Rivista Mat. Univ. Parma 6, 293-300 (1955)

LUCIANO DABONI (*)

Estensione del teorema di Riemann-Dini, sulle serie, alle funzioni non sommabili nella teoria astratta della integrazione. (**)

Il teorema di RIEMANN-DINI sulle serie numeriche pone in luce una interessante proprietà delle serie non assolutamente convergenti ed è — la richiamo — la seguente:

« Una serie non assolutamente convergente sia tale che la serie dei termini positivi e quella dei termini negativi risultino divergenti e il termine generale della serie sia infinitesimo. Fissato un qualunque numero reale a, è possibile ordinare i termini della serie data in modo da ottenere una serie convergente (non assolutamente) ad a. »

Per le serie non assolutamente convergenti, appena sieno soddisfatte le condizioni dette, si può dunque parlare di una somma « condizionata » nel senso che può istituirsi un procedimento di sommazione che consenta di pervenire ad un prefissato valore della somma.

Le serie numeriche, d'altra parte, possono riguardarsi come particolari integrali di LEBESGUE-STIELTJES, e poichè — come è subito visto e sarà richiamato in quanto segue — al caso particolare della non assoluta convergenza di una serie corrisponde, nel caso generale, la non sommabilità di una funzione, viene fatto spontaneo di chiedersi se continui a sussistere per funzioni non sommabili un risultato che estenda quello espresso dal teorema di RIEMANN-DINI per le serie numeriche. Si tratta perciò di ricercare quali ipotesi debbono esser soddisfatte per una funzione non sommabile perchè si possa parlare, per essa,

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Trieste, Italia.

(**) Ricevuto il 12-XI-1955. Il presente lavoro è stato oggetto di una comunicazione al 5º Congresso Nazionale della Unione Matematica Italiana (Pavia-Torino, 6-12 ottobre 1955).

di integrale « condizionato » nel senso che si possa in qualche modo costruire un integrale della funzione il cui valore, prefissato, venga raggiunto con un opportuno procedimento di sommazione.

Particolari procedimenti di sommazione per una funzione non sommabile già sono stati considerati ed il loro uso è frequente nell'Analisi: basti por mente alla nozione di « valore principale dell'integrale (secondo CAUCHY) » e a quella di funzione non sommabile ad integrale convergente.

La posizione assunta tende quindi a generalizzare particolari modi di pervenire ad un integrale di una funzione non sommabile.

Intendendo esaminare la questione nel modo più generale possibile, considererò l'integrale di LEBESGUE-STIELTJES in uno spazio astratto, valendomi allo scopo della teoria della misura e della integrazione quali sono esposte nella recente Opera del Prof. FICHERA sulle trasformazioni lineari [1].

Richiamerò rapidamente talune definizioni e risultati fondamentali.

Sia S uno spazio astratto. Una famiglia $\{I\}$ di insiemi di S dicesi *elementare* se: a) è chiusa rispetto al prodotto; b) se I' ed I'' sono due insiemi ed è $I' \subset I''$, esiste nella famiglia un numero finito n di insiemi $I_1, I_2, \ldots, I_n$ tali che, posto $I_0 = I'$, si abbia $I'' = \sum_{k=0}^{n}{}^{\bullet} I_k$ ed inoltre, qualunque sia $h \leqslant n$, l'insieme $\sum_{k=0}^{h}{}^{\bullet} I_k$ appartenga alla famiglia.

Dicesi funzione misura, o semplicemente *misura*, ogni funzione completamente additiva, a variazione limitata, $\mu(I)$, definita su una assegnata famiglia elementare $\{I\}$. Si dimostra che la $\mu(I)$ viene prolungata in modo unico prima in una famiglia $\{P\}$ additiva minima che contiene la $\{I\}$, indi nella famiglia totalmente additiva minima $\{B\}$ che contiene $\{P\}$. Detta $v_\mu(B)$ la variazione totale della μ su un insieme B, si estende poi la definizione di μ alla famiglia $\{K\}$ degli insiemi K per ognuno dei quali $v_\mu(B')$ e $v_\mu(B'')$ descrivono classi numeriche contigue allorchè $B' \subset K \subset B''$, essendo B' e B'' insiemi della famiglia $\{B\}$.

Un insieme L dicesi infine *μ-misurabile* se appartiene alla famiglia $\{K\}$ o è somma di un numero discreto di insiemi della famiglia $\{K\}$. Se, dato L e variando K in $\{K\}$, lo estremo superiore di $v_\mu(KL)$ è finito, si dirà che *l'insieme L, μ-misurabile, ha misura finita*. Rimangono così individuate, fissata la misura

[1] G. FICHERA: *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Vol. I, Istituto di Matematica della Università di Trieste, 1954. Cfr. Cap. VI e Cap. VII.

