Riv. Mat. Univ. Parma 8 (1957), 73-80

LUANA BATTAGLIA (*)

Sul principio dell'effetto giroscopico nei solidi autoeccitati. (**)

1. - Per i solidi a struttura giroscopica con un punto fisso, il principio dell'effetto giroscopico si concretizza, come ha fatto rilevare anni fa il Prof. SIGNORINI **[1]** (¹), cui si deve la prima giustificazione teorica del principio stesso, in una approssimazione non per il momento $\boldsymbol{K}$ della quantità di moto, ma per il suo derivato $\dot{\boldsymbol{K}}$. Più precisamente, per un giroscopio G, detto $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse giroscopico, C il momento d'inerzia rispetto a $\boldsymbol{k}$, A quello rispetto ad un asse perpendicolare a $\boldsymbol{k}$, e subordinatamente alla triplice condizione che:

a) la velocità r_0 iniziale di rotazione intorno all'asse giroscopico sia « molto grande » in confronto alla velocità iniziale equatoriale e_0,

b) il momento delle forze esterne $\boldsymbol{M}$ sia costantemente normale all'asse giroscopico,

c) il momento delle forze esterne sia inizialmente nullo,
il principio dell'effetto giroscopico consiste nella sostituzione dell'equazione esatta di moto

$$C\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} + A\, \boldsymbol{k} \wedge \ddot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M} \tag{1.1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.
(**) Ricevuto il 27-III-1957.
(¹) I numeri in neretto e in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

con l'equazione ridotta

$$Cr_0\,\dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}\,. \tag{1.2}$$

Più di recente F. STOPPELLI [**2**] ha esteso le considerazioni del Prof. SIGNORINI al caso di un solido R a struttura qualsiasi, e, ancor più in generale, al caso di solidi mutuamente vincolati senza attrito [**3**].

D'altra parte, quasi contemporaneamente si sviluppava, ad opera di R. GRAMMEL [**4**] e di alcuni collaboratori, la teoria dei moti di R in condizioni di sollecitazione che non trovano riscontro nella teoria classica dei moti di un solido intorno ad un punto. Nell'ipotesi, precisamente, che il momento delle forze attive avesse la sua origine in una emissione di particelle da parte di R, che tuttavia non alteri sensibilmente la massa ed i momenti principali del solido. Tale studio, suggerito manifestamente da questioni riguardanti la dinamica dei missili, è stato principalmente sviluppato nel caso, di notevole interesse, in cui il momento $\boldsymbol{M}$ delle forze ha direzione costante nel corpo.

In questa Nota ho cercato di stabilire, adattando opportunamente il procedimento del Prof. SIGNORINI, se la validità del principio dell'effetto giroscopico, così utile nel caso classico, in cui principalmente la forza agente si riduce al peso, potesse estendersi anche al caso di GRAMMEL, in cui il momento ha direzione costante nel corpo. Ciò non è. Nel caso in esame il principio assume una forma differente dal caso classico per l'intervento nella (1.2), al posto di C, della differenza $C - A$ tra il momento giroscopico e quello equatoriale. Il procedimento dimostrativo mette bene in luce la ragione di questa differenza, per cui si può tra l'altro concludere che *per la validità del principio dell'effetto giroscopico nella sua forma* (1.2) *è necessaria una effettiva variazione di* $\boldsymbol{M}$ *entro* G.

2. – Pensiamo ormai R specializzato nel giroscopio G; indico con O un punto dell'asse giroscopico, con $\boldsymbol{k}$ il versore dell'asse stesso e con

$$\boldsymbol{\omega} = r\boldsymbol{k} + \boldsymbol{e}$$

la velocità di rotazione di G in un suo moto attorno ad O. Indico ancora con C il momento d'inerzia di G rispetto a $\boldsymbol{k}$, e con A il momento d'inerzia rispetto ad un qualsiasi asse per O normale a $\boldsymbol{k}$; ed infine con $\boldsymbol{M}$ il momento, rispetto ad O, delle forze applicate a G, momento che suppongo di direzione invariabile nel corpo e sempre normale a $\boldsymbol{k}$. Assunta come terna solidale una terna principale di centro O, senza perdere in generalità potrò dunque supporre che $\boldsymbol{M}$ abbia la direzione di uno degli assi solidali, ad esempio dell'assse x. Nel caso in esame ci si riduce alle prime due equazioni di EULERO:

