Rivista Mat. Univ. Parma 6, 375-388 (1955)

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Criteri di inversione per la convergenza delle successioni dalla convergenza delle successioni perturbate. (**)

1. – Introduzione. Essendo $n = 0, 1, 2, \ldots$, consideriamo due successioni $\{x_n\}$ e $\{\beta_n\}$ di numeri reali. Alla $\{x_n\}$ (successione « pura ») associamo le due successioni:

$\{X_n\}$ (successione « media »), $\{v_n\}$ (successione « perturbata »),

dove

$$X_n = (x_0 + x_1 + \ldots + x_n)/(n+1), \qquad v_n = x_n + \beta_n X_n, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Da $x_n \to 0$ (1) segue $X_n \to 0$; inoltre da $x_n \to 0$ e $|\beta_n| < K$ (K indipendente da n) segue $v_n \to 0$.

Da $v_n \to 0$ non segue in generale $x_n \to 0$, a meno che non si facciano ulteriori ipotesi: teoremi classici di J. MERCER [4] (2) e T. VIJAYARAGHAVAN [7] rispondono al quesito della deduzione di $x_n \to 0$ da $v_n \to 0$. Altri criteri sono stati studiati da vari Autori (3); anche noi ne abbiamo stabiliti alcuni in due recenti lavori ([5], [6]) (4).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

(1) Nelle relazioni di limite è ovviamente sottinteso $n \to +\infty$.

(2) I numeri entro parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del presente lavoro.

(3) Fra di essi ricordiamo G. H. HARDY [2], E. T. COPSON e W. L. FERRAR [1], J. KARAMATA [3].

(4) Nel primo di questi lavori si considera anche il caso di successioni oscillanti.

Due dei criteri classici menzionati sono i seguenti:

Teorema I (di J. MERCER). *Da* $v_n \to 0$ *e* $\beta_n = \beta > -1$ *(*β *indipendente da* n*) segue* $x_n \to 0$.

Teorema II (di T. VIJAYARAGHAVAN). *Da* $v_n \to 0$ *e* $-1 < \underline{\lim}\ \beta_n \leqq \leqq \overline{\lim}\ \beta_n < +\infty$ *segue* $x_n \to 0$.

Altri criteri noti verranno ricordati nel seguito; intanto, accanto alle successioni $\{x_n\}$, $\{X_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{v_n\}$ consideriamo le due medie

$$B_n = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n}{n+1}, \qquad V_n = \frac{v_0 + v_1 + \dots + v_n}{n+1}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Lo schema dei criteri che ci interessano è il seguente:

$$\textit{Da} \quad v_n \to 0 \quad \textit{e} \quad (\mathfrak{M}\mathfrak{S}) \quad \textit{segue} \quad x_n \to 0,$$

dove $(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$ è una condizione che viene aggiunta a $v_n \to 0$ per conseguire la sufficienza. Può sorgere il desiderio di formulare $(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$ nel modo meno restrittivo possibile; in ogni caso $(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$ richiede informazioni sui dati e tali informazioni possono riguardare i seguenti elementi:

(A) l'andamento di $\{\beta_n\}$ (ed eventualmente di $\{B_n\}$);

(B) l'andamento di $\{v_n\}$ (ed eventualmente di $\{V_n\}$);

(C) la proprietà di $\{X_n\}$ di essere definitivamente monotona, oppure no;

(D) l'andamento delle concordanze ed opposizioni di segno della successione pura $\{x_n\}$ e della sua media $\{X_n\}$ (cioè l'informazione sulle classi di interi r e s per i quali risulta $x_r X_r \geqq 0$, $x_s X_s < 0$).

Diremo, per esempio, criteri di tipo (AB) quelli nei quali la condizione $(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$ richiede informazioni dei due tipi (A) e (B), ecc..

Noi supporremo sempre $\beta_n \geqq 0$. Osserviamo che se per ogni $n \geqq \nu$ fosse $\beta_n = 0$, risulterebbe $v_n = x_n$ per $n \geqq \nu$, e quindi $x_n \to 0$ implicherebbe $v_n \to 0$, ed inversamente: pertanto il problema della deduzione di $x_n \to 0$ da $v_n \to 0$ sussiste quando è $\beta_n > 0$ per infiniti valori di n; ne segue $B_n > 0$ per $n \geqq n^*$ conveniente.

