aventi lunghezza complessiva

$$2\{H - \nu(1 + 2a + 2b)\}cB$$

[provenienti dall'applicazione in ogni intervallo di (I*) del lemma di BOUTROUX-CARTAN].

Per giungere alla proposizione enunciata nel n. **2** è necessario quindi supporre che sia di lunghezza relativa infinitesima la parte di $0 < x \leqq (1-\delta)R$ che viene esclusa per $R \to +\infty$; pertanto dovrà essere

$$\text{(4.4)}\qquad (a+b)\nu/H \to 0,$$

$$\text{(4.5)}\qquad HB/R \to 0\,.$$

5. – La scelta dei parametri disponibili.

Per ipotesi è, quando $R \to +\infty$,

$$\text{(5.1)}\qquad (1/H)\log(R/H) \to 0, \qquad \eta = n''/n \to 0.$$

Sappiamo [vedasi (2.2)] che è $\nu C_1 n/H \leqq n''$ e poniamo

$$\text{(5.2)}\qquad \nu = \gamma\eta H/C_1 \qquad (0 \leqq \gamma \leqq 1)\,.$$

Veniamo alla scelta di B, a, b, δ.

Per soddisfare la (4.5) poniamo

$$B = \varepsilon R/H, \qquad \text{con} \qquad \varepsilon = \varepsilon(R) \to 0\,. \tag{5.3}$$

Conviene che l'intero a sia scelto abbastanza piccolo, per esempio in guisa da avere:

$$a \log a \cdot C_1/H \to 0 \tag{5.4}$$

e, d'altronde, per la (4.4), la somma $a + b$ deve essere assegnata dall'espressione

$$a + b = \beta H/(\nu C_1), \qquad \text{con} \qquad \beta = \beta(R) \to 0\,. \tag{5.5}$$

Come numero δ si scelga:

$$\delta < 1, \qquad \delta = e^{-C_2}/(2\tau e C_1) \qquad (\tau > 1)\,. \tag{5.6}$$

6. - La valutazione finale di $\sum\limits_{r_k}$.

Con questa scelta dei parametri, procediamo a valutare il secondo membro di (4.2). Dalla (3.5) otteniamo, in base alla (5.1) e (5.2),

$$L \geqq (H/C_1)\{1 - (1-\gamma)\eta\} - 2(a+1)\,.$$

Dalla (3.8) otteniamo

$$\mathfrak{L} \geqq \{(H/C_1)(1-(1-\gamma)\eta) - 5\}\log\{(H/C_1)(1-(1-\gamma)\eta) - 5\} -$$

$$- 2a \log a - O(a) - (H/C_1)(1-(1-\gamma)\eta)(1 + \log 2)$$

e, osservando che $a \log a = o(H/C_1)$ [vedasi (5.4)], risulta

$$\mathfrak{L} \geqq (1-(1-\gamma)\eta)(H/C_1)\log(H/C_1) - (1 + \log 2 + o(1))(H/C_1)\,.$$

Siamo adesso in grado di valutare A assegnato dalla (4.3): quando si tenga conto delle (5.1), (5.3) e (5.5), otteniamo:

$$A \geqq -\log H - (2a+1)(C_1/H)\log(1/\varepsilon) + o(1) +$$
$$+ \big(1-(1-\gamma)\eta\big)\log(H/C_1) - \big(1+\log 2 + o(1)\big) +$$
$$+ (1-\gamma)\eta\log(a+b) + \log(1/\delta)\,.$$

Assumendo $\varepsilon \to 0$ abbastanza lentamente in guisa da avere, d'accordo anche con la (5.4),

$$(2a+1)(C_1/H)\log(1/\varepsilon) \to 0,$$

otteniamo

$$A \geqq \log(1/\delta) - (1-\gamma)\eta\log\{H/(C_1\cdot(a+b))\} - \log(2eC_1) + o(1)\,.$$

Il nostro scopo è di fare risultare A positivo o al più nullo, e per questo basta che sia

$$(1-\gamma)\eta\log\{H/(C_1\cdot(a+b))\} \leqq \log\big(1/(2eC_1\delta)\big) + o(1)$$

e, tenendo conto di (5.2) e (5.5),

$$(n''/n) - (\nu C_1/H) \leqq \{\log\big(1/(2eC_1\delta)\big) + o(1)\}/\log(\nu/\beta)\,.$$

