Riv. Mat. Univ. Parma 7 (1956), 293-309

GIUSEPPE PALAMÀ (*)

Su alcuni polinomi che generalizzano quelli di Laguerre e su altri che generalizzano quelli di Hermite ed i loro associati. (**)

Introduzione.

In lavori precedenti [1] abbiamo studiato dei polinomi, indicati con $H^{n,p}(x)$, che per $n=0$ e $n=1$ si riducono, rispettivamente, a quelli di HERMITE ed ai loro associati, per la prima volta, questi ultimi, studiati dal NIELSEN.

Dei risultati numerosi da noi stabiliti, deducendoli da altri nostri più generali, riferiamo qui i seguenti:

$$H_{n-1}(x)\cdot h_{n+p}(x) - H_{n+p}(x)\cdot h_{n-1}(x) = -(n-1)!\,e^{x^2/2}\cdot H^{n,p}(x), \tag{1}$$

$$H^{n,p+1}(x) = x\cdot H^{n+1,p}(x) - (n+1)\cdot H^{n+2,p-1}(x), \tag{2}$$

$$H^{n,p+q}(x) = H^{n,q}(x)\cdot H^{n+q,p}(x) - (n+q)\cdot H^{n,q-1}(x)\cdot H^{n+q+1,\,p-1}(x), \tag{3}$$

(*) Indirizzo: Sogliano Cavour (Lecce), Italia.

(**) Ricevuto il 10-V-1956.

([1]) Vari polinomi associati ad altri classici o più generali sono stati studiati da noi in alcuni lavori. Cfr. G. PALAMÀ: (a) *Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e di seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953), 105-122; (b) *Relazioni tra i polinomi associati alle funzioni di Laguerre e di Hermite*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9** (1954), 64-66; (c) *Polinomi più generali di altri classici e dei loro associati e relazioni tra essi. Funzioni di seconda specie*, Riv. Mat. Univ. Parma **4** (1953), 363-386; (d) *Sviluppo di alcuni polinomi che generalizzano altri classici ed i loro associati e relazioni tra essi*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **10** (1955), 233-238.

$$n! \cdot H^{n+1,p}(x) = H_n(x) \cdot G_{n+p}(x) - H_{n+p+1}(x) \cdot G_{n-1}(x), \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} H^{n,p-1}(x) = H^{n-1,p}(x) - H^{n,p}(x), \tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r} H^{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^r \binom{r}{k} H^{n-r+k,p+r}(x), \tag{6}$$

$$H^{n,2p+1}(x) = (-2)^p \frac{(p+m)!}{m!} \cdot x \cdot P^{(-1)^n/2,\, m,\, p}(x^2/2) \qquad \big(m = [(n+1)/2]\big), \tag{7}$$

nelle quali $H_n(x)$ e $h_n(x)$ sono il polinomio di HERMITE, per il quale si ha $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x)H_n(x) = n \cdot H_{n-1}(x)$, e la corrispondente funzione di HERMITE di seconda specie; inoltre $G_n(x)$ e $P^{\alpha,n,p}(x)$ sono, rispettivamente, il polinomio di NIELSEN associato a quello di HERMITE ed il polinomio che generalizza quello di LAGUERRE ed il suo associato, definiti da:

$$G_{-1}(x) = 0, \qquad G_0(x) = 1, \qquad G_{n+1}(x) - x \cdot G_n(x) + (n+1) \cdot G_{n-1}(x) = 0;$$

$$P^{\alpha,n,-1}(x) = 0, \qquad P^{\alpha,n,0}(x) = 1,$$

$$(n+q+1) \cdot P^{\alpha,n,q+1}(x) = (\alpha + 2n + 2q + 1 - x) \cdot P^{\alpha,n,q}(x) -$$
$$- (\alpha + n + q) \cdot P^{\alpha,n,q-1}(x).$$

Ricordiamo infine che

$$H^{0,p}(x) = H_p(x), \qquad H^{1,p}(x) = G_p(x),$$

come si è già notato, e che

$$P^{\alpha,0,p}(x) = L_p^{(\alpha)}(x), \qquad P^{\alpha,1,p-1}(x) = P^{\alpha,p}(x),$$

essendo $L_p^{(\alpha)}(x)$ il polinomio di LAGUERRE e $P^{\alpha,p}(x)$ il suo associato.

Ora il TOSCANO in un suo recente lavoro (²), introducendo il nuovo simbolo

---

(²) L. TOSCANO, *Formule di riduzione tra funzioni e polinomi classici*, Riv. Mat. Univ. Parma **6** (1955), 117-140.