Essendo $v_n = x_n + \beta_n X_n$, è ovvio che la condizione $(\mathfrak{M}\mathfrak{S})$ è rivolta a garantire che $\beta_n X_n \to 0$. Un classico teorema di T. VIJAYARAGHAVAN assicura che da

$v_n \to 0$ e $\beta_n > -1 + c > -1$ segue $X_n \to 0$ (5). Poichè x_n e X_n non dipendono da β_n e v_n dipende da β_n e non da β_m con $m \neq n$, ogni nuova condizione ($\mathfrak{N}$) contemplerà il caso $\beta_n \neq O(1)$ e sarà rivolta a garantire che lungo ogni successione (eventualmente parziale) $\{\beta_{n_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ con $\beta_{n_k} \to +\infty$ risulta $\beta_{n_k} X_{n_k} \to 0$. Il problema è significativo poichè, come ha osservato T. VIJAYARAGHAVAN ed è stato da noi dimostrato (6), sussiste il Teorema seguente: *Se* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, *si possono determinare due successioni* $\{x_n\}$ *e* $\{\beta_n\}$ *tali che* $\beta_n > n\varepsilon_n$, $v_n \to 0$, $\overline{\lim}\, |x_n| = +\infty$.

Quando si tenga conto della concordanza o discordanza di segno di x_n e X_n [vedasi (D)], possiamo aggiungere la seguente ovvia osservazione: da $v_r \to 0$ segue $x_r \to 0$, $\beta_r X_r \to 0$, e quindi la condizione ($\mathfrak{N}$) è rivolta a garantire che *per ogni successione parziale* $\{\beta_{s_k}\}$ *con* $\beta_{s_k} \to +\infty$ *è* $\beta_{s_k} X_{s_k} \to 0$.

Supponiamo nota $\{v_n\}$ con $v_n \to 0$; per tutti gli indici n per i quali $\beta_n = 0$ (cioè corrispondenti al «tacere» della perturbazione) è $v_n = x_n$ e il valore di X_n non comparisce; questa circostanza può condurre ad avere un $x_s = v_s - \beta_s X_s$ grande in valore assoluto, non appena (la perturbazione si faccia sentire di nuovo e) comparisca un β_s abbastanza grande, e far sì che non risulti $x_n \to 0$.

L'esempio seguente illustra questo fatto.

Fissato h intero $\geqq 2$, si ponga $x_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ e

$$\begin{array}{llll} x_n = 1/(h^{2j+1} - h^{2j}), & \beta_n = 0, & \text{per} & h^{2j} \leqslant n < h^{2j+1}, \\ x_n = -1, & \beta_n = n + 1, & \text{per} & n = h^{2j+1}, \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots). \\ x_n = 0, & \beta_n = 0, & \text{per} & h^{2j+1} < n < h^{2j+2}, \end{array}$$

Risulta $X_0 = 1$, $v_0 = 1$,

$$\begin{cases} X_n = \left(\dfrac{n - h^{2j} + 1}{h^{2j+1} - h^{2j}} + 1\right)/(n+1) & \text{per } h^{2j} \leqq n < h^{2j+1}, \\ X_n = 1/(n+1) & \text{per } h^{2j+1} \leqq n < h^{2j+2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_n = x_n & \text{per } n \neq h^{2j+1}, \\ v_n = 0 & \text{per } n = h^{2j+1}, \end{cases}$$

sempre per $j = 0, 1, 2, \ldots$; quindi risulta $v_n \to 0$, $X_n \to 0$, $\overline{\lim}\, \beta_n = +\infty$, $\underline{\lim}\, x_n = -1$.

Per gli indici dei due tipi r e s, si ha che

$$r \text{ è ogni } n \neq h^{2j+1}, \qquad s \text{ è ogni } n = h^{2\ +1}.$$

---

(5) Cfr. [7], Theor. 1.
(6) Cfr. [6], p. 132, Teor. IV.

Da questo esempio si passa facilmente ad un altro nel quale sia $\beta_n > 0$, sostituendo ai $\beta_n = 0$ una successione di valori $O(1/n)$, e lasciando inalterati i β_n con $n = h^{2j+1}$.

C'è da aspettarsi che la condizione ($\mathfrak{M}\mathfrak{G}$), almeno in certe forme, ponga in relazione l'andamento dei v_r con quello dei β_r.

2. – **Criteri di tipo** (A). I due Teoremi I e II ricordati sopra sono criteri di tipo (A); altri criteri noti di questo tipo sono i seguenti:

Teorema III (di T. VIJAYARAGHAVAN) (7). *Da* $v_n \to 0$ *e* $\beta_n > \gamma n$ ($\gamma > 0$, *indipendente da* n) *segue* $x_n \to 0$.

Teorema IV (di T. VIJAYARAGHAVAN) (8). *Da* $v_n \to 0$ *e* $A \log\log n < \beta_n < B \log\log n$ $(0 < A < B)$ *segue* $x_n \to 0$.

Teorema V (9). *Da* $v_n \to 0$ *e* $A\,\varphi(n) < \beta_n < B\,\varphi(n)$ $(0 < A < B,$ $\{\varphi(n)/n\}$ *monotona non crescente*) *segue* $x_n \to 0$.

È evidente che il Teorema IV segue dal Teorema V come corollario.