Per la scelta di δ fatta in (5.6), è

$$\log\big(1/(2eC_1\delta)\big) + o(1) = \log\tau + C_2 + o(1) > C_2$$

per R abbastanza grande, e quindi basta che sia

$$(n''/n) - \nu C_1/H \leqq C_2/\log(\nu/\beta),$$

cioè

$$\text{(6.1)} \qquad \log(1/\beta) \leqq \{C_2/\big((n''/n) - (\nu C_1/H)\big)\} - \log\nu = \psi(H;\ C_1,\ C_2) \to +\infty\,.$$

Ma l'infinitesimo β non era assoggettato ad alcuna condizione e, pertanto, può essere assunto abbastanza lento da verificare la (6.1), poichè, per l'ipotesi del Teorema II, il secondo membro di (6.1) diverge a $+\infty$ per $R \to +\infty$.

7. – Il caso del sistema (II) vuoto.

Se il sistema (II) è vuoto, si ha $\nu = 0$, $n'' = 0$.

Fissato (I_0), diciamo (I_a) l'insieme costituito da a intervalli a destra e a sinistra di (I_0) e poniamo $(\mathrm{I}_b) = (\mathrm{I}) - (\mathrm{I}_0) - (\mathrm{I}_a)$. Lasciamo inalterata la posizione degli $r_k \in (\mathrm{I}_0) + (\mathrm{I}_a)$ e addensiamo quelli di (I_b) agli estremi degli intervalli come è indicato al n. **3**. Si avrà una configurazione analoga a quella precedente (verrà però a mancare il punto di ulteriore concentrazione) e il numero degli intervalli di (I_b) contenenti $C_1 n/H$ zeri (accumulati a un estremo) sarà

$$L = \left[\frac{n - n_a}{C_1 n/H}\right] = \frac{H}{C_1}\left(1 - \frac{n_a}{n}\right) - \theta \qquad (0 \leqq \theta < 1)\,. \tag{7.1}$$

Avremo

$$\sum_{(b)} \geqq n\{1 - (n_a/n) - (\theta C_1/H)\}\log(R/H) + \mathfrak{L} C_1 n/H,$$

con $\mathfrak{L}$ assegnato dalla (3.8).

Vale ancora la (4.2) con A assegnato dalla (4.3), qualora si ponga in essa $\nu = 0$, $n'' = 0$, $b = 0$.

Per ipotesi è

$$(1/H)\log(R/H) \to 0\,. \tag{7.2}$$

Si assumano B e a in guisa che siano soddisfatte, rispettivamente, le (5.3) e (5.4), e scegliamo δ come indicato dalla (5.6), dove a C_2 possiamo assegnare un valore ad arbitrio: poniamo, per esempio, $C_2 = 0$.

Dalla (7.1) si ricava, per la (3.4),

$$L \geqq H/C_1 - 2(a + 1)\,.$$

Dalla (3.8) si ottiene allora

$$\mathfrak{L} \geqq \big((H/C_1) - 5\big)\log\big((H/C_1) - 5\big) - (H/C_1)(1 + \log 2) - 2a\log a + O(a)$$

e, per la (5.4),

$$\mathfrak{L} \geqq (H/C_1)\log(H/C_1) - (H/C_1)\big(1 + \log 2 + o(1)\big)\,.$$

Segue da (4.3), per le (5.3) e (7.3),

$$A \geqq -\log C_1 - (2a+1)(C_1/H)\log(1/\varepsilon) - \big(1+\log 2+o(1)\big) + \log(1/\delta),$$

da cui, supposto che $(2a+1)(C_1/H)\log(1/\varepsilon) \to 0$, si ottiene

$$A \geqq \log\big(1/(2eC_1\delta)\big) + o(1) = \log\tau + o(1) > (1/2)\log\tau > 0,$$

in forza della (5.6).

Il Teorema II risulta così completamente dimostrato.

8. – Deduzione del Teorema I dal Teorema II.