$G_{p,\,n-1}(x)$ per i nostri $H^{n,p}(x)$, ritrova le nostre formule (1), (2), (4), (5). Egli inoltre ottiene le due formule seguenti, analoghe alla (7),

$$(8)\qquad \begin{cases} G_{2n,\,\nu}(x) = (-2)^n\, n!\cdot \Psi^{(-1/2)}_{n,\,\nu}(x^2/2) \\ G_{2n+1,\,\nu}(x) = (-2)^n\, n!\; x\cdot \Psi^{(1/2)}_{n,\,\nu}(x^2/2), \end{cases}$$

dopo aver introdotto il simbolo $\Psi^{(\alpha)}_{n,\,\nu}(x)$ per indicare un particolare polinomio, derivante dalla funzione ipergeometrica confluente (polinomio che, come vedremo, generalizza quello di LAGUERRE, cui si riduce per $n = -1$), a due variabili,

$$\Psi_1(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y)$$

di HUMBERT ([3]), che si ottiene per confluenza della F_2 di APPELL, definito dalla relazione

$$(9)\qquad \Psi^{(\alpha)}_{n,\,\nu}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!}\cdot \Psi_1(-n;\ \nu+1;\ -\alpha-2n-{}^1\!/_2,\ \alpha+1;\ 2,\ x).$$

L'interesse della nostra (7) [e delle (8)] deriva dal fatto che la (7) [e le (8)] oltre a stabilire, se si prescinde da un irrilevante fattore costante, tra il polinomio $P^{\alpha,n,p}(x)$ e $H^{n,p}(x)$ un legame analogo a quello che intercede, per le formule di SZEGÖ, fra $L^{(\alpha)}_n(x)$ e $H_n(x)$, si riferisce altresì ai polinomi $P^{\alpha,n,p}(x)$ e $H^{n,p}(x)$ che sono rispettivamente una generalizzazione di $L^{(\alpha)}(x)$ e del suo associato, e di $H_n(x)$ e del suo associato: invece i $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$ generalizzano i $L^{(\alpha)}_n(x)$ ma non, sembra, i loro associati.

Ora, poichè noi crediamo che i polinomi $\Psi^{(\alpha)}_{n,\,\nu}(x)$ sono degni di considerazione, sia per il fatto che tali polinomi per $\nu = -1$ si identificano con quelli di LAGUERRE, come si è già notato, sia per il fatto che per i $\Psi^{(\alpha)}_{n,\,\nu}(x)$ sarà dimostrata una notevole formula di riduzione quando α, ν ed n sono qualsiasi, vogliamo dare qui un contributo allo studio di tali polinomi.

In questo lavoro faremo vedere inoltre che da una nostra formula segue un risultato del TOSCANO e che dei suoi altri invece possono dedursi, quali casi particolari, da formule più generali che saranno stabilite. Infine qui saranno dàte alcune relazioni integrali per i $\Psi^{(\alpha)}_{n,\,\nu}(x)$, verrà dimostrata la natura ipergeometrica dei polinomi $P^{\alpha,n}(x)$ e saranno aggiunte varie osservazioni.

([3]) P. HUMBERT, *The confluent hypergeometric functions of two variables*, Proc. Roy. Edinburgh **41**.

§ 1. - Varie formule relative ad $H^{n,p}(x)$ e $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$. Confronti.

1. – Innanzi tutto notiamo che L. TOSCANO [4] ha stabilito una formula che tradotta nei nostri simboli è la seguente:

$$(1_1)\qquad H^{n,p}(x)=\sum_{l=0}^{[p/2]}(-1)^l\binom{p-l}{l}\cdot(n,l)\cdot H_{p-2l}(x)\,.$$

Ora questa formula, stabilita per induzione dal TOSCANO, può dedursi subito dalla nostra seguente [5]:

$$(2_1)\qquad H^{n,p}(x)=\sum_{m=0}^{[p/2]}\sum_{r_1=1}^{m}\sum_{r_2=0}^{m-r_1}\cdots\sum_{r_n=0}^{m-r_1-\dots-r_{n-1}}(-1)^m\,2^{l-m}\cdot m!\cdot\binom{p-m}{m}\binom{p-l}{p-m}\cdot x^{p-2m},$$

in cui è

$$(3_1)\qquad r_1+\dots+r_n=l.$$

Difatti se poniamo l, in (2_1), al posto di $r_1+\dots+r_n$, poichè il numero delle soluzioni intere non negative della (3_1) è

$$\binom{n+l-1}{l},$$

la (2_1) può scriversi

$$(4_1)\qquad H^{n,p}(x)=\sum_{m=0}^{[p/2]}\sum_{l=0}^{m}(-1)^m\,2^l\cdot\binom{n+l-1}{l}\cdot$$

$$\cdot(p-l)!\cdot x^{p-2m}/\{2^m\cdot(p-2m)!\cdot(m-l)!\}=$$

$$=\sum_{j=0}^{[p/2]}\sum_{l=0}^{[p/2]-j}(-1)^{j+l}\binom{n+l-1}{l}\cdot(p-l)!\,x^{p-2j-2l}/\{2^j\cdot(p-2j-2l)!\,j!\}=$$

$$=\sum_{l=0}^{[p/2]}(-1)^l\binom{n+l-1}{l}\frac{(p-l)!}{(p-2l)!}\sum_{j=0}^{[p/2]-l}(-1)^j\frac{(p-2l)!}{2^j\,j!\,(p-2l-2j)!}\,x^{p-2l-2j},$$

che, essendo l'ultima $\sum$ uguale ad $H_{p-2l}(x)$, si riduce appunto alla (1_1).