3. – **Criteri di tipo** (AB). Si possono stabilire dei criteri nei quali, oltre alle informazioni sulla successione $\{\beta_n\}$, siano messe in giuoco anche informazioni sui v_n.

Teorema VI. *Da*

$$v_n \to 0, \quad \beta_n > 0, \quad n v_n = o(\beta_n), \quad B_n > \gamma n \qquad (\gamma > 0, \textit{ indipendente da } n), \tag{3.1}$$

segue $x_n \to 0$.

È evidente che tutte le condizioni (3.1) sono verificate quando $v_n \to 0$, $\beta_n > 2\gamma n$, e quindi il Teorema III è immediata conseguenza di questo Teorema VI.

Sussistono criteri che tengono conto dell'andamento di $\{V_n\}$ e di $\{B_n\}$, come i seguenti:

Teorema VII. *Da*

$$v_n \to 0, \quad \beta_n > 0, \quad n v_n = o(\beta_n), \quad V_n = O(1/n), \quad \beta_n = o(n B_n), \tag{3.2}$$

segue $x_n \to 0$.

---

(7) Cfr. [**7**], Theor. 3.
(8) Cfr. [**7**], Theor. 6.
(9) Cfr. [**6**], p. 129, Teor. III.

Osservazione. Le condizioni $B_n > \gamma n$ e $\beta_n = o(nB_n)$ che figurano rispettivamente nei Teoremi VI e VII sono indipendenti. Da $\beta_n = o(nB_n)$ non segue $B_n > \gamma n$; per esempio con $\beta_n = \log(n+1)$ risulta $B_n \sim \beta_n$ e vale $\beta_n = o(nB_n)$, mentre $B_n/n \to 0$. Da $B_n > \gamma n$ non segue $\beta_n = o(nB_n)$; per esempio con $\beta_n = e^n$ risulta $B_n \sim e^{n+1}/[(e-1)n]$, e vale $B_n > \gamma n$ (si può qui assumere $\gamma = 1$); mentre $\beta_n/(nB_n) \to (e-1)/e$. Osserviamo poi che nel Teorema VII figura anche la condizione supplettiva $V_n = O(1/n)$.

Teorema VIII. *Da*

$$v_n \to 0, \quad \beta_n > 0, \quad nv_n = o(\beta_n), \quad n\,|V_n| \to +\infty, \quad \beta_n V_n = o(B_n), \tag{3.3}$$

segue $x_n \to 0$.

Questo criterio contempla il caso in cui la media $\{V_n\}$ converga a zero abbastanza lentamente: allora β_n/B_n può non essere limitato.

Teorema IX. *Da*

$$v_n \to 0, \quad \beta_n > 0, \quad nv_n = o(\beta_n), \quad \beta_n = o\big(nB_n/(1 + n\,|V_n|)\big), \tag{3.4}$$

segue $x_n \to 0$.

Si vede facilmente che i Teoremi VII e VIII sono conseguenza immediata del Teorema IX: infatti dalle due ultime condizioni in (3.2) segue l'ultima in (3.4), e d'altronde si può pensare soddisfatta quest'ultima senza che sia $V_n = O(1/n)$; da $n\,|V_n| \to +\infty$ segue $nB_n/(1 + n\,|V_n|) \sim B_n/|V_n|$ e le due ultime condizioni in (3.3) portano come conseguenza l'ultima in (3.4), e d'altronde si può pensare soddisfatta quest'ultima senza che sia $n\,|V_n| \to +\infty$.

4. - Criteri di tipo (AC). Supponiamo di essere informati se $\{X_n\}$ è definitivamente monotona, oppure no. Sussistono in tal caso i criteri seguenti:

Teorema X (10). *Sia* $\{X_n\}$ *definitivamente monotona; allora da* $v_n \to 0$, $\beta_n \geq 0$, $\beta_n = O(B_n)$, *segue* $x_n \to 0$.

---

(10) Vedasi L. Tanzi Cattabianchi [**6**], p. 126, Teor. I, parte seconda, dove la dimostrazione è svolta per $\beta_n > 0$, ma essa vale, ovviamente, anche nell'ipotesi $\beta_n \geq 0$, poichè è $\beta_n > 0$ per infiniti n e $B_n > 0$ per $n \geq n^*$ conveniente (si tenga presente quanto si è detto al n. **1** del presente lavoro).

Teorema XI. *Sia* $\{X_n\}$ *definitivamente monotona; allora da* $v_n \to 0$, $\beta_n \geqq 0$, $B_n > \gamma n$ ($\gamma > 0$, *indipendente da* n), *segue* $x_n \to 0$.

