Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 207-214

GIANFRANCO PANELLA (*)

Lo S_4 lineare affine come piano sopra un quasicorpo, in relazione alla proposizione configurazionale T'_2. (**)

Considerato un piano libero P^n [**1**] (1), si dice proposizione configurazionale su P^n (o teorema proiettivo) [**2**] una identificazione delle rette che congiungono a due a due tre punti (non allineati) di P^n: un teorema proiettivo è dato, ad esempio, dalla configurazione nota col nome di « teorema di DESARGUES; esso permette di caratterizzare i piani grafici irriducibili lineari sopra un corpo ([**4**], pp. 110-122).

Nella presente Nota prendo in esame il teorema proiettivo che predica l'allineamento dei punti diagonali di un quadrangolo Q', avente per vertici i punti diagonali (non allineati) di un quadrangolo Q e un vertice di Q, e che è noto come proposizione configurazionale T'_2 [**2**].

Più precisamente stabilisco i seguenti risultati:

1) a partire da un campo (corpo commutativo) γ, nel quale il polinomio $x^2 + 1$ è irriducibile, costruisco un insieme Γ, dotato di struttura algebrica, e dimostro che Γ è un quasicorpo (di VEBLEN-WEDDERBURN), ossia è un insieme dotato di due operazioni di composizione rispetto alle quali sono valide tutte le proprietà di un corpo escluse, al più, la proprietà associativa del prodotto e una delle proprietà distributive della somma rispetto al prodotto;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 15-VII-1957.

(1) I numeri in neretto e tra parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del lavoro.

2) quindi, interpretando geometricamente i risultati precedenti, ottengo un modello di piano di traslazione Σ_2^* che, come luogo di punti, coincide con lo spazio S_4 lineare affine sopra il campo γ (²);

3) dimostro, infine, che se Γ ha caratteristica $p = 3$, in Σ_2^* si verifica la proposizione configurazionale T_2'.

1. – Sia S_2 il piano lineare affine sopra un campo γ e sia Γ l'insieme dei punti di S_2, ossia l'insieme che ha per elementi le coppie ordinate (x_1, x_2) di elementi appartenenti a γ.

Avendo indicato con $A(L, \gamma)$ il gruppo delle trasformazioni lineari (non degeneri) (³) di S_2 e con ω_0 la proiettività degenere di S_2 che associa a ogni punto (x_1, x_2) il punto $(0, 0)$, si considerino i seguenti sottoinsiemi dell'insieme $A(L, \gamma) \cup \omega_0$:

1) il gruppo $\{\tau\}$ delle traslazioni di S_2;

2) l'insieme costituito dal gruppo $\{\omega\}$ delle omotetie di S_2 aventi centro in $(0, 0)$ e dalla trasformazione ω_0;

3) l'insieme $\{\alpha\}$ delle trasformazioni di S_2 del tipo

$$\alpha_a = \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 - (1 + a_1^2) a_2^{-1} x_2 \\ y_2 = a_2 x_1 - a_1 x_2, \end{cases}$$

essendo (a_1, a_2) un elemento qualsiasi di Γ per il quale $a_2 \neq 0$.

Definiamo in Γ le due seguenti operazioni di composizione:

I) detta f_1 l'applicazione di Γ in $A(L, \gamma)$ che associa a ogni elemento (a_1, a_2) di Γ la trasformazione τ_a di $\{\tau\}$ di equazioni

$$\tau_a = \begin{cases} y_1 = x_1 + a_1 \\ y_2 = x_2 + a_2, \end{cases}$$

(²) Nel caso che γ sia finito i quasicorpi che ottengo sono stati considerati da H. Neumann [**3**] per provare che esistono piani di traslazione in cui è verificata, pur non essendo universale, la configurazione di Fano; non mi risulta che sia stato considerato un modello di piano di traslazione analogo a quello descritto nella presente Nota.