---

(4) Cfr. loc. cit. in (2).
(5) Cfr. loc. cit. in (1), lavoro (*d*).

2. – L'espressione (4_1) di $H^{n,p}(x)$ trovata nel n. precedente, cambiando p in $2p$, può scriversi

$$H^{n,2p}(x) = \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \frac{x^{2p-2m}}{2^m \cdot (2p-2m)!} \sum_{l=0}^{m} \frac{2^l \cdot (n+l-1)! \cdot (2p-l)!}{l! \cdot (n-1)! \cdot (m-l)!} =$$

$$= (2p)! \sum_{m=0}^{p} (-1)^m \frac{x^{2p-2m}}{2^m \cdot (2p-2m)! m!} \sum_{l=0}^{m} \frac{2^l \cdot (n,\ l) \cdot (-m,\ l)}{(-2p,\ l) \cdot l!} =$$

$$= (2p)! \sum_{m=0}^{p} (-1)^{p-m} \frac{x^{2m}}{2^{p-m}(2m)!(p-m)!} \sum_{l=0}^{p-m} \frac{(-p+m,\ l) \cdot (n,\ l)}{(-2p,\ l) \cdot l!} 2^l,$$

e, tenendo presente l'identità $(2p)! = 2^{2p} \cdot p! \cdot (1/2,\ p)$, anche

$$(1_2) \qquad H^{n,2p}(x) = (-2)^p \cdot (1/2,\ p) \cdot \sum_{m=0}^{p} \frac{(-p,\ m)}{(1/2,\ m) \cdot m!} \cdot F(-p+m,\ n;\ -2p;\ 2) \cdot \left(\frac{x^2}{2}\right)^m.$$

Ma la funzione ipergeometrica confluente di HUMBERT Ψ_1 ammette lo sviluppo

$$\Psi_1(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha,\ m)}{(\gamma',\ m) \cdot m!} \cdot F(\alpha+m,\ \beta;\ \gamma;\ x) \cdot y^m,$$

ed il confronto di quest'ultima con la (1_2) dà subito

$$(2_2) \qquad H^{n,2p}(x) = (-2)^p \cdot (1/2,\ p) \cdot \Psi_1(-p;\ n;\ -2p,\ 1/2;\ 2,\ x^2/2).$$

Nello stesso modo si stabilisce l'analoga formula relativa ad $H^{n,2p+1}(x)$, entrambe trovate per altra via dal TOSCANO [6].

Servendosi poi della posizione (9), a mezzo della (2_2) ed analoga, si ricavano immediatamente le (8).

---

[6] Cfr. loc. cit. in [2].

3. – Se scriviamo le (7) così

$$H^{2n-1,2p+1}(x) = (-2)^p \frac{(p+n)!}{n!} x \cdot P^{-1/2,n,p}(x^2/2), \tag{7'}$$

$$H^{2n,2p+1}(x) = (-2)^p \frac{(p+n)!}{n!} x \cdot P^{1/2,n,p}(x^2/2), \tag{7''}$$

dal confronto di queste con la seconda delle (8) si ricava

$$\Psi^{(1/2)}_{p,2n-1}(x) = \binom{p+n}{p} \cdot P^{1/2,n,p}(x), \tag{1_3}$$

$$\Psi^{(1/2)}_{p,2n}(x) = \binom{p+n+1}{p} \cdot P^{-1/2,n+1,p}(x). \tag{2_3}$$

Per $n = 0$, $n = 1$ la (1_3), e per $n = 0$, $n = -1$ la (2_3) rispettivamente dànno:

$$\left\{\begin{array}{ll} \Psi^{(1/2)}_{p,-1}(x) = L^{(1/2)}_p(x), & \Psi^{(1/2)}_{p,1}(x) = (p+1)\cdot P^{1/2,p+1}(x), \\ \Psi^{(1/2)}_{p,0}(x) = (p+1)\cdot P^{-1/2,p+1}(x), & \Psi^{(1/2)}_{p,-2}(x) = L^{(-1/2)}_p(x), \end{array}\right. \tag{3_3}$$

la prima delle quali sarà subito generalizzata.

4. – Dalla formula di definizione seguente, della Ψ_1,

$$\Psi_1(\alpha;\ \beta;\ \gamma,\ \gamma';\ x,\ y) = \sum_{r,s}^{0\ldots\infty} \frac{(\alpha,\ r+s)\cdot(\beta,\ r)}{(\gamma,\ r)\cdot(\gamma',\ s)} \frac{x^r y^s}{r!\, s!} \qquad (|x| + |y| < 1)$$

ed a mezzo della (9) si ha

$$\begin{aligned} \Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x) &= \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n,\ r+s)\cdot(\nu+1,\ r)}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ r)\cdot(\alpha+1,\ s)} \frac{2^r\, x^s}{r!\, s!} = \\ &= \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)\cdot 2^r}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ r)\cdot r!} \sum_{s=0}^{n-r} \frac{(-n+r,\ s)}{(\alpha+1,\ s)} \frac{x^s}{s!} = \\ &= \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)\cdot 2^r}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ r)\cdot r!} \cdot G(-n+r,\ \alpha+1,\ x), \end{aligned} \tag{1_4}$$

ove $G(\alpha,\ \beta,\ x)$ è la funzione di KUMMER.