Poniamo

$$K = \big(1/(1-\delta)\big)\log(1/\delta) = \big\{1/\big((1-\tau)(1-\delta')\big)\big\}\log(1/\delta'), \tag{8.1}$$

con $\delta' < 1$, $\delta < \delta' < 1/(2C_1e^{1+C_2})$, $0 < \tau < 1$, essendo la funzione $\big(1/(1-\delta)\big)\cdot$ $\cdot\log(1/\delta)$ decrescente in $0 < \delta < 1$.

Poniamo per un momento $R_1 = (1-\delta')R$. Il Teorema II continua a sussistere quando a δ si sostituisce δ'. Inoltre, basta osservare che

$$N(R_1) \leqq N(R), \qquad Q(R_1) \geqq (R_1/R)\,Q(R) = (1-\delta')\,Q(R),$$

per ricavare

$$\log|f(z)| \geqq N(R_1) - \big(1/(1-\delta')\big)\log(1/\delta')\cdot Q(R_1),$$

cioè (scrivendo R in luogo di R_1)

$$\log|f(z)| \geqq N(R) - \big(1/(1-\delta')\big)\log(1/\delta')\cdot Q(R)$$

per $|z| \leqq R$, quando si escludano fra i valori di questa corona circolare quelli appartenenti a un sistema di cerchi pei quali la somma complessiva dei raggi è $o(R)$ per $R \to +\infty$.

Se consideriamo la corona circolare

$$(1-\tau)R < |z| \leqq R \qquad (\tau \text{ indipendente da } R),$$

per la (8.1) otteniamo

$$\log | f(z) | \geqq N(r) - K\,Q(r) \tag{8.2}$$

per $(1-\tau)R < | z | \leqq R$, quando si escludano fra i punti di questa corona circolare quelli appartenenti a un insieme di cerchi pei quali la somma complessiva dei raggi è $\varepsilon(R)\cdot R$, con $\varepsilon(R) \to 0$ per $R \to +\infty$.

Sia k l'intero per il quale

$$(1-\tau)^k R \leqq \sqrt{R} < (1-\tau)^{k-1} R .$$

Per ogni h $(0 \leqq h \leqq k-1)$, nella corona $(1-\tau)^{h+1} R < | z | \leqq (1-\tau)^h R$ vale la (8.2), esclusi i punti z di un insieme di cerchi pei quali la somma complessiva dei raggi risulta $\varepsilon\big((1-\tau)^h R\big)\cdot(1-\tau)^h R$.

Aggiungiamo all'insieme eccezionale anche il cerchio $| z | \leqq \sqrt{R}$; allora la (8.2) risulta valida per $| z | \leqq R$, quando si escludano i punti z contenuti in un insieme di cerchi pei quali la somma complessiva dei raggi è

$$\sqrt{R} + \sum_{h=0}^{k-1} \varepsilon\big((1-\tau)^h R\big)\cdot(1-\tau)^h R = \sqrt{R} + R\sum_{h=0}^{k-1} \varepsilon\big((1-\tau)^h R\big)\cdot(1-\tau)^h .$$

Ora poniamo $\bar{\varepsilon}(R) = \operatorname*{Max}_{u \geqq R} \varepsilon(u)$: allora è

$$\varepsilon\big((1-\tau)^h R\big) \leqq \bar{\varepsilon}\big((1-\tau^h) R\big) \leqq \bar{\varepsilon}(\sqrt{R}) \to 0 \qquad \text{per} \qquad R \to +\infty,$$

e quindi la somma dei raggi non supera

$$\sqrt{R} + \bar{\varepsilon}(\sqrt{R})\cdot R \sum_{h=0}^{k-1} (1-\tau)^h < \sqrt{R} + \bar{\varepsilon}(\sqrt{R})\cdot R \sum_{h=0}^{\infty} (1-\tau)^h =$$

$$= \sqrt{R} + \bar{\varepsilon}(\sqrt{R})\cdot R/\tau = o(R),$$

e il Teorema I risulta dimostrato.

9. - Una osservazione complementare.