$$\left\{\begin{array}{l} A\dot{p} - (A - C)qr = M_x \\ A\dot{q} - (C - A)pr = 0\,, \end{array}\right. \tag{2.1}$$

la terza equazione non facendo che aggiungere la condizione

$$r = r_0 \qquad (r_0 = \text{cost.}). \tag{2.2}$$

Inoltre nelle (2.1) M_x va inteso, al più, funzione del tempo, che supporrò continua e limitata almeno con la sua derivata prima.

Ponendo

$$(C - A)/A = a, \qquad M_x/A = m, \tag{2.3}$$

la (2.2) riduce le (2.1) al sistema di equazioni ordinarie:

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{p} + a\, r_0\, q = m \\ \dot{q} - a\, r_0\, p = 0\,. \end{array}\right. \tag{2.4}$$

Il sistema omogeneo corrispondente ammette la soluzione generale

$$\left\{\begin{array}{l} p = i\, c_1\, e^{iar_0t} + i\, c_2\, e^{-iar_0t} \\ q = c_1\, e^{iar_0t} - c_2\, e^{-iar_0t}\,. \end{array}\right. \tag{2.5}$$

Per determinare un integrale particolare di (2.1) applico il metodo di LAGRANGE, considerando c_1 e c_2 quali funzioni incognite di t. Ottengo così il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} i\, \dot{c}_1\, e^{iar_0t} + i\, \dot{c}_2\, e^{-iar_0t} = m \\ \dot{c}_1\, e^{iar_0t} + \dot{c}_2\, e^{-iar_0t} = 0\,, \end{array}\right. \tag{2.6}$$

che dà:

$$\left\{\begin{array}{l} c_1 = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot e^{-iar_0\tau}\, d\tau + \dfrac{k_1}{2} \\[2ex] c_2 = \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot e^{iar_0\tau}\, d\tau + \dfrac{k_2}{2}\,, \end{array}\right. \tag{2.7}$$

con k_1 e k_2 costanti. La soluzione generale delle (2.1) resta pertanto espressa da

$$
(2.8) \qquad \begin{cases} p = \dfrac{i}{2}\left(k_1\, e^{i\, r_0 t} + k_2\, e^{-i\, r_0 t}\right) + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\left(e^{i\, r_0\cdot(t-\tau)} + e^{-i\, r_0\cdot(t-\tau)}\right)\, \mathrm{d}\tau \\[2ex] q = \dfrac{1}{2}\left(k_1\, e^{i\, r_0 t} - k_2\, e^{-i\, r_0 t}\right) + \dfrac{1}{2i}\displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\left(e^{i\, r_0\cdot(t-\tau)} - e^{-i\, r_0\cdot(t-\tau)}\right)\, \mathrm{d}\tau\,. \end{cases}
$$

Con l'aggiunta delle condizioni iniziali

$$
(2.9) \qquad p(0) = p_0, \qquad q(0) = q_0,
$$

le (2.8) diventano

$$
(2.10) \qquad \begin{cases} p = p_0\cdot\cos(ar_0 t) - q_0\cdot\operatorname{sen}(ar_0 t) + \displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\cos\left\{ar_0\cdot(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\[2ex] q = q_0\cdot\cos(ar_0 t) + p_0\cdot\operatorname{sen}(ar_0 t) + \displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\operatorname{sen}\left\{ar_0\cdot(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau\,. \end{cases}
$$

3. – Poniamoci ora in particolari condizioni iniziali; supponiamo cioè

$$
(3.1) \qquad p_0 = q_0 = 0\,,
$$

il che, essendo

$$
(3.2) \qquad \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{k} = q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j},
$$

equivale a supporre

$$
\dot{\boldsymbol{k}}_0 = 0\,.
$$

In tali ipotesi le (2.10) si riducono a

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} p = \displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\cos\left\{ar_0\cdot(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau \\[2ex] q = \displaystyle\int_0^t m(\tau)\cdot\operatorname{sen}\left\{ar_0\cdot(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau\,. \end{cases}
$$