Ora se si tiene presente la nota relazione

$$G(-n,\ \alpha+1,\ x) = \frac{n!}{(\alpha+1,\ n)} \cdot L_n^{(\alpha)}(x), \tag{2_4}$$

si ha

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{r=0}^{n} \frac{(-n,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)\cdot(n-r)!\cdot 2^r}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ r)\cdot(\alpha+1,\ n-r)\cdot r!} \cdot L_{n-r}^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{(\alpha+1+n-r,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)\cdot(-2)^r}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ r)\cdot r!} \cdot L_{n-r}^{(\alpha)}(x),$$

si ottiene cioè la interessante *formula di riduzione, dei polinomi ipergeometrici* $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x)$ *ai polinomi di Laguerre*, che segue

$$\boxed{\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(-\alpha-n,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)\cdot 2^r}{(-\alpha-2n-{}^1/_2,\ r)\cdot r!} \cdot L_{n-r}^{(\alpha)}(x)}\ , \tag{3_4}$$

dalla quale per $\nu = -1$ si trae

$$\Psi_{n,-1}^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(x),$$

che generalizza appunto la prima delle (3_3).

Se nella (3_4) poniamo $\alpha = -n$, si ha

$$\Psi_{n,\nu}^{(-n)}(x) = L_n^{(-n)}(x) = \frac{(-x)^n}{n!}\ .$$

5. – Si noti che la (1_4) può scriversi

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-n,\ k) \sum_{s=0}^{k} \frac{(\nu+1,\ k-s)}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ k-s)\cdot(\alpha+1,\ s)} \frac{2^{k-s}\cdot x^s}{(k-s)!\cdot s!} =$$

$$= \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,k)\cdot(\nu+1,k)\cdot 2^k}{(-2n-\alpha-{}^1/_2,\ k)\cdot k!} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{(2n+\alpha+{}^3/_2-k,\ s)\cdot(-k,\ s)}{(-\nu-k,\ s)\cdot(\alpha+1,\ s)\cdot s!} \left(\frac{x}{2}\right)^s,$$

e perciò si ha l'altro sviluppo di $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x)$ che segue

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,\ k)\cdot(\nu+1,\ k)\cdot 2^k}{(-m+1,\ k)\cdot k!}\cdot$$
$$\cdot {}_2F_2\left(-k,\ m-k;\ -\nu-k,\ \alpha+1;\ -\frac{x}{2}\right), \tag{1_5}$$

in cui $m = 2n + \alpha + (3/2)$.

Dalla (1_5), se è per esempio $\nu = 0$, $m = 0$; cioè se è $\nu = 0$, $\alpha = -2n - (3/2)$, si trae

$$\Psi_{n,0}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,\ k)}{k!}\, 2^k\cdot G\left(-k,\ \alpha+1,\ -\frac{x}{2}\right) \qquad \left(\alpha = -2n - \frac{3}{2}\right),$$

ossia, per la (2_4),

$$\Psi_{n,0}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,\ k)}{(\alpha+1,\ k)}\, 2^k\cdot L_k^{(\alpha)}\left(-\frac{x}{2}\right) \qquad \left(\alpha = -2n - \frac{3}{2}\right),$$

Se invece nella (1_5) si fa

$$\nu = -\alpha - 2n - (3/2) = -m \tag{2_5}$$

si ha analogamente

$$\frac{n!}{(\alpha+1,\ n)}\cdot\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,\ k)}{(\alpha+1,\ k)}\, 2^k\cdot L_k^{(\alpha)}\left(-\frac{x}{2}\right),$$

qualora a ν si attribuisca il valore dato dalla (2_5). Se in quest'ultima si assume, ad esempio, $\alpha = -3/2$, si ha

$$\frac{n!}{(-{}^1/_2,\ n)}\cdot\Psi_{n,-2n}^{(-3/2)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-n,\ k)}{(-{}^1/_2,\ k)}\, 2^k\cdot L_k^{(-3/2)}\left(-\frac{x}{2}\right).$$

Un'altra formuletta particolare, che si ottiene facilmente dalla (3_4), è la seguente

$$\Psi_{n,-2}^{(-1/2)}(x) = -\frac{x}{n}\cdot L_{n-1}^{(1/2)}(x).$$

6. – La (1_1) e le (8) sono state da noi stabilite con procedimento indipendente l'uno dall'altro, mentre il TOSCANO, stabilita per induzione la (1_1), ricava poi a mezzo di essa le (8). Però, poichè la (1_1) e le (8) le abbiamo derivate da una stessa formula, è ovvio che mediante le (8) si debba poter pervenire alla (1_1).