È possibile dalla disuguaglianza (2.3) ricavarne immediatamente altre analoghe, valide *ancora con la solita clausola*, nelle quali lo scarto dal valore medio $N(r)$ di $\log | f(z) |$ è espresso in funzione di r e di $n(r)$ anzichè $Q(r)$. Infatti:

Se $0 < \varrho < 1$ e $f(z)$ è di accrescimento (ϱ, τ) e soddisfa la condizione $\{H;\ C_1,\ C_2\}$, valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\log|f(z)| \geqq N(r) - K(C_1,\ C_2)\left\{1 + \frac{\varrho\alpha}{1-\varrho}\left(\frac{r^\varrho}{n(r)}\right)^{1/\varrho}\right\} n(r), \tag{9.1}$$

$$\log|f(z)| \geqq N(r) - K(C_1,\ C_2)\,\frac{\alpha^\varrho}{1-\varrho}\,r^\varrho, \tag{9.2}$$

essendo $K(C_1,\ C_2)$ la costante definita in (2.4) e

$$\alpha = (e\varrho\tau + \varepsilon)^{1/\varrho} \qquad (\varepsilon > 0)\,.$$

Nella prima di queste due disuguaglianze lo scarto da $N(r)$ risulta maggiorato dalla funzione $n(r)$ moltiplicata per un coefficiente in cui figura il rapporto $r^\varrho/n(r)$, che è significativo in quanto una distribuzione «normale» o «giusta» di zeri fa pensare a $n(r)$ dell'ordine di grandezza di r^ϱ.

È noto che, quando $\varrho > 0$ e $f(z)$ è di accrescimento (ϱ, τ), per ogni $\varepsilon > 0$ è

$$n(r) \leqq (e\varrho\tau + \varepsilon)\,r^\varrho \qquad \text{per} \qquad r \geqq r_0(\varepsilon)\ \text{(5)}$$

e quindi

$$1/r_k \leqq \alpha/\{n(r_k)\}^{1/\varrho} \leqq \alpha/k^{1/\varrho} \qquad [\alpha = (e\varrho\tau + \varepsilon)^{1/\varrho}],$$

da cui

$$\omega(r) = \sum_{r_k > r} 1/r_k \leqq \alpha \sum_{k > n(r)} k^{-1/\varrho} \leqq \varrho\alpha\,(1-\varrho)^{-1}\{n(r)\}^{1-1/\varrho}.$$

Ne segue, per la (1.2),

$$Q(r) = n(r) + r\,\omega(r) \leqq$$

$$\leqq n(r) + \varrho\alpha\,(1-\varrho)^{-1} r\,\{n(r)\}^{1-1/\varrho} = \left\{1 + \varrho\alpha\,(1-\varrho)^{-1}\left(\frac{r^\varrho}{n(r)}\right)^{1/\varrho}\right\} n(r),$$

e quindi si ricava la (9.1).

---

(5) Vedasi per esempio: R. P. Boas (jr.), loc. cit. in (1) (cfr. pag. 16).

D'altra parte, per la definizione di $Q(r)$, abbiamo

$$Q(r) = r\int_r^\infty t^{-2}\, n(t)\, \mathrm{d}t \leqq r\int_r^\infty \alpha^\varrho\, t^{\varrho-2}\, \mathrm{d}t \leqq \alpha^\varrho\,(1-\varrho)^{-1}\, r^\varrho,$$

e quindi segue la (9.2).

10. - Un esempio.

Indichiamo ora *un esempio di funzione intera di genere zero il cui minimo modulo, per ogni k, verifica la condizione*

$$\log m(r) < N(r) - K\, Q(r)$$

in un insieme che non è di densità lineare nulla.

Sia a un numero reale, b un numero intero con

$$1 < b < a,$$

e poniamo

$$\varphi(z) = \varphi(z;\ a,\ b) = \prod_{s=1}^{\infty}\{\,1-(z/a^s)\,\}^{b^s}\ (^6). \tag{10.1}$$