(³) $A(L, \gamma)$ è, quindi, il gruppo delle collineazioni del piano lineare sopra γ le quali lasciano fissa una retta e sono inerenti all'automorfismo identico di γ ([**4**], pp. 139-148).

la somma di due elementi (b_1, b_2) *e* (a_1, a_2) *di* Γ *è l'elemento* (c_1, c_2) *di* Γ *trasformato di* (b_1, b_2) *mediante la* τ_a, *ossia*

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (c_1, c_2) = \tau_a(b_1, b_2);$$

II) detta f_2 l'applicazione di Γ in $A(L, \gamma) \cup \omega_0$ che associa ad ogni elemento (a_1, a_2) di Γ, con $a_2 \neq 0$, la trasformazione α_a di $\{\alpha\}$, ovvero, per $a_2 = 0$, l'elemento ω_a di $\{\omega\} \cup \omega_0$ che ha per equazioni

$$\omega_a = \begin{cases} y_1 = a_1 x_1 \\ y_2 = a_1 x_2, \end{cases}$$

il prodotto di due elementi (b_1, b_2) *e* (a_1, a_2) *di* Γ *è l'elemento* (d_1, d_2) *di* Γ *trasformato di* (b_1, b_2) *nella trasformazione di* $A(L, \gamma) \cup \omega_0$ *che la* f_2 *associa a* (a_1, a_2), *ossia*

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (d_1, d_2) = \begin{cases} \alpha_a(b_1, b_2) & \text{se} \quad a_2 \neq 0 \\ \omega_a(b_1, b_2) & \text{se} \quad a_2 = 0\,. \end{cases}$$

Sono essenziali, per il seguito, le seguenti osservazioni:

a) essendo l'applicazione f_1 un isomorfismo tra Γ (composto per somma) e il gruppo $\{\tau\}$, allora Γ, rispetto all'operazione di somma, è un gruppo abeliano;

b) l'elemento $(0, 0)$ di Γ, neutro rispetto all'operazione di somma, verifica le relazioni $(a_1, a_2)(0, 0) = (0, 0)(a_1, a_2) = (0, 0)$ qualunque sia (a_1, a_2) in Γ;

c) l'elemento $(1, 0)$ di Γ è neutro rispetto all'operazione di prodotto, ossia $(1, 0)(a_1, a_2) = (a_1, a_2)(1, 0) = (a_1, a_2)$ qualunque sia (a_1, a_2) in Γ;

d) se il polinomio $x^2 + 1$ è irriducibile in γ, una trasformazione di $\{\alpha\}$ non ha, in S_2, rette unite.

2. – Vale il seguente

Teorema: *Se il polinomio* $x^2 + 1$ *è irriducibile in* γ, *l'insieme* Γ, *rispetto alle operazioni di composizione in esso introdotte, è un quasicorpo di* Veblen-Wedderburn.

In virtù delle osservazioni a), b) e c) del n. precedente occorre provare che sono soddisfatti i seguenti assiomi ([**1**], p. 266):

I) in Γ è valida *la proprietà distributiva a destra* della somma rispetto al prodotto;

II) se (a_1, a_2) e (b_1, b_2) sono due elementi di Γ, con $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, *le equazioni* $(a_1, a_2)(x_1, x_2) = (b_1, b_2)$ *e* $(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ *ammettono una e una sola soluzione nell'insieme* Γ;

III) se (a_1, a_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2) sono tre elementi di Γ, *l'equazione* $(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (x_1, x_2)(b_1, b_2) + (c_1, c_2)$ *ammette, se* $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$, *una e una sola soluzione nell'insieme* Γ.

Detti (a_1, a_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2) tre elementi qualsiansi di Γ, risulta, se $c_2 \neq 0$,

$$\alpha_c(a_1, a_2) + \alpha_c(b_1, b_2) = \alpha_c[(a_1, a_2) + (b_1, b_2)] = \alpha_c[\tau_b(a_1, a_2)],$$

ossia vale la relazione

$$(a_1, a_2)(c_1, c_2) + (b_1, b_2)(c_1, c_2) = [(a_1, a_2) + (b_1, b_2)](c_1, c_2).$$

Se, poi $c_2 = 0$, la relazione precedente si prova analogamente sostituendo α_c con ω_c.