Se difatti nella (3_4) si fa $\alpha = -1/2$ e si muta x in $x^2/2$, essa può scriversi

$$(-2)^n \cdot n! \cdot \Psi_{n,\nu}^{(-1/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right) =$$

$$= (-2)^n \cdot n! \sum_{r=0}^{n} \frac{2^r \cdot (1/2 - n,\ r) \cdot (\nu + 1,\ r) \cdot (-2)^{n-r} \cdot (n-r)!}{(-2n,\ r) \cdot r! \cdot (-2)^{n-r} \cdot (n-r)!} \cdot L_{n-r}^{(-1/2)}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

cui, per le (8) e le formule di SZEGÖ, può darsi la forma

$$H^{\nu,2n}(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} \frac{(1/2 - n,\ r) \cdot (\nu,\ r)}{(-2n,\ r)} 2^{2r} \cdot H_{2n-2r}(x),$$

che, tenendo presente l'identità

$$(1_6) \qquad \binom{n}{r} \frac{(-n + 1/2,\ r)}{(-2n,\ r)} 2^{2r} = \binom{2n-r}{r},$$

si riduce appunto alla (1_1) quando in essa si muti p in $2n$.

In modo analogo si ottiene l'altra che deriva dalla stessa (1_1) cambiandovi p in $2n+1$.

7. – Stabiliamo una formula relativa a

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)\prime}(x) \equiv \frac{d}{dx} \Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x).$$

Derivando la (2_4) rispetto ad x si ha:

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)\prime}(x) = -\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-\alpha - n,\ r) \cdot (\nu + 1,\ r)}{(-\alpha - 2n - 1/2,\ r)} \frac{2^r}{r!} \cdot L_{n-1-r}^{(\alpha+1)}(x) =$$

$$= -\sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-\alpha - n,\ r) \cdot (\nu + 1,\ r) \cdot 2^r \cdot (-\alpha - 2n - 1/2 + r)}{(-\alpha - 2n - 1/2) \cdot (-\alpha - 2n + 1/2,\ r) \cdot r!} \cdot L_{n-1-r}^{(\alpha+1)}(x) =$$

$$= -\Psi_{n-1,\nu}^{(\alpha+1)}(x) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha + 2n + 1/2} \sum_{r=0}^{n-2} \frac{(-\alpha - n) \cdot (-\alpha - n + 1,\ r) \cdot (\nu + 1) \cdot (\nu + 2,\ r) 2^{r+1}}{(-\alpha - 2n + 1/2) \cdot (-\alpha - 2n + 3/2,\ r) \cdot r!} \cdot L_{n-2-r}^{(\alpha+1)}(x),$$

quindi sussiste la formula, se si muta ν in $\nu - 1$,

$$\Psi^{(\alpha)\prime}_{n,\nu-1}(x) + \frac{8\nu\cdot(\alpha+n)}{4\cdot(\alpha+2n)^2-1}\,\Psi^{(\alpha)\prime}_{n-1,\nu}(x) + \Psi^{(\alpha+1)}_{n-1,\nu-1}(x) = 0\,.$$

8. – Per stabilire una formula di moltiplicazione per i polinomi $\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(x)$ ci occorre tenere presente la nostra formula [7]

$$\frac{(k+1)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}\cdot L^{(\alpha)}_n\left(\frac{x}{k+1}\right) = \sum_{j=0}^{n} \frac{k^j}{j!\cdot\Gamma(\alpha+n-j+1)}\cdot L^{(\alpha)}_{n-j}(x)$$

che, per $k = (1-m)/m$, può scriversi

$$L^{(\alpha)}_n(mx) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha+1,\ n)\cdot(1-m)^j\cdot m^{n-j}}{j!\cdot(\alpha+1,\ n-j)}\cdot L^{(\alpha)}_{n-j}(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(\alpha+1,\ n)\cdot(1-m)^{n-j}\cdot m^j}{(\alpha+1,\ j)\cdot(n-j)!}\cdot L^{(\alpha)}_j(x),$$

cioè infine, mutando n in $n-r$,

$$L^{(\alpha)}_{n-r}(mx) = \sum_{j=0}^{n-r} \frac{(\alpha+1,\ n)\cdot(-n+j,\ r)\cdot(1-m)^{n-r-j}\cdot m^j}{(-\alpha-n,\ r)\cdot(\alpha+1,\ j)\cdot(n-j)!}\cdot L^{(\alpha)}_j(x).$$

Questa espressione di $L^{(\alpha)}_{n-r}(mx)$ portata nella (3_4), dopo avervi mutato x in mx, ci dà

$$\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(mx) = (\alpha+1,\ n)\sum_{r=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-r} \frac{2^r\cdot(\nu+1,\ r)\cdot(-n+j,\ r)\cdot m^j\cdot(1-m)^{n-r-j}}{(-\alpha-2n-{}^1/_2,\ r)\cdot r!\cdot(\alpha+1,\ j)\cdot(n-j)!}\cdot L^{(\alpha)}_j(x) =$$

$$= (\alpha+1,\ n)\sum_{j=0}^{n} \frac{m^j\cdot(1-m)^{n-j}}{(\alpha+1,\ j)\cdot(n-j)!}\cdot L^{(\alpha)}_j(x)\cdot\sum_{r=0}^{n-j}\frac{(-n+j,\ r)\cdot(\nu+1,\ r)}{(-\alpha-2n-{}^1/_2,\ r)\cdot r!}\left(\frac{2}{1-m}\right)^r,$$

---

(7) G. PALAMÀ, *Sui polinomi di Laguerre*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **71** (1938), 441-468. Cfr. p. 448.