μ, la famiglia $\{L\}$ degli insiemi μ-misurabili e la famiglia $\{L\}_f$ degli insiemi μ-misurabili e di misura (assoluta) finita.

Consideriamo ora un insieme L, μ-misurabile, affatto generale e sia $f(x)$ una funzione numerica in esso definita, ivi μ-misurabile [$f(x)$ è μ-misurabile in L se comunque si assegni un numero reale a l'insieme dei punti di L in cui è $f(x) \leqslant a$ è μ-misurabile]. La definizione di μ-sommabilità è la seguente:

Denoti $\mathcal{K}(L, f)$ la famiglia, certo esistente, degli insiemi K della famiglia $\{K\}$ contenuti in L e sui quali la funzione $f(x)$ è limitata. La $f(x)$ dicesi *μ-sommabile in* L se l'integrale $\int_K |f(x)| \, dv_\mu$ descrive un insieme numerico limitato al variare di K in $\mathcal{K}(L, f)$.

Si pensi ora di *ordinare* gli insiemi K di $\mathcal{K}(L, f)$ e si indichi con $K \to L$ l'ordinamento per cui è seguente di ogni K di $\mathcal{K}(L, f)$ qualsiasi $K' \supset K$. Si dirà che, in tale ordinamento, K *invade* L.

Sussiste il Teorema: *Se $f(x)$ è μ-sommabile in L esiste finito il limite*

$$\lim_{K \to L} \int_K f(x) \, d\mu \, .$$

Tale limite si dice *integrale della funzione $f(x)$, μ sommabile, esteso all'insieme L μ-misurabile*, e si denota con $\int_L f(x) \, d\mu$.

Dopo queste necessarie premesse osserviamo subito che per passare dal caso generale a quello particolare della serie numerica, l'insieme L e la misura μ si intenderanno particolarizzati al modo seguente: L è l'insieme dei punti di ascissa intera del semiasse reale $x \geqslant 0$ e μ è la misura non negativa che vale n per ogni insieme K che contenga n di tali punti; sicchè l'integrale $\int_K f(x) \, d\mu$ è, nel caso particolare della serie, la somma di certi n termini della stessa.

Venendo al caso generale, indichi $L = \mathfrak{L}^+ \dot{+} \mathfrak{L}^-$ la decomposizione di L negli insiemi $\mathfrak{L}^+$ ed $\mathfrak{L}^-$ della famiglia $\{L\}$ sui quali è rispettivamente $f(x) \geqslant 0$, $f(x) < 0$ potendo eventualmente uno di essi ridursi all'insieme vuoto o comunque ad un insieme di μ-misura nulla. Sieno poi L_1 ed L_2 gli insiemi della decomposizione di HAHN dell'insieme L ($L = L_1 \dot{+} L_2$), tali cioè che per ogni $L' \subset L_1$ sia $\mu(L') \geqslant 0$ e per ogni $L'' \subset L_2$ sia $\mu(L'') \leqslant 0$.

(2) Per la nozione di insieme ordinato di operazioni su cui poggia la teoria dei limiti del Prof. PICONE si veda anche il Cap. I dell'Opera citata in (1).

Si consideri la seguente decomposizione di L:

$$L = L_1\mathfrak{L}^+ \dot{+} L_1\mathfrak{L}^- \dot{+} L_2\mathfrak{L}^+ \dot{+} L_2\mathfrak{L}^-$$

e si ponga $L_1\mathfrak{L}^+ \dot{+} L_2\mathfrak{L}^- = L^+$, $L_1\mathfrak{L}^- \dot{+} L_2\mathfrak{L}^+ = L^-$.

La decomposizione $L = L^+ \dot{+} L^-$ è tale che se l'insieme K della famiglia $\mathcal{K}(L, f)$ è contenuto in L^+ si ha $\int_K f(x)\, \mathrm{d}\mu \geqslant 0$, riuscendo invece $\int_K f(x)\, \mathrm{d}\mu \leqslant 0$ se $K \subset L^-$ (³).

Per brevità dirò nel seguito che un insieme K è *di tipo* $(\mathcal{K})$ se appartiene alla famiglia $\mathcal{K}(L, f)$, *di tipo* $(\mathcal{K})^+$ o $(\mathcal{K})^-$ se appartiene a $\mathcal{K}(L^+, f)$ o $\mathcal{K}(L^-, f)$.