Dimostriamo, ora, la II). Cominciamo con l'osservare che la relazione $(x_1, x_2)(a_1, a_2) = (b_1 b_2)$ $[(a_1, a_2) \neq (0, 0)]$ equivale a porre, se $a_2 \neq 0$, $(b_1, b_2) = \alpha_a(x_1, x_2)$ oppure, se $a_2 = 0$, $(b_1, b_2) = \omega_a(x_1, x_2)$: l'esistenza e l'unicità dell'elemento (x_1, x_2) di Γ verificante queste relazioni sono conseguenza del fatto che α_a e ω_a appartengono a $A(L, \gamma)$.

Occorre ancora provare l'esistenza e l'unicità dell'elemento (x_1, x_2) di Γ verificante la relazione $(a_1, a_2)(x_1, x_2) = (b_1, b_2)$, ove (b_1, b_2) e $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ sono due elementi prefissati in Γ. Ciò equivale a provare che esiste ed è unico l'elemento di Γ che, mediante l'applicazione f_2, determina una trasformazione di $A(L, \gamma) \cup \omega_0$ la quale muta il punto (a_1, a_2) di S_2 nel punto (b_1, b_2).

Se risulta $b_1 = k_1 a_1$ e $b_2 = k_1 a_2$ (k_1 elemento di γ) esiste l'elemento $(k_1, 0)$ di Γ tale che $\omega_k(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$: è subito visto che tale elemento è unico se si tiene presente l'osservazione d) del n. **1** e il fatto che nella nostra ipotesi i punti $(0, 0)$, (a_1, a_2) e (b_1, b_2) sono allineati.

Se, poi, è $b_1 a_2 - a_1 b_2 \neq 0$ l'elemento (x_1, x_2) del quale si vuole provare l'esistenza e l'unicità deve avere per corrispondente, mediante la f_2, una trasformazione dell'insieme $\{\alpha\}$, ossia $x_2 \neq 0$. Ma allora, osservato che se

$\alpha_x(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$ segue $\alpha_x(-b_1, -b_2) = (a_1, a_2)$ si può affermare che x_1 e x_2 devono essere due elementi di γ che verificano il seguente sistema:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 x_1 - a_2 (1 + x_1^2)\, x_2^{-1} \\ b_2 = a_1 x_2 - a_2 x_1 \\ a_1 = -b_1 x_1 + b_2 (1 + x_1^2)\, x_2^{-1} \\ a_2 = -b_1 x_2 + b_2 x_1 . \end{cases}$$

La seconda e la quarta delle precedenti equazioni rappresentano, in S_2, due rette non parallele: le coordinate del loro punto comune (x_1, x_2) verificano il sistema. È così provata la II).

Per dimostrare la III), osservato che si può supporre che sia $(a_1, a_2)(b_1, b_2) \neq (0, 0)$, poichè, in caso contrario, la III) sarebbe conseguenza della II), è opportuno distinguere tre casi:

III$_1$) $\quad a_2 = b_2 = 0,$

III$_2$) $\quad b_2 = 0$ e $a_2 \neq 0,$

III$_3$) $\quad a_2 b_2 \neq 0 .$

Nel caso III$_1$) è, per definizione, $(x_1, x_2)(b_1, 0) + (c_1, c_2) = \tau_c[\omega_b(x_1, x_2)]$ e $(x_1, x_2)(a_1, 0) = \omega_a(x_1, x_2)$. Se $c_1 = c_2 = 0$ risulta $\omega_a(x_1, x_2) = \omega_b(x_1, x_2)$ se, e solo se, $x_1 = x_2 = 0$; se, invece, $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ esiste uno e un sol punto del piano S_2 [situato sulla retta che congiunge i punti $(0, 0)$ e (c_1, c_2)] che proviene da uno stesso punto mediante le trasformazioni ω_a e $\tau_c\, \omega_b$: esiste, cioè, uno e un solo elemento di Γ che verifica la relazione voluta.

Nel caso III$_2$) l'elemento (x_1, x_2) di Γ che si richiede è tale che x_1 e x_2 sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (a_1 - b_1)x_1 - (1 + a_1^2)a_2^{-1}\, x_2 = c_1 \\ a_2\, x_1 - (a_1 + b_1)x_2 = c_2 \end{cases}$$

il cui determinante, essendo $b_1^2 + 1$, è diverso da zero.