Della generalizzazione della formula del testo si sono occupati L. TOSCANO ed E. FELDHEIM, ma ad entrambi è sfuggito il nostro risultato: cfr. L. TOSCANO, *I polinomi ipergeometrici nel calcolo delle differenze finite*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **4** (1949), 398-409.

ossia la seguente notevole formula di moltiplicazione per i polinomi $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x)$, dalla quale possono dedursi varie formule particolari interessanti, fra cui una stabilita di recente:

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx) = \frac{(\alpha+1,\ n)}{n!} \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n,\ j)\cdot(-m)^j\cdot(1-m)^{n-j}}{(\alpha+1,\ j)} \cdot$$

$$\cdot F\left(-n+j,\ \nu+1;\ -\alpha-2n-{}^1/_2;\ \frac{2}{1-m}\right)\cdot L_j^{(\alpha)}(x),$$

che può anche scriversi

$$\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha-n,\ k)\cdot m^{n-k}\cdot(m-1)^k}{k!} \cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ \nu+1;\ -\alpha-2n-{}^1/_2;\ \frac{2}{1-m}\right)\cdot L_{n-k}^{(\alpha)}(x).$$

Quest'ultima alla sua volta, se applichiamo successivamente le identità [8]

$$F(-k,\ \beta;\ \gamma;\ t) = \frac{(\beta,\ k)}{(\gamma,\ k)}(-t)^k\cdot F(-k,\ -k-\gamma+1;\ -k-\beta+1;\ 1/t),$$

$$F(-k,\ \beta;\ \gamma;\ t) = \frac{(\gamma-\beta,\ k)}{(\gamma,\ k)} F(-k,\ \beta;\ -k+\beta-\gamma+1;\ 1-t),$$

dà luogo rispettivamente alle

$$(1_8)\qquad \Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha-n,\ k)\cdot(\nu+1,\ k)\cdot 2^k\cdot m^{n-k}}{(-a+1,\ k)\cdot k!} \cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ -k+a,\ -k-\nu;\ \frac{1-m}{2}\right)\cdot L_{n-k}^{(\alpha)}(x),$$

$$(2_8)\qquad \Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha-n,\ k)\cdot(-\nu-a,\ k)\cdot(-2)^k\cdot m^{n-k}}{(-a+1,\ k)\cdot k!} \cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ -k+a;\ -k+\nu+a+1;\ \frac{1+m}{2}\right)\cdot L_{n-k}^{(\alpha)}(x),$$

---

[8] La prima delle quali è forse di L. Toscano: *Su i polinomi ipergeometrici*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **1**, 224-229.

nelle quali è

$$a = \alpha + 2n + (3/2). \tag{3_8}$$

Inoltre nella (1_8) il numero ν è reale qualsiasi, ma non intero negativo.

Le (1_8), (2_8) dànno molte formule particolari interessanti. Ad esempio, se nella (2_8) poniamo $m = -1$ si ha

$$(-1)^n \cdot \Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha - n, k) \cdot (-\nu - a, k)}{(-a + 1, k)} \frac{2^k}{k!} \cdot L_{n-k}^{(\alpha)}(-x).$$

Invece dalla (1_8) per $\nu = -a$ segue

$$\Psi_{n,-a}^{(\alpha)}(mx) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (-\alpha - n, k) \cdot m^{n-k} \cdot (1 + m)^k \cdot L_{n-k}^{(\alpha)}(x)$$

che per $m = -1$ diventa

$$\Psi_{n,-a}^{(\alpha)}(x) = (-1)^n \cdot L_n^{(\alpha)}(-x), \tag{4_8}$$

essendo a dato dalla (3_8). Se inoltre si fa in quest'ultima $\alpha = -2n$ si ha

$$\Psi_{n,-3/2}^{(-2n)}(x) = (-1)^n \cdot L_n^{(-2n)}(-x).$$

Il confronto infine fra la (1_8), ove sia cambiato per un momento ν con σ, e la (2_8) dà la notevole relazione

$$\Psi_{n,\sigma}^{(\alpha)}(-mx) = (-1)^n \cdot \Psi_{n,-\sigma-a-1}^{(\alpha)}(mx),$$

essendo a sempre il valore dato dalla (3_8), e che può scriversi

$$\Psi_{n,\sigma}^{(\alpha)}(-x) = (-1)^n \cdot \Psi_{n,-\sigma-a-1}^{(\alpha)}(x), \tag{5_8}$$

con σ numero reale qualsiasi non intero negativo.