Supporrò anche, nel seguito, che $\boldsymbol{M}$ nell'istante iniziale sia nullo:

$$\boldsymbol{M}(0) = 0\,. \tag{3.4}$$

4. – Per arrivare, nel nostro caso, ad una formulazione del principio dell'effetto giroscopico, ci varremo di un lemma dimostrato dal Prof. SIGNORINI [**1**]. Data una funzione del tipo

$$I(t,\,\chi) = \int_0^t f(\tau,\,\chi)\cdot \operatorname{sen}\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.1}$$

intendendo che $f(t,\,\chi)$ sia una funzione di τ che in tutto l'intervallo $(0,\,t)$, al tendere a zero di χ, si conservi limitata insieme alla sua derivata $\partial f(t,\,\chi)/\partial\chi$, in virtù del detto lemma si può stabilire che

$$\lim_{\chi\to 0} I(t,\,\chi) = 0\,. \tag{4.2}$$

Lo stesso manifestamente avviene per un integrale del tipo

$$I(t,\,\chi) = \int_0^t f(t,\,\chi)\cdot \cos\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau\,. \tag{4.3}$$

5. – Pongo ora

$$a r_0 = 2\pi/\chi\,. \tag{5.1}$$

Le (3.3) potranno perciò sostituirsi con

$$\left\{\begin{aligned} p &= \int_0^t m(\tau)\cdot\cos\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau \\ q &= \int_0^t m(\tau)\cdot\operatorname{sen}\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau\,. \end{aligned}\right. \tag{5.2}$$

Prendo in esame le due funzioni di t e χ, per $t, \chi > 0$,

$$(5.3)\qquad \begin{cases} A(t,\ \chi) = \int\limits_0^t m(\tau)\cdot\cos\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau \\ B\ (t,\ \chi) = \int\limits_0^t m(\tau)\cdot\mathrm{sen}\left\{2\pi\cdot(t-\tau)/\chi\right\}\mathrm{d}\tau\,, \end{cases}$$

e, quali funzioni di χ, ne considero per ogni t lo sviluppo in serie di MAC LAURIN:

$$(5.4)\qquad \begin{cases} A(t,\ \chi) = A(t,\ 0) + \chi\cdot\left(\dfrac{\partial A}{\partial\chi}\right)_{\chi=0} + \ \dots \\ B(t,\ \chi) = B(t,\ 0) + \chi\cdot\left(\dfrac{\partial B}{\partial\chi}\right)_{\chi=0} + \ \dots\,. \end{cases}$$

Come ora mostrerò, in base al teorema richiamato nel n. precedente, risulta

$$\lim_{\chi\to 0} A(t,\ \chi) = 0\,, \qquad \lim_{\chi\to 0} B(t,\ \chi) = 0\,,$$

ed inoltre, ponendo ormai

$$A(t,\ 0) = 0\,, \qquad B(t,\ 0) = 0\,,$$

anche

$$\lim_{\chi\to 0}\frac{\partial A}{\partial\chi} = 0\,, \qquad \lim_{\chi\to 0}\frac{\partial B}{\partial\chi} = \frac{m}{2\pi}\,.$$

Integrando infatti per parti le (5.3) si ottiene, tenendo conto della (3.4),

$$A(t,\ \chi) = -\frac{\chi}{2\pi}\int\limits_0^t m(\tau)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{sen}\left\{\frac{2\pi}{\chi}(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\frac{\chi}{2\pi}\left[m(\tau)\cdot\mathrm{sen}\left\{\frac{2\pi}{\chi}(t-\tau)\right\}\right]_0^t + \frac{\chi}{2\pi}\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\cdot\mathrm{sen}\left\{\frac{2\pi}{\chi}(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{\chi}{2\pi}\int\limits_0^t \dot{m}(\tau)\cdot\mathrm{sen}\left\{\frac{2\pi}{\chi}(t-\tau)\right\}\mathrm{d}\tau\,,$$

$$B(t, \chi) = \frac{\chi}{2\pi} \int_0^t m(\tau) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \cos \left\{ \frac{2\pi}{\chi} (t - \tau) \right\} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{\chi}{2\pi} \left[m(\tau) \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\chi} (t - \tau) \right\} \right]_0^t - \frac{\chi}{2\pi} \int_0^t \dot{m}(\tau) \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\chi} (t - \tau) \right\} \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{\chi}{2\pi} m(t) - \frac{\chi}{2\pi} \int_0^t \dot{m}(\tau) \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi}{\chi} (t - \tau) \right\} \mathrm{d}\tau .$$