Osservazione. Le due condizioni $\beta_n = O(B_n)$ e $B_n > \gamma n$ che figurano rispettivamente nei Teoremi X e XI sono indipendenti. Da $B_n > \gamma n$ non segue $\beta_n = O(B_n)$; per esempio assumendo $\beta_n = e^n$ vale $B_n > \gamma n$ (con $\gamma = 1$) ma non $\beta_n = O(B_n)$, giacchè $\beta_n / B_n \sim (e-1)n/e$. Da $\beta_n = O(B_n)$ non segue $B_n > \gamma n$; per esempio assumendo $\beta_n = \log(n+1)$ risulta $B_n \sim \beta_n$ e quindi vale $\beta_n = O(B_n)$ ma non $B_n > \gamma n$, giacchè $B_n / n \to 0$.

5. – Un criterio di tipo (AD). Distinguiamo gli indici n nei due tipi r e s con la legge: $x_r X_r \geqq 0$, $x_s X_s < 0$.

Nel caso in cui $\{X_n\}$ non sia definitivamente monotona esistono infiniti indici r [11]: per ogni indice n denotiamo con $R = R(n)$ il massimo indice di tipo r che non supera n; in particolare $R(r) = r$, $R(s) \leqq s - 1$.

Sussiste il seguente

Teorema XII. *Sia* $v_n \to 0$, $\beta_n \geqq 0$.

1°) *Se esiste un numero finito di indici* s, *oppure, esistendone infiniti, è* $\beta_s = O(1)$, *allora risulta* $x_n \to 0$.

2°) *Se esistono infiniti indici* s *ed è* $\beta_s \neq O(1)$, *allora risulta* $x_n \to 0$ *quando è* $\beta_s = O(B_s)$ *e inoltre, per ogni successione parziale* $\{\beta_{s_k}\}$ ($k = 1, 2, \ldots$) *con* $\beta_{s_k} \to +\infty$, *posto* $R_k = R(s_k)$, *è soddisfatta una almeno delle due condizioni seguenti:*

(a) $\qquad \beta_{R_k} > \gamma R_k \qquad (\gamma > 0,$ *indipendente da* $k)$,

(b) $\qquad \beta_{R_k} > 0, \qquad \beta_{s_k} = O(s_k \beta_{R_k} / R_k)$.

Si osservi il carattere «unilaterale» che possono assumere le condizioni, con l'impegnare soltanto gli indici di uno dei due tipi r o s, o solo parte di essi.

6. – Un criterio di tipo (ACD). Distinguendo i due casi che riguardano l'eventuale definitiva monotonia di $\{X_n\}$ possiamo, in corrispondenza, spezzare la condizione ($\mathfrak{D}\mathfrak{S}$), come mostra il teorema seguente, nel quale la prima parte coincide con la prima parte del Teorema XII.

---

[11] Di ciò abbiamo già dato una semplice dimostrazione in [6], pp. 127-128.

Teorema XIII. *Sia* $v_n \to 0$ e $\beta_n \geqq 0$.

1°) *Se esiste un numero finito di indici s, oppure, esistendone infiniti, è* $\beta_s = O(1)$, *allora risulta* $x_n \to 0$.

2_0) *Se* $\{X_n\}$ *è definitivamente monotona e* $\beta_s = O(B_s)$, *allora risulta* $x_n \to 0$.

3°) *Se* $\{X_n\}$ *non è definitivamente monotona, allora è* $x_n \to 0$ *quando è soddisfatta una almeno delle due condizioni* (a), (b) *del Teorema precedente.*

Il Teorema XII è evidente conseguenza di questo Teorema XIII, che è interessante poichè pone in rilievo l'influenza della monotonia di $\{X_n\}$ nella formulazione della condizione ($\mathfrak{N}\mathfrak{S}$). Anche il Teorema X segue evidentemente dal Teorema XIII: la seconda parte di quest'ultimo teorema costituisce un « miglioramento » del Teorema X, impegnando, degli indici n, solo quelli di tipo s per ciò che riguarda la condizione $\beta_n = O(B_n)$.

7. – Criteri di tipo (ABCD). Veniamo ad esprimere la condizione ($\mathfrak{N}\mathfrak{S}$) con le informazioni più ampie fra quelle dei tipi segnalati: si giunge così ai due criteri seguenti, che contengono come casi particolari buona parte dei precedenti.

Teorema XIV. *Sia* $\{\varphi(n)/n\}$ *positiva e monotona non crescente;* $R(n)$ *il massimo indice di tipo r che non supera n;* $A > 0$ *un numero indipendente da n. Allora:*

1°) *se* $\{X_n\}$ *è definitivamente monotona, da*

$$v_n \to 0, \qquad A\varphi(n) < \beta_n = o(n\varphi(n)/(1 + n\,|\,V_n\,|)), \tag{7·1}$$

segue $x_n \to 0$;

2°) *se* $\{X_n\}$ *non è definitivamente monotona, da*

$$v_n \to 0, \qquad A\varphi(n) < \beta_n = o(\varphi(n)/|\,v_{R(n)}\,|) \tag{7.2}$$

(*dove nell'ultima condizione si conviene di tralasciare la parte a destra quando sia* $v_{R(n)} = 0$), *segue* $x_n \to 0$.