Se in essa poniamo $\sigma = -a$ riotteniamo la (4_8). Se invece assumiamo prima $\alpha = -1/2$ e poi $\alpha = 1/2$, ed in entrambi i casi mutiamo x in $x^2/2$, con le (8) abbiamo rispettivamente, essendo $i = \sqrt{-1}$,

$$G_{2n,-\sigma-2n-2}(x) = (-1)^n \cdot G_{2n,\sigma}(ix), \qquad G_{2n+1,-\sigma-2n-3}(x) = (-1)^{n+1} i \cdot G_{2n+1,\sigma}(ix),$$

che, tenendo presente la parità di $G_{n,\nu}(x)$, dànno luogo alla formula stabilita recentemente dal TOSCANO ([9]):

$$G_{n,-\sigma-n-2}(x) = i^n \cdot G_{n,\sigma}(-ix),$$

la quale perciò è un caso particolare della (5_8).

9. – Se nella (1_8) mutiamo m in m^2 ed x in $x^2/2$, ed assumiamo $\alpha = -1/2$ prima, e poi $\alpha = 1/2$, a mezzo delle (8) e delle formule di SZEGÖ si ha rispettivamente:

$$G_{2n,\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(-n+{}^1/_2,\ k)\cdot(\nu+1,\ k)}{(-2n,\ k)}\, 2^{2k}\cdot m^{2n-2k}\cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ -k+2n+1;\ -k-\nu;\ \frac{1-m^2}{2}\right)\cdot H_{2n-2k}(x),$$

$$G_{2n+1,\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(-n-{}^1/_2,\ k)\cdot(\nu+1,\ k)}{(-2n-1,\ k)}\, 2^{2k}\cdot m^{2n+1-2k}\cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ -k+2n+2;\ -k-\nu;\ \frac{1-m^2}{2}\right)\cdot H_{2n+1-2k}(x).$$

che, per la (1_6) e la identità

$$\binom{n}{k} \frac{(-n-{}^1/_2,\ k)}{(-2n-1;\ k)}\, 2^{2k} = \binom{2n+1-k}{k},$$

dànno luogo a due formule che possono fondersi nell'unica seguente

$$G_{n,\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \cdot \binom{n-k}{k} \cdot (\nu+1,\ k)\cdot m^{n-2k}\cdot$$

$$\cdot F\left(-k,\ -k+n+1;\ -k-\nu;\ \frac{1-m^2}{2}\right)\cdot H_{n-2k}(x),$$

la quale è una formula di moltiplicazione analoga ad altra stabilita dal TOSCANO, che invece è un caso particolare della (2_8). Difatti la (2_8), procedendo

---

([9]) Cfr. loc. cit. in ([2]).

in modo analogo, ci dà invece sia quest'altra formula

$$G_{2n,\nu}(mx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{2n-k}{k} \cdot \binom{2n+\nu+1}{k} \cdot k! \cdot m^{2n-2k} \cdot$$

$$\cdot F\left(-k, -k+2n+1; -k+\nu+2n+2; \frac{1+m^2}{2}\right) \cdot H_{2n-2k}(x),$$

che l'analoga relativa a $G_{2n+1,\nu}(mx)$, ed entrambe dànno appunto luogo alla formula di moltiplicazione dei polinomi $G_{n,\nu}(x)$ del TOSCANO.

Naturalmente tutte le formule che sono già state stabilite o che lo saranno in seguito, in cui compaiono i polinomi $G_{n,\nu}(x)$ possono subito convertirsi in altre in cui figurano i nostri $H^{n,\nu}(x)$, tenendo presente la relazione

$$G_{n,\nu}(x) = H^{\nu+1,n}(x) .$$

§ 2. - Alcune relazioni integrali dei polimoni $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x)$.

1. - Si possono stabilire subito delle relazioni integrali [trasformate di LAPLACE di particolari funzioni di $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx)$] relative ai polinomi $\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(x)$. Diamone due esempi.

a) Posto

$$I_{n,\nu}^{(\alpha)}(m) = \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot [\Psi_{n,\nu}^{(\alpha)}(mx)]^2 \, dx \qquad (\alpha > -1),$$

a mezzo della (2_8) si ha

$$I_{n,\nu}^{(\alpha)}(m) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-\alpha-n, k)^2 \cdot (-\nu-a, k)^2 \cdot 2^{2k} \cdot m^{2n-2k}}{(-a+1, k)^2 \cdot (k!)^2} \cdot$$

$$\cdot F\left(-k, -k+a; -k+a+\nu+1; \frac{1+m}{2}\right) \cdot \int_0^\infty e^{-x} \cdot x^\alpha \cdot [L_{n-k}^{(\alpha)}(x)]^2 \, dx,$$

cioè

$$(1_1) \qquad I_{n,\nu}^{(\alpha)}(m) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{n} A_k^2 \cdot \binom{\alpha+n}{k}\binom{n}{k} \qquad (\alpha > -1),$$

in cui è

$$A_k = \frac{(-a-\nu,\ k)}{(-a+1,\ k)}\, 2^k \cdot m^{n-k} \cdot F\left(-k,\ -k+a;\ -k+a+\nu+1;\ \frac{1+m}{2}\right).$$