Il caso III$_3$), infine, si discute analogamente al caso precedente osservando che, se $a_2 \neq b_2$, il determinante del sistema cui si perviene è $a_2^{-1} b_2^{-1} \{ (b_2 a_1 - a_2 b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \} \neq 0$ mentre, se $a_2 = b_2$, esso è $(a_1 - b_1)^2$ e risulta diverso da zero poichè $(a_1, a_2) \neq (b_1, b_2)$.

È, così, dimostrato il teorema.

3. – È noto che ogni quasicorpo di VEBLEN-WEDDERBURN definisce un piano grafico affine irriducibile [**1**]: i punti del piano Σ_2 definito da Γ sono le coppie ordinate $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ di elementi estratti da Γ e le sue rette coincidono con i luoghi dei punti che con le loro coordinate verificano un'equazione dei seguenti tipi:

$$\beta_1) \qquad (y_1, y_2) = (x_1, x_2)(m_1, m_2) + (b_1, b_2),$$

$$\beta_2) \qquad (x_1, x_2) = (c_1, c_2),$$

ove (m_1, m_2), (b_1, b_2) e (c_1, c_2) sono tre elementi comunque prefissati in Γ.

Prima di porre in evidenza una notevole proprietà grafica che si realizza in Σ_2 se il campo γ ha caratteristica 3 (e ciò sarà fatto nel n. **4**) è opportuno costruire un modello di Σ_2. A tale scopo si osservi che si può porre una corrispondenza biunivoca tra i punti di Σ_2 e i punti dell'S_4 lineare affine sopra il campo γ: una tale corrispondenza si ottiene associando al punto $[(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ di Σ_2 il punto $X = (x_1, x_2, y_1, y_2)$ di S_4. D'altronde lo S_4 è il prodotto dello S_2 lineare affine sopra γ per sè stesso mentre le β_1) e β_2) rappresentano delle corrispondenze algebriche di S_2 in sè: quindi, nello S_4, la varità immagine di una di queste corrispondenze sarà l'immagine di una retta di Σ_2 nella corrispondenza biunivoca posta tra i punti di Σ_2 e quelli di S_4, e viceversa.

Poichè le β_1) e β_2) sono delle omografie di S_2 esse avranno per immagini in S_4 dei piani; tra questi quelli passanti per il punto (0, 0, 0, 0) si possono rappresentare con equazioni dei seguenti tipi:

$$\gamma_1) \qquad y_1 - m_1 x_1 + (1 + m_1^2) m_2^{-1} x_2 = y_2 - m_2 x_1 + m_1 x_2 = 0 \qquad (m_2 \neq 0),$$

$$\gamma_2) \qquad y_1 - m_1 x_1 = y_2 - m_1 x_2 = 0,$$

$$\gamma_3) \qquad x_1 = x_2 = 0 \, .$$

I piani γ_1) rappresentano in S_4 le trasformazioni di $A(L, \gamma)$ provenienti, mediante l'applicazione f_2, da elementi del tipo (m_1, m_2) $(m_2 \neq 0)$ di Γ e i piani γ_2) rappresentano le trasformazioni di $A(L, \gamma) \cup \omega_0$ provenienti, sempre mediante la f_2, da elementi del tipo $(m_1, 0)$ di Γ; il piano γ_3), infine, è immagine di una retta di Σ_2 avente *coefficiente angolare infinito*.

Tutti gli altri piani di S_4 che provengono da rette di Σ_2 nella corrispondenza biunivoca già definita si ottengono da quelli caratterizzati mediante le γ_1), γ_2) e γ_3) con una traslazione arbitraria di S_4.

Detto $\{p\}$ l'insieme dei piani di S_4 a cui si perviene, valgono i seguenti assiomi:

1) esistono, in S_4, quattro punti a tre a tre non situati sopra un piano dell'insieme $\{p\}$;

2) due punti (distinti) di S_4 individuano uno e un sol piano dell'insieme $\{p\}$;

3) due piani p_1 e p_2 appartenenti all'insieme $\{p\}$ hanno, al più, un punto comune;

4) se p_1 è un piano dell'insieme $\{p\}$ e P è un punto di S_4, e se, inoltre, $P \notin p_1$, esiste uno e un sol piano p_2 appartenente all'insieme $\{p\}$, passante per P e privo di punti comuni con p_1.