Questo Teorema generalizza in modo ovvio i due Teoremi IV e V [infatti è $n/(1 + n\,|\,V_n\,|) \to +\infty$, $\quad v_{R(n)} \to 0$].

Diamo infine il seguente teorema, che vedremo essere il più generale fra quelli qui da noi dati, in quanto comprende parecchi dei precedenti.

Teorema XV. *Sia* $v_n \to 0$ *e* $\beta_n \geqq 0$. *Distinguiamo gli indici* n *nei due tipi* r *e* s *secondochè* $x_r X_r \geqq 0$, $x_s X_s < 0$ *e denotiamo con* $R(n)$ *il massimo* $r \leqq n$.

1°) *Se esiste un numero finito di indici* s, *oppure, esistendone infiniti, è* $\beta_s = O(1)$, *allora risulta* $x_n \to 0$.

2°) *Se* $\{X_n\}$ *è definitivamente monotona, esistono infiniti indici* s *ed è*

$$\beta_s = o(sB_s/(1 + s\,|\,V_s\,|\,)), \tag{7·3}$$

allora risulta $x_n \to 0$.

3°) *Se* $\{X_n\}$ *non è definitivamente monotona, esistono infiniti indici* s *ed è* $\beta_s \neq O(1)$, *allora risulta* $x_n \to 0$ *quando, per ogni successione parziale* $\{\beta_{s_k}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *con* $\beta_{s_k} \to +\infty$, *posto* $R_k = R(s_k)$, *è soddisfatta una almeno delle due condizioni seguenti*:

$$\text{(a*)} \qquad \beta_{R_k} > 0, \qquad R_k\, v_{R_k} = o(\beta_{R_k}),$$

$$\text{(b*)} \qquad \beta_{R_k} > 0, \qquad \beta_{s_k}\, v_{R_k} = o(s_k\, \beta_{R_k}/R_k)\,.$$

Il Teorema XIII è immediata conseguenza di questo Teorema XV: infatti la prima parte dei due Teoremi è la stessa ed inoltre, quando $\{X_n\}$ è definitivamente monotona, la condizione $\beta_s = O(B_s)$, essendo $1/s + |\,V_s\,| \to 0$, implica la (7.3), e ne segue $x_n \to 0$; quando $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona, poichè (a) implica (a*) e (b) implica (b*), ne segue $x_n \to 0$.

8. – Le varie implicazioni. Abbiamo via via già osservato le seguenti implicazioni ([12]):

$$\text{(8.1)} \quad \mathrm{XV} \Longrightarrow \mathrm{XIII} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{X} \\ \mathrm{XII} \end{cases}, \quad \mathrm{IX} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{VII} \\ \mathrm{VIII} \end{cases}, \quad \mathrm{VI} \Longrightarrow \mathrm{III}, \quad \mathrm{XIV} \Longrightarrow \mathrm{V} \Longrightarrow \mathrm{IV},$$

pertanto tutti i Teoremi III,..., XV risulteranno dimostrati quando siano dimostrate le implicazioni XV + XI $\Longrightarrow$ VI, XV $\Longrightarrow$ IX, XV $\Longrightarrow$ XIV, e siano dimostrati i Teoremi XI e XV.

a) Dimostrazione di XV + XI $\Longrightarrow$ VI. Se $\{X_n\}$ è definitivamente monotona e sono soddisfatte le prime due e l'ultima delle (3.1), allora sono

([12]) Con la scrittura $A \Longrightarrow B$ intenderemo: *A implica B*.

soddisfatte tutte le ipotesi del Teorema XI e pertanto $x_n \to 0$; se $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona, dalle prime tre condizioni in (3.1) segue che sono soddisfatte le condizioni $v_n \to 0$, $\beta_n \geqq 0$ e la prima parte oppure la terza parte, (a*), del Teorema XV, e pertanto $x_n \to 0$.

b) D i m o s t r a z i o n e di XV $\Longrightarrow$ IX. Sia $v_n \to 0$ e $\beta_n > 0$: se esiste un numero finito di indici s, oppure, esistendone infiniti, β_s si mantiene limitato, allora è soddisfatta la prima parte del Teorema XV e $x_n \to 0$ [le ultime due condizioni in (3.4) risultano in questo caso superflue]; se $\{X_n\}$ è definitivamente monotona ed esistono infiniti indici s, allora l'ultima delle (3.4) implica la (7.3) e pertanto $x_n \to 0$ [la terza delle (3.4) risulta quindi superflua quando si sappia che $\{X_n\}$ è definitivamente monotona]; se $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona ed esistono infiniti indici s ed è $\beta_s \neq O(1)$, la terza delle (3.4) implica la (a*) e pertanto $x_n \to 0$ [l'ultima delle (3.4) risulta quindi superflua quando si sappia che $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona].

c) D i m o s t r a z i o n e di XV $\Longrightarrow$ XIV. Osserviamo preliminarmente che dall'ipotesi $A\,\varphi(n) < \beta_n$ $(A > 0,\ \varphi(n) > 0)$ segue $\beta_n > 0$.