Dalla precedente (1_1) seguono varie formule interessanti, quale ad esempio [10]:

$$I^{(\alpha)}_{n,-1}(m) = \frac{1}{n!}\cdot\Gamma(\alpha+n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n}{k}\binom{n}{k}\cdot m^{2n-2k}\cdot(1-m)^{2k} \qquad (\alpha>-1),$$

dalla quale segue

$$I^{(\alpha)}_{n,-1}(-1) = \frac{1}{n!}\cdot\Gamma(\alpha+n+1)\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+n}{k}\binom{k}{n}2^{2k} \qquad (\alpha>-1),$$

Per entrambe queste due ultime formule occorre tenere presente che

$$\Psi^{(\alpha)}_{n,-1}(x) = L^{(\alpha)}_n(x).$$

b) Se si pone

$$J^{(\alpha)}_{n,\nu}(m) = \int_0^\infty e^{-x}\cdot x^\alpha\cdot\Psi^{(\alpha)}_{n,\nu}(mx)\cdot dx,$$

in modo analogo si ha

$$J^{(\alpha)}_{n,\nu}(m) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\cdot(\nu+a+1,\ n)}{n!\cdot(a,\ n)}\,2^n\cdot$$

$$\cdot F\left(-n,\ -n+a;\ -n+a+\nu+1;\ \frac{1+m}{2}\right) \qquad (\alpha>-1),$$

da cui segue ad esempio

$$J^{(\alpha)}_{n,-1}(m) = \frac{1}{n!}\cdot\Gamma(\alpha+n+1)\cdot(1-m)^n,$$

$$J^{(\alpha)}_{n,\nu}(1) = \frac{(\nu+1,\ n)}{(a,\ n)}\cdot\Gamma(a+1/2)\cdot\frac{2^n}{n!},$$

per $\alpha>-1$, il primo dei quali è notissimo.

---

[10] Dell'integrale $I^{(\alpha)}_{n,-1}(m)$ si è occupato K. MAYR: *Integraleigenschaften der Hermiteschen und Laguerreschen Polynome*, Math. Z. **39** (1935), 597-604. Il valore dato dal MAYR è però sotto forma diversa da quella del testo.

In tutte le formule di questo § si è posto

$$a = \alpha + 2n + (3/2).$$

§ 3. - Un nuovo sviluppo del polinomio $P^{\alpha,n}(x)$ associato a quello di Laguerre.

1. - Un risultato da cui emerge la natura ipergeometrica dei polinomi associati a quelli di LAGUERRE, può subito stabilirsi.

Se difatti teniamo presente la nota formula [11]

$$(n+1)!\cdot P^{\alpha,n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^j \frac{(k+j)!\cdot(n+1+j)!\cdot\Gamma(\alpha+j+k+1)}{j!\cdot k!\cdot(k+2j+1)!\cdot\Gamma(\alpha+j+1)}\cdot x^j,$$

da essa si ha

$$(n+1)!\cdot P^{\alpha,n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^j \frac{(k+j)!\cdot(n+1+j)!\cdot(\alpha+j+1,\ k)}{j!\cdot k!\cdot(k+2j+1)!}\ x^j =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m! \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \frac{(h-k)!\cdot(\alpha+m-k+1,\ k)}{(m-k)!\cdot k!\cdot(2m-k+1)!}\cdot x^{m-k} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{h!}{(2m+1)!} (-x)^m \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{(-m,\ k)\cdot(-2m-1,\ k)\cdot(-\alpha-m,\ k)}{(-h,\ k)\cdot k!\cdot x^k},$$

ossia infine

$$(n+1)!\cdot P^{\alpha,n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{h!}{(2m+1)!} (-x)^m\cdot$$

$$\cdot {}_3F_1\left(-m,\ -2m-1,\ -\alpha-m;\ -h;\ -\frac{1}{x}\right),$$

nelle quali si è posto

$$h = n + m + 1.$$

([11]) Cfr. il lavoro (a) citato in ([1]).

2. – Una formula particolarmente semplice si ottiene dal risultato precedente nel caso in cui è $\alpha = n + 1$, perchè in tal caso si ha

$$(n+1)!\cdot P^{n+1,n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{h!}{(2m+1)!}(-x)^m \cdot {}_2F_0\left(-m,\ -2m-1;\ -\frac{1}{x}\right),$$

ma è [12]

$${}_2F_0\left(-m,\ \beta;\ -\frac{1}{x}\right) = (\beta,\ m)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^m \cdot {}_1F_1(-m;\ -m-\beta+1;\ x),$$

quindi

$$(n+1)!\cdot P^{n+1,n+1}(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(n+m+1)!}{(m+1)!}\cdot {}_1F_1(-m;\ m+2;\ x) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} (m+2,\ n)\cdot G(-m,\ m+2;\ x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{(m+2,\ n)}{(m+2,\ m)}\cdot m!\cdot L_m^{(m+1)}(x),$$

ossia, se si cambia n in $n-1$,

$$n!\cdot P^{n,n}(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n+m)!}{(m+1,\ m+1)}\cdot L_m^{(m+1)}(x)\ .$$

---

(12) L. TOSCANO, *Osservazioni su particolari funzioni di Kummer*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 4 (1949), 274-278.