Rivista Mat. Univ. Parma 6, 349-352 (1955)

GIORGIO SESTINI (*)

Sulla risoluzione di un notevole gruppo di problemi retti da equazioni di tipo parabolico. (**)

È ben noto che l'equazione

$$k\, \Delta T(P,\ t) - \boldsymbol{v}(P,\ t) \times \operatorname{grad} T(P,\ t) = \frac{\partial T(P,\ t)}{\partial t} + A(P,\ t), \tag{1}$$

ove $T = T(P,\ t)$ è l'incognita funzione, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(P,\ t)$ un assegnato vettore, k una costante positiva, ove si interpreti T come temperatura di un mezzo omogeneo, termicamente isotropo di *diffusività* k, esprime l'equilibrio termico, per unità di volume, in quel mezzo supposto mobile con velocità $\boldsymbol{v}$ e in presenza di una distribuzione di sorgenti di rendimento specifico $A = A(P,\ t)$. La temperatura T resterà poi determinata non appena, caso per caso, siano assegnate le indispensabili condizioni iniziali e al contorno, soddisfacenti a quelle restrizioni analitiche atte ad assicurare l'esistenza e l'unicità della soluzione del problema in esame.

Accennerò che se il mezzo è un fluido, viscoso o no, inizialmente in quiete e opportunamente riscaldato, la velocità $\boldsymbol{v}$ è pur essa incognita e il problema deve essere impostato, tenendo conto delle equazioni della fluidomeccanica, che importano almeno una ulteriore incognita: la pressione.

(*) Professore o. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Comunicazione tenuta al 5° Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

Io però mi limiterò ad accennare a problemi nei quali il vettore $\boldsymbol{v}$ si intende assegnato e perciò la (1), con le condizioni ai limiti, è sufficiente a tradurre analiticamente il problema.

Problemi di questo tipo, o ad esso riducibili sia pure con diversa interpretazione delle grandezze che intervengono, sono ad esempio quelli:

a) della determinazione della temperatura in un filo percorso da corrente, quando si tenga conto dell'effetto THOMSON;

b) della determinazione della temperatura in una verga che si muove ([**3**], pp. 129-131) (1);

c) del raffreddamento per ventilazione ed altri di interesse geofisico ([**5**] [**6**]), relativi alla teoria della diffusione o della sedimentazione.

La difficoltà della pratica risoluzione di questi problemi, quando non si sia in casi particolarmente semplici ($\boldsymbol{v}$, A costanti), è messa in rilievo da tutti gli autori che, numerosissimi, si sono interessati di questioni del genere. Tale difficoltà è in particolare sottolineata da CARSLAW ([**3**], pag. 131) e da BENFIELD ([**5**]) anche per il caso unidimensionale del flusso lineare o radiale di calore, che è il caso quasi unicamente studiato, quando cioè tutte le grandezze considerate dipendono dal posto tramite una sola coordinata locale, ad es. la distanza da un piano fisso, da una retta fissa o da un punto fisso.

Anche nelle particolari condizioni dei lavori del sig. BENFIELD, la sola ipotesi della dipendenza di $\boldsymbol{v}$ dalla ascissa x, crea notevoli complicazioni di carattere analitico, pur riuscendo in qualche semplice caso ad ottenere espressivi risultati, come ha recentemente mostrato la dott. MANFREDI ([**7**]).

Forse l'ostacolo incontrato nella risoluzione di tali problemi sta nel fatto di volerli risolvere caso per caso, cercando, molte volte inutilmente, di trovare l'artificio adatto alla costruzione della cercata soluzione. Ora a me sembra che, almeno i problemi unidimensionali, ma ho già sicuri elementi per casi assai più generali (la cui trattazione raccoglierò in una Memoria di prossima pubblicazione), trovino effettiva soluzione mediante il costruttivo metodo delle approssimazioni successive, seguendo pari passo i classici lavori di LEVI e GEVREY ([**1**]), [**2**]), quando naturalmente i dati si comportino dal punto di vista analitico in modo conveniente.