1°) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona: se esiste un numero finito di indici s, oppure, esistendone infiniti, è $\beta_s = O(1)$, è allora soddisfatta la prima parte del Teorema XV; in caso contrario basterà dimostrare che nelle ipotesi (7.1) è soddisfatta la (7.3). Si ha intanto

$$B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n} \beta_h > \frac{A}{n+1} \sum_{h=0}^{n} h \frac{\varphi(h)}{h} \geqq \frac{A}{n+1} \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{h=0}^{n} h = \frac{1}{2} A\, \varphi(n),$$

e risulta

$$0 < \frac{\beta_s}{B_s} \frac{1 + s\,|\,V_s\,|}{s} < \frac{2}{A} \frac{\beta_s}{\varphi(s)} \frac{1 + s\,|\,V_s\,|}{s},$$

e siccome qui l'ultimo membro tende a zero per la parte a destra delle (7.1), la (7.3) è verificata.

2°) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona: nel caso in cui non sia soddisfatta la prima parte del Teorema XV, basterà dimostrare che, nelle ipotesi (7.2), è soddisfatta la terza parte di detto Teorema, con l'ipotesi (b*), che si può scrivere nella forma

$$v_{R_k} \frac{\beta_{s_k}}{s_k} : \frac{\beta_{R_k}}{R_k} \to 0 \qquad (\beta_{R_k} > 0). \tag{8.2}$$

Infatti, tenendo conto della seconda condizione in (7.2), che, per gli s_k ed R_k, si può scrivere nella forma

$$A\,\varphi(s_k) < \beta_{s_k} < \delta_k \varphi(s_k)/|\,v_{R_k}\,| \ (^{13}) \qquad (\delta_k > 0,\ \delta_k \to 0+),$$

risulta

$$0 < |\,v_{R_k}\,|\,\frac{\beta_{s_k}}{s_k} : \frac{\beta_{R_k}}{R_k} < \frac{\delta_k}{A}\,\frac{\varphi(s_k)}{s_k} : \frac{\varphi(R_k)}{R_k} \leqq \frac{\delta_k}{A} \to 0,$$

e la (8.2) è provata.

Veniamo a dimostrare finalmente, nei due numeri seguenti, i Teoremi XI e XV.

9. – Dimostrazione del Teorema XI. Cominciamo con l'osservare che da $v_n \to 0$, $\beta_n \geqq 0$ segue, per un semplice teorema di T. VIJAYARAGHAVAN più sopra ricordato [14], $X_n \to 0$. Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona: possiamo allora supporre, senza alterare la generalità, che sia $X_n \to 0+$, $X_n \geqq 0$ e $\{X_n\}$ non crescente per $n \geqq \nu$ conveniente. Abbiamo

$$(n+1)V_n = \sum_{h=0}^{n} x_h + \sum_{h=0}^{n} \beta_h X_h = (n+1)X_n + \sum_{h=0}^{\nu} \beta_h X_h + \sum_{h=\nu+1}^{n} \beta_h X_h,$$

$$(n+1)V_n \geqq (n+1)X_n + C + X_n \sum_{h=\nu+1}^{n} \beta_h \qquad (C \gtreqless 0, \text{ indipendente da } n),$$

(9.1) $$(n+1)\ V_n \geqq (n+1)\,(1+B_n)X_n - (\nu+1)B_\nu X_n + C,$$

e, dividendo per $n+1$,

$$V_n \geqq B_n X_n + X_n - \frac{(\nu+1)B_\nu X_n - C}{n+1};$$

è quindi

$$0 \leqq B_n X_n \leqq V_n - X_n + \frac{(\nu+1)B_\nu X_n - C}{n+1} \to 0,$$

[13] Al n. **10** seguente vedremo che è $v_{R_k} \neq 0$.
[14] Cfr. loc. cit. in [5].

da cui

$$B_n X_n \to 0, \qquad \gamma n X_n \to 0, \qquad (n+1) X_n \to 0,$$

e segue

$$x_n = (n+1)X_n - nX_{n-1} \to 0.$$

10. - Dimostrazione del Teorema XV.

1°) Se gli indici di tipo s sono in numero finito, si hanno allora infiniti indici r, per i quali risulta $v_r = x_r + \beta_r X_r \to 0$, e siccome $x_r X_r \geqq 0$, $\beta_r \geqq 0$, ne segue $x_r \to 0$: si conclude $x_n \to 0$. Se si hanno infiniti indici s ed è $\beta_s = O(1)$, da $v_s = x_s + \beta_s X_s \to 0$, $X_s \to 0$, segue $x_s \to 0$; se vi sono anche infiniti indici r è pure $x_r \to 0$: si conclude $x_n \to 0$.