Di qui, in base al lemma considerato, si riconosce subito che

(5.5) $$\lim_{\chi \to 0} A(t, \chi) = 0, \qquad \lim_{\chi \to 0} B(t, \chi) = 0 ,$$

per cui naturalmente assumerò

(5.6) $$A(t, 0) = 0 , \qquad B(t, 0) = 0 .$$

Dopo di che, tenendo presenti le (4.1), (4.2), (4.3), si ottiene subito:

(5.7) $$\left[\frac{\partial A(t, \chi)}{\partial \chi} \right]_{\chi = 0} = 0 , \qquad \left[\frac{\partial B(t, \chi)}{\partial \chi} \right]_{\chi = 0} = \frac{m}{2\pi} .$$

Almeno finchè χ sia tanto piccolo da poter arrestare lo sviluppo di A e B ai termini del primo ordine, si potrà dunque assumere

(5.8) $$A(t, \chi) = 0 , \qquad B(t, \chi) = m/(2\pi) .$$

6. – Dall'espressione di $\dot{\boldsymbol{k}}$ [cfr. (3.2)],

(6.1) $$\dot{\boldsymbol{k}} = q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j} ,$$

si ottiene perciò nel caso attuale:

(6.2) $$\dot{\boldsymbol{k}} = \frac{\chi}{2\pi} m\boldsymbol{i} .$$

Da questa, tenendo conto delle (2.3) e (5.1), si ottiene

$$(C - A) r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}, \tag{6.3}$$

che è la nuova forma assunta dal principio dell'effetto giroscopico nel caso giroscopico autoeccitato, almeno subordinatamente alle condizioni iniziali del n. **3**. Confrontando con la formula che ci dà il principio dell'effetto giroscopico,

$$C r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}, \tag{6.4}$$

vediamo come al posto del momento rispetto all'asse giroscopico compaia la differenza tra C e il momento d'inerzia equatoriale A.

Appare quindi manifesto che per la validità del principio dell'effetto giroscopico nella forma (6.4) è almeno necessaria una effettiva variazione del momento $\boldsymbol{M}$ entro il corpo.

Osservazione. La ragione del divario constatato tra la (6.3) e (1.2) appare manifesta appena si esamini accuratamente il procedimento dimostrativo del Prof. Signorini. Accanto ad una terna di riferimento fissa e ad una solidale, egli infatti prende in considerazione anche una terna T^*, generalmente variabile e nel corpo e nello spazio, formata da $\boldsymbol{k}$, dal versore $\boldsymbol{b}$ di $\boldsymbol{M}$ e dal versore $\boldsymbol{n}$ formante con $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{k}$ una terna trirettangola destrorsa. Detta ω^* la velocità di rotazione di T^* rispetto alla terna fissa, in generale è da ritenere che ω_k^* si mantenga limitata al tendere di χ a zero (e perciò di r_0 all'infinito) di modo che un termine della forma $\chi\omega_k^*/(2\pi)$ che figura nella dimostrazione (e che figurerebbe anche nella attuale trattazione *se fosse stato esattamente seguito* il procedimento del Prof. Signorini) tende a zero al tendere di χ a zero. Nel caso esaminato, invece, ω_k^* coincide con r_0, di modo che il termine suddetto risulta proprio costante. La sua presenza si traduce in quella di $-A$ nella (6.3).

Bibliografia.

1. A. Signorini, *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della balistica esterna*, Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis Mat. Nat. (8) **1** (1946), 1-41.

2. F. Stoppelli, *Sul principio dell'effetto giroscopico*, Giorn. Mat. Battaglini (4) **80** (1950-51), 14-80.

3. F. Stoppelli, *Un'osservazione sull'applicabilità del principio dell'effetto giroscopico ai sistemi di solidi mutuamente vincolati*, Ricerche Mat. **1** (1952), 20-26.

4. R. Grammel, *Der selbserregte unsymmetrische Kreisel*, Ing.-Arch. **22** (1954), 73-97.