La $\varphi(z)$ ha genere zero: infatti la serie $\sum_{s=1}^{\infty} b^s/a^s = \sum_{s=1}^{\infty}(b/a)^s$ converge. Scegliamo $r = a^T(1+c)$,

$$a^T \leqq r = a^T(1+c) < a^{T+1} \qquad (0 \leqq c < a-1),$$

e calcoliamo $n(r)$, $Q(r)$, $\log m(r)$. È

$$n(r) = \sum_{s\leqq T} b^s = (b^{T+1}-1)/(b-1) = b^T(1+b^{-T-1})/(1-b^{-1}),$$

$$\omega(r) = \sum_{k>n(r)} 1/r_k = \sum_{s>T} b^s/a^s = (b/a)^{T+1}\, a/(a-b),$$

$$r\,\omega(r) = a^T(1+c)\,(b/a)^{T+1}\, a/(a-b) = b^T\, b\,(1+c)/(a-b),$$

---

(6) Questa funzione è stata usata per uno scopo analogo in R. P. Boas (jr.), R. C. Buck and P. Erdös, *The set on which an entire function is small*, Amer. J. Math. **70** (1948), 400-402.

$$(10.2)\quad \begin{cases} Q(r) = n(r) + r\,\omega(r) = B\,b^T, \\ \text{dove}\quad B = B(a,\ b,\ c) = (1 - b^{-T-1})/(1 - b^{-1}) + b\cdot(1+c)/(a-b) < \\ \qquad < b/(b+1) + ab/(a-b)\,. \end{cases}$$

Per la valutazione di $\log m(r)$ osserviamo preliminarmente che, per $0 < x < 1/2$, risulta

$$\log(1 - x) = -(1 + \theta)x \qquad (0 < \theta < 1/2),$$

e per $a^s < r$ è

$$\log|1 - (r/a^s)| = \log\{1 - a^s/r\} + \log r - \log a^s.$$

Inoltre ricordiamo che $N(r) = n(r)\log r - \sum_{r_k \leqq r} \log r_k$. Si ha

$$\log m(r) = \sum_{r_k} \log|1 - (r/r_k)| = \sum_{s=1}^{\infty} b^s \log|1 - (r/a^s)| =$$

$$= \sum_{s<T} b^s \log\{1 - (a^s/r)\} + b^T \log\{1 - (a^T/r)\} + \sum_{s\leqq T} b^s \log r - \sum_{s\leqq T} b^s \log a^s +$$

$$+ b^{T+1}\log\{1 - (r/a^{T+1})\} + \sum_{s=T+2}^{\infty} b^s \log\{1 - (r/a^s)\}.$$

Osserviamo che $1 - (a^T/r) = c/(c+1)$, $1 - (r/a^{T+1}) = 1 - (1+c)/a$,

per $s < T$ è $\qquad a^s/r \leqq a^{T-1}/r = 1/\{(1+c)a\} < 1/2,$

per $s \geqq T + 2$ è $\qquad r/a^s \leqq r/a^{T+2} = (1+c)/a^2 < 1/a < 1/2,$

e pertanto

$$\log m(r) = N(r) + b^T\,\{\log\big(c/(1+c)\big) + b\log\big(1 - (1+c)/a\big)\} -$$

$$-(1+\theta_1)\,b^T\,\{1 - (ab)^{-T}\}/\{(1+c)(ab-1)\} - (1+\theta_2)\,b^T\,b^2\,(1+c)/\{a(a-b)\},$$

cioè

$$(10.3)\qquad \log m(r) = N(r) - A\,b^T,$$

dove

$$(10.4)\quad \begin{cases} A = A(a,\ b,\ c) = \log\{1 + (1/c)\} + b\log\{a/(a-1-c)\} + \\ \qquad + (1+\theta_1)\ldots + (1+\theta_2)\ldots > \log\{1 + (1/c)\}. \end{cases}$$

Si tratta di porre in relazione la (10.3) con la (10.2) in questo senso: esiste $K = K_\varphi$ tale che si abbia

$$(10.5)\qquad \log m(r) > N(r) - K_\varphi\, Q(r)$$

quando si trascuri un insieme di densità (lineare) nulla per r?

Perchè la (10.5) sia verificata è necessario

$$A\, b^T < K_\varphi\, B\, b^T.$$

Osserviamo che, fissati φ (cioè fissati a e b), si può assumere c abbastanza piccolo da avere

$$\log\{1 + (1/c)\} > K_\varphi\{b/(b-1) + ab/(a-b)\}$$

e allora, per la disuguaglianza (10.4), la (10.5) non è verificata.