Per accennare alla cosa mi riferirò al seguente problema analitico, al quale come è ovvio si possono ricondurre molti importanti problemi fisico-matema-

---

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

tici unidimensionali del tipo sopra accennato: *determinare* la funzione $U = U(x, t)$ soddisfacente al seguente sistema:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial U}{\partial t} = a(x, t)\dfrac{\partial U}{\partial x} + b(x, t)U + c(x, t), & \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < t < T, \end{cases} \\ U(x, 0) = f(x), & 0 < x < l, \\ \alpha_1 \dfrac{\partial U}{\partial x} + \beta_1 U = g_1(t), & x = 0, \ 0 < t < T, \\ \alpha_2 \dfrac{\partial U}{\partial x} + \beta_2 U = g_2(t), & x = l, \ 0 < t < T, \end{cases}$$

con α_i, β_i $(i = 1, 2)$ costanti e le funzioni $a(x, t)$, $b(x, t)$, $c(x, t)$ $f(x)$, $g_i(t)$ assegnate funzioni continue dei loro argomenti, lipschitziane di ordine $\gamma \leqslant 1$ le prime tre almeno rispetto ad una delle due variabili nel rettangolo R_T definito da $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ (o nella striscia $x \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$).

La soluzione di (2) è data ([**2**], pag. 374) da

$$(3)\quad U(x, t) = z(x, t) - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{R_t} \left[a(\xi, \tau) \frac{\partial U}{\partial \xi} + b(\xi, \tau)\, U \right] G(\xi, \tau; x, t)\, d\xi\, d\tau,$$

ove $z(x, t)$ è soluzione del sistema ridotto

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \dfrac{\partial Z}{\partial x} = c(x, t), & \begin{cases} 0 < x < l \\ 0 < t < T, \end{cases} \\ Z(x, 0) = f(x), & 0 < x < l, \\ \alpha_1 \dfrac{\partial Z}{\partial x} + \beta_1 z = g_1(t), & x = 0, \quad 0 < t < T, \\ \alpha_2 \dfrac{\partial Z}{\partial x} + \beta_2 z = g_2(t), & x = l, \quad 0 < t < T; \end{cases}$$

e $G(\xi, \tau; x, t)$ è la funzione di GREEN relativa al sistema (4).

La (3), equazione integro-differenziale con un limite variabile, si risolve facilmente mediante un procedimento di approssimazioni successive, ottenuto ponendo:

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n + \dots$$

con

$$(5)\qquad \begin{cases} U_0 = z(x,\, t), \\ U_n = -\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}} \displaystyle\iint\limits_{R_t} \left[a\,\dfrac{\partial U_{n-1}}{\partial x} + b\, U_{n-1} \right] G(\xi,\, \tau;\, x,\, t)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\tau\,. \end{cases}$$

Le condizioni imposte ai coefficienti della equazione, ad $f(x)$ e alle $g_i(t)$, sicuramente verificate se le funzioni in questione ammettono derivate almeno del primo ordine limitate, permettono come mostra GEVREY di assicurare la uniforme convergenza del procedimento di approssimazioni (5) oltre che l'unicità della soluzione stessa ([**2**]), pp. 350-52).

Resta un punto che potrebbe lasciare perplessi: quello della preventiva conoscenza della funzione di GREEN relativa al sistema (4). Per i casi più normali e frequenti tale funzione è però nota (semispazio, spazio esterno a superficie cilindrica o sferica, strato piano o cilindrico, crosta sferica, [**3**], Cap. XIII). In caso diverso la ricordata Memoria di GEVREY insegna a costruirsi la funzione di GREEN con un procedimento convergente di approssimazioni successive del tutto simile a quello che porta alla costruzione della soluzione di (3).

Bibliografia.

[**1**] E. E. LEVI, *Sull'equazione del calore*, Ann. Mat. Pura Appl. (3) **14**, 187-264 (1908).

[**2**] M. GEVREY, *Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique*, J. Math. Pures Appl.: (6) **9**, 305-471 (1913); (6) **10**, 105-143 (1914).

[**3**] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Clarendon, Oxford 1948.

[**4**] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940.

[**5**] A. E. BENFIELD, *A problem of the temperature distribution in a moving medium*, Quart. Appl. Math. **6**, 439-443 (1948).

[**6**] A. E. BENFIELD, *The temperature in an accreting medium with heat generation*, Quart. Appl. Math. **7**, 436-439 (1949).

[**7**] B. MANFREDI, *Osservazioni su di un problema di distribuzione della temperatura in un mezzo che si muove*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 327-335 (1953).

[**8**] J. G. KNUDSEN and D. L. KATZ, *Fluid dynamics and heat transfer*, Univ. Michingan Press 1954.