2°) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona e valga la (7.3); come si è più volte osservato, risulta $X_n \to 0$ e si può supporre che sia $X_n \to 0+$, $X_n \geqq 0$ e $\{X_n\}$ non crescente per $n \geqq \nu$. Si ha

$$B_s X_s < \frac{\delta_s s B_s X_s}{1 + s\,|V_s|} < \frac{\delta_s \cdot (s+1)(1+B_s)X_s}{1+(s+1)\,|V_s|} \qquad (\delta_s > 0,\ \ \delta_s \to 0+),$$

ed essendo, per la (9.1),

$$(1+B_s)X_s \leqq V_s + \frac{(\nu+1)B_\nu X_s - C}{s+1},$$

risulta

$$\beta_s X_s < \frac{\delta_s\,\{(s+1)\,|V_s| + (\nu+1)B_\nu X_s + |C|\}}{1+(s+1)\,|V_s|};$$

quest'ultima espressione non supera nè l'una nè l'altra delle due espressioni seguenti:

$$\delta_s \cdot \left\{1 + \frac{(\nu+1)B_\nu X_s + |C|}{(s+1)\,|V_s|}\right\}, \qquad \delta_s \cdot \{(s+1)\,|V_s| + (\nu+1)B_\nu X_s + |C|\}, \tag{10.1}$$

ottenute dalla precedente diminuendo il denominatore. Poichè ν e C sono fissi e $X_s \to 0$, l'espressione $(\nu+1)B_\nu X_s + |C|$ si mantiene limitata. Per i valori di s per i quali $(s+1)\,|\,V_s\,|\geqq 1$, si tenga conto della prima delle (10.1): là parte entro $\{\}$ si mantiene limitata e quindi esiste $K_1>0$ per cui la prima delle (10.1) risulta minore di $K_1\delta_s$. Quando sia $(s+1)\,|\,V_s\,|<1$, si consideri la seconda delle (10.1): esiste $K_2>0$ per cui essa risulta minore di $K_2\delta_s$. Posto $K=\text{Max}\,(K_1,\ K_2)$, ne segue $0\leqq\beta_s X_s<K\delta_s\rightarrow 0$, e quindi risulta $x_s=v_s-\beta_s X_s\rightarrow 0$. Si conclude $x_n\rightarrow 0$.

3°) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona [esistono allora infiniti indici r [15]] e sia $\{s_k\}$ $(k=1,\ 2,\ldots)$ una qualunque successione parziale degli s tale che $\beta_{s_k}\rightarrow+\infty$. Sia

$$x_{s_k}>0,\quad x_{s_k-1}>0,\ldots,\quad x_{R_k+1}>0,\quad x_{R_k}\leqq 0\qquad [R_k=R(s_k),\quad R_k\rightarrow+\infty],$$
$$X_{s_k}<0,\quad X_{s_k-1}<0,\ldots,\quad X_{R_k+1}<0,\quad X_{R_k}<0\quad [16]$$

(analogo ragionamento si farebbe quando fosse $x_{s_k}<0,\ \ldots,\ x_{R_k}\geqq 0$, ecc.).

Risulta allora, per $s=R_k+1,\ R_k+2,\ \ldots,\ s_k$,

$$0>X_s=\frac{x_0+\ldots+x_s}{s+1}>\frac{x_0+\ldots+x_{R_k}}{s+1}=X_{R_k}\frac{R_k+1}{s+1},$$

$$0>sX_s>R_kX_{R_k}\frac{s\cdot(R_k+1)}{R_k\cdot(s+1)}>2R_kX_{R_k},\qquad\text{quando } X_s,\ X_{R_k}<0.$$

Analogamente è

$$0<sX_s<2R_kX_{R_k},\quad\text{quando}\quad X_s,\ X_{R_k}>0.$$

In ogni caso risulta

$$0<s\,|\,X_s\,|<2R_k\,|\,X_{R_k}\,|\qquad(s=R_k+1,\ R_k+2,\ \ldots,\ s_k),\tag{10.2}$$

ed è $X_{R_k}\neq 0$, $v_{R_k}\neq 0$.

i) Sia verificata la (a*), che possiamo scrivere nella forma

$$R_k\,|\,v_{R_k}\,|<\varepsilon_k\,\beta_{R_k}\qquad(\varepsilon_k>0,\ \varepsilon_k\rightarrow 0+,\ \beta_{R_k}>0);$$

---

[15] Cfr. loc. cit. in [11].