Poichè, fissato c, l'insieme degli intervalli $a^s < r \leqq a^s(1+c)$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ non ha densità nulla, per la funzione $\varphi(z)$ non si verifica la proprietà che è oggetto di studio della presente Nota.

Mostriamo adesso che per $\varphi(z)$ non è verificata la proprietà $\{H;\ C_1,\ C_2\}$ per qualunque scelta di C_1, C_2 e $H(R)$.

Fissato $R = a^T(1+c)$, con

$$a^T \leqq R = a^T(1+c) < a^{T+1} \qquad (1 + c < a),$$

consideriamo gli H intervalli elementari

$$hR/H < x \leqq (h+1)R/H \qquad (h = 0,\ 1,\ \ldots,\ H-1;\ H \geqq 2).$$

Per semplicità di scrittura poniamo $H = \lambda R$; il numero degli zeri contenuti nell'h-esimo intervallo è $\sum b^u$, dove $\lambda h < a^u \leqq \lambda\cdot(h+1)$, cioè

$$\log(\lambda h)/\log a < u \leqq \log(\lambda h)/\log a + \log\{1 + (1/h)\}/\log a,$$

e pertanto si vede che in ogni intervallo elementare il cui posto h verifica la condizione $1 + 1/h \leqq a$, ossia $h \geqq 1/(a-1)$, esiste *al più* un solo zero a^u di molteplicità b^u.

L'intervallo elementare contenente il punto a^T contiene b^T zeri, mentre il numero totale $n(R)$ degli zeri risulta

$$n(R) = b^T (1 - b^{-T-1})/(1 - b^{-1}) < \{ b/(b-1) \} b^T$$

e il rapporto fra b^T e $n(R)$ è maggiore di $(b-1)/b$.

Fissiamo la costante C_1 per la ripartizione degli intervalli elementari nelle due categorie (I) e (II), ponendo in (I) tutti quelli che contengono al più $C_1\, n(R)/H$ zeri [di intervalli che ne contengono esattamente $C_1\, n(R)/H$ ne esiste al più uno solo]; ricordiamo che $n''(R)$ denota il numero degli zeri appartenenti agli intervalli della categoria (II).

È facile riconoscere che non è possibile scegliere C_1, C_2 e H in guisa da verificare tutte le condizioni

$$H(R) \to +\infty, \qquad (\log \lambda)/H \to 0,$$

$$n''(R)/n(R) \to 0, \qquad \psi(H;\ C_1,\ C_2) \to +\infty .$$

Infatti, poichè esiste un intervallo (l'ultimo non vuoto) con b^T zeri, se questo fosse della categoria (II) non sarebbe $n''/n \to 0$; pertanto dovrà essere $C_1\, n(R)/H > b^T$, cioè

$$C_1 b^T \{ (1 - b^{-T-1})/(1 - b^{-1}) \} (1/H) > b^T,$$

$$C_1 > H(b-1)/(b - b^{-T}) .$$

Poichè per $R \to +\infty$ è $T \to +\infty$ e deve essere anche $H \to +\infty$, questa è assurda per C_1 indipendente da R.

Summary.

Let $f(z)$ be an entire function of genus 0 with $f(0) = 1$. We denote by $m(r)$ the minimum modulus of $f(z)$ for $|z| = r$, by $n(r)$ the number of the zeros of $f(z)$ in $|z| \leqq r$ and put

$$N(r) = \int_0^r t^{-1}\, n(t)\, dt, \qquad Q(r) = r \int_r^\infty t^{-2}\, n(t)\, dt.$$

We already know that there is a function $\Delta(r)$ tending arbitrarily slowly to ∞, such that

$$\log m(r) \geqq N(r) - \Delta(r)\, Q(r)$$

in a set of unit linear density.

It is interesting to note that we cannot always take a constant $K = K_f$ so that $m(r)$ satisfies the inequality

$$\log m(r) \geqq N(r) - K\, Q(r)$$

on a set of unit density.

In this Note we have established a sufficient condition, which deals with the sequence of the moduli of the zeros of $f(z)$, for the last inequality holds on a set of unit density.