Ciò significa che se si considera l'insieme Σ_2^* che ha per elementi i punti di S_4 e se si dicono sue rette i piani di $\{p\}$, si può affermare che Σ_2^* è un piano grafico irriducibile.

D'altronde Σ_2^* è isomorfo, per costruzione, a Σ_2: esso è, perciò, un piano grafico di traslazione (o piano microdesarguesiano rispetto alla retta impropria), ossia vi esistono tutte le omologie speciali aventi per asse la retta impropria.

4. – Un quadrilatero A_1, A_2, A_3, A_4 di un piano grafico irriducibile è atto a generare la proposizione configurazionale T_2' se i suoi punti diagonali D_1, D_2, D_3 non sono allineati e se il quadrilatero che ha per vertici i punti D_1, D_2, D_3 e uno dei punti A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ ha i punti diagonali allineati [**2**].

Mi propongo di dimostrare la seguente proposizione:

Se il quasicorpo Γ ha caratteristica tre (ossia, se il campo γ ha caratteristica tre), ogni punto del piano Σ_2^* è vertice di un quadrilatero atto a generare la proposizione configurazionale T_2'.

Poichè il piano grafico irriducibile affine Σ_2^* ammette un gruppo di collineazioni in sè transitivo sui suoi punti (e tale gruppo è costituito dalle traslazioni esistenti in Σ_2^* poichè esso è un piano sopra un quasicorpo) basterà far vedere, per dimostrare completamente il teorema, che esistono quattro punti di Σ_2^* che sono vertici di un quadrangolo atto a generare la proposizione configurazionale T_2'. Un tale quadrangolo ha per vertici i punti $A_1 = (1, 1, -1, -1)$, $A_2 = (0, -1, 0, 1)$, $A_3 = (1, 1, 1, 1)$ e $A_4 = (0, -1, 0, -1)$. Infatti, come verificheremo, valgono le seguenti proprietà:

1) i punti A_1, A_2, A_3, A_4 sono tali che tre qualunque di essi non risultano allineati;

2) i punti D_1, D_2, D_3, punti diagonali del quadrangolo A_1, A_2, A_3, A_4 non sono allineati;

3) il quadrangolo A_2, D_1, D_2, D_3 ha i punti diagonali allineati.

Infatti le rette congiungenti a due a due i punti A_1, A_2, e A_3 hanno equazioni:

$$p_{1,2}: \quad y_1 + x_1 = y_2 + x_2 = 0,$$

$$p_{1,4}: \quad y_1 - x_1 + x_2 + 1 = y_2 + x_1 + x_2 + 1 = 0,$$

$$p_{2,4}: \quad x_2 + 1 = x_1 = 0$$

(ove con $p_{i,k}$ si indica la retta congiungente i punti A_i e A_k), esse risultano, quindi, distinte e non contengono il punto A_3.

I punti diagonali del quadrangolo piano A_1, A_2, A_3, A_4 sono i punti $D_1 = (0, 0, 0, 0)$, $D_2 = (1, 0, 0, 0)$ e D_3 coincidente con *la direzione* definita dalla retta $x_1 = x_2 = 0$: D_3 non appartiene alla retta (congiungente i punti D_1 e D_2) che ha per equazioni $y_1 = y_2 = 0$.

Con semplici calcoli si verifica, inoltre, che il quadrangolo che ha per vertici i punti D_1, D_2, D_3, A_2 ha per punti diagonali i punti $E_1 = (0, 0, 1, -1)$, $E_2 = (0, -1, 0, 0)$, $E_3 = (1, 0, -1, 0)$; questi ultimi punti sono allineati, poichè il punto E_3 appartiene alla retta (congiungente E_1 e E_2) di equazioni

$$y_1 - x_1 - x_2 - 1 = y_2 - x_1 + x_2 + 1 = 0.$$

Bibliografia.

[1] M. Hall: *Projective planes*, Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943), 229-277.

[2] L. Lombardo-Radice: *Su alcuni caratteri dei piani grafici*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 312-345.

[3] H. Neumann: *On some finite non-desarguesian planes*, Arch. Math. **6** (1954), 36-40.

[4] B. Segre: **Lezioni di Geometria moderna**, Vol. **I**, N. Zanichelli, Bologna 1948.