[16] Osserviamo che, nelle ipotesi qui fatte, non potrebbe essere $X_{R_k}=0$, giacchè x_n, nel passaggio di n da R_k a R_k+1, aumenta, perciò, se fosse $X_{R_k}=0$ dovrebbe essere $X_{R_k+1}>0$, contro l'ipotesi. Ne segue $v_{R_k}=x_{R_k}+\beta_{R_k}X_{R_k}<0$.

si ha

$$R_k\,\beta_{R_k}\,|\,X_{R_k}\,| \leqq R_k\,|\,x_{R_k} + \beta_{R_k}X_{R_k}\,| = R_k\,|\,v_{R_k}\,| < \varepsilon_k\,\beta_{R_k},$$

da cui, essendo $\beta_{R_k} > 0$, segue $R_k\,|\,X_{R_k}\,| \to 0$, per la (10.2), $sX_s \to 0$, $(s+1)X_s \to 0$, per $s = R_k+1,\ R_k+2, \ldots, s_k$. Essendo

$$x_s = (s+1)X_s - sX_{s-1} = sX_s + X_s - (s-1)X_{s-1} - X_{s-1},$$

e tenendo presente che $s-1$ è un s, oppure è $R_k = R(s_k)$, si deduce

$$|\,x_s\,| \leqq s\,|\,X_s\,| + |\,X_s\,| + (s-1)\,|\,X_{s-1}\,| + |\,X_{s-1}\,| <$$

$$< 4\ R_k\,|\,X_{R_k}\,| + |\,X_s\,| + |\,X_{s-1}\,| \to 0,$$

per $s = R_k+1,\ R_k+2, \ldots, s_k$.

ii) Sia verificata la (b*), che possiamo scrivere nella forma

$$\beta_{s_k} = \eta_k \frac{s_k}{R_k} \frac{\beta_{R_k}}{|\,v_{R_k}\,|} \qquad (\eta_k \geqq 0,\ \eta_k \to 0,\ \beta_{R_k} > 0).$$

Abbiamo più sopra visto che è, per $s = s_k$,

$$|\,X_{s_k}\,| < |\,X_{R_k}\,| \frac{R_k+1}{s_k+1}\ ;$$

risulta quindi

$$0 \leqq \beta_{s_k}\,|\,X_{s_k}\,| \leqq \eta_k \frac{s_k\cdot(R_k+1)}{R_k\cdot(s_k+1)} \frac{\beta_{R_k}\,|\,X_{R_k}\,|}{|\,v_{R_k}\,|} \leqq 2\eta_k \to 0\,.$$

Pertanto $\beta_{s_k}X_{s_k} \to 0$, $\quad x_{s_k} = v_{s_k} - \beta_{s_k}X_{s_k} \to 0$.

Siamo arrivati a concludere, in i) e ii), che $x_{s_k} \to 0$ lungo ogni successione parziale $\{x_{s_k}\}$ per la quale sia $\beta_{s_k} \to +\infty$. Da ciò segue che $x_s \to 0$ lungo tutta la successione degli indici s: infatti, se fosse $\overline{\lim}\, x_s > 0$ [$\underline{\lim}\, x_s < 0$] esisterebbe una successione $\{s'_k\}$ per la quale $x_{s'_k} \to \lambda > 0\ [< 0]$ (λ eventualmente infinito), e allora, essendo $X_s \to 0$, dalla relazione $x_{s'_k} = v_{s'_k} - \beta_{s'_k}X_{s'_k}$ $(v_{s'_k} \to 0,\ X_{s'_k} \to 0)$ seguirebbe $\beta_{s'_k} \to +\infty$ e questa successione $\{s'_k\}$ sarebbe una di quelle $\{s_k\}$ che abbiamo preso in considerazione, e quindi $x_{s'_k} \to 0$: assurdo.

Da $x_r \to 0$, $x_s \to 0$ segue $x_n \to 0$.

Il Teorema XV è così completamente dimostrato.

Bibliografia.

[1] E. T. COPSON and W. L. FERRAR, *Notes on the structure of sequences* (I), J. London Math. Soc. **4**, 258-264 (1929).

[2] G. H. HARDY, *Generalizations of a limited theorem of Mr. M e r c e r*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **43**, 143-150 (1912).

[3] J. KARAMATA, *Sur quelques inversions d'une proposition de C a u c h y et leurs généralisations*, Tôhoku Math. J. **36**, 22-28 (1932).

[4] J. MERCER, *On the limits of real variants*, Proc. London Math. Soc. (2) **5**, 206-224 (1907).

[5] L. TANZI CATTABIANCHI, *Sui teoremi di M e r c e r e V i j a y a r a g h a v a n precisati per le successioni oscillanti*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 337-361 (1953).

[6] L. TANZI CATTABIANCHI, *Perturbazione media-ereditaria e limiti delle succesioni*, Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 125-136 (1954).

[7] T. VIJAYARAGHAVAN, *A generalization of a theorem of M e r c e r*, J. London Math. Soc. **3**, 130-134 (1928).