Sia ora K di tipo $(\mathcal{K})$; posto $K^+ = KL^+$ e $K^- = KL^-$ è

$$K = K^+ \dot{+} K^-, \qquad \int_K |f(x)|\, \mathrm{d}v_\mu = \int_{K^+} f(x)\, \mathrm{d}\mu - \int_{K^-} f(x)\, \mathrm{d}\mu .$$

Ne segue che se la $f(x)$ è μ-sommabile in L^+ e L^- essa è tale in L e

$$\lim_{K \to L} \int_K f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_L f(x)\, \mathrm{d}\mu .$$

Per una serie numerica (μ non negativa) si ritrova così che una serie a termini positivi e negativi e tale che le due serie formate con i termini negativi e quelli positivi riescano convergenti, è assolutamente convergente.

Sia $f(x)$ non μ-sommabile su L. Essa è tale in uno dei due insiemi L^+ o L^- od in entrambi. Nella prima alternativa sia, ad esempio, $f(x)$ non μ-sommabile in L^+ e μ-sommabile in L^-. Riesce

$$\lim_{K \to L} \int_K f(x)\, \mathrm{d}\mu = +\infty,$$

come segue dalla

$$\int_K f(x)\, \mathrm{d}\mu = \int_{K^+} f(x)\, \mathrm{d}\mu + \int_{K^-} f(x)\, \mathrm{d}\mu .$$

(³) La decomposizione $L = L^+ \dot{+} L^-$ è zermeliana perchè all'assioma di ZERMELO fa ricorso il teorema della decomposizione di HAHN. Ovviamente il carattere zermeliano delle considerazioni che seguono si rimuove se si considera una misura μ non negativa.

(In modo simmetrico $\lim\limits_{K\to L}\int\limits_K f(x)\,\mathrm{d}\mu = -\infty$ se $f(x)$, μ-sommabile in L^+, non lo è in L^-.) Si osservi che rientra in tale caso il caso particolare in cui L^- è vuoto o di μ-misura nulla; ciò si verifica poi, in particolare, se la $f(x)$ è non negativa e la misura μ è pur essa non negativa. Sicchè si riottiene allora la conclusione che una serie a termini positivi non convergente, è divergente.

Veniamo ora alla seconda alternativa, e sia $f(x)$ non μ-sommabile in L^+ e L^-. È subito visto che fissato K e considerati gli insiemi K' di esso seguenti nell'ordinamento $K\to L$, l'insieme $K'-K$ contiene definitivamente punti di L^+ (e di L^-). Ed invero ove così non fosse, L^+ sarebbe contenuto in un insieme K di tipo $(\mathcal{K})$ e riuscirebbe quindi esso stesso un insieme di tipo $(\mathcal{K})$ contro l'ipotesi della non μ-sommabilità di $f(x)$ in L^+.

È verificata ora per la $f(x)$ la condizione che estende quella richiedente alle serie dei termini positivi e dei termini negativi di una serie data di essere entrambe divergenti. Occorre ancora cercare l'equivalente per una funzione non μ-sommabile della condizione sul comportamento asintotico del termine generale della serie, e tradurrò l'ipotesi della tendenza a zero del termine generale della serie nella seguente ipotesi per la funzione, al verificarsi della quale dirò brevemente, in seguito, che *è verificata la condizione* α). Tale ipotesi è la seguente:

α) *Fissato ad arbitrio un numero positivo* ε, *è possibile determinare un insieme* K_ε *di tipo* $(\mathcal{K})$ *siffatto che qualunque sia l'insieme* K *di tipo* $(\mathcal{K})$, *purchè* $K\supset K_\varepsilon$, *l'insieme* $K-K_\varepsilon$ *riesca decomponibile in un numero finito di insiemi di tipo* $(\mathcal{K})$ *per ciascuno,* H, *dei quali l'integrale* $\int\limits_H |f(x)|\,\mathrm{d}v_\mu$ *sia minore di* ε.

Si osservi che sussistendo l'ipotesi della non μ-sommabilità della $f(x)$ in L^+ e L^- e posto $K_\varepsilon^+ = K_\varepsilon L^+$, $K_\varepsilon^- = K_\varepsilon L^-$, gli insiemi

$$K^+ - K_\varepsilon^+ = (K-K_\varepsilon)L^+, \qquad K^- - K_\varepsilon^- = (K-K_\varepsilon)L^-$$

sono definitivamente non vuoti.

La asserita equivalenza della condizione α) a quella richiedente che il termine generale della serie $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ sia infinitesimo si prova assumendo, fissato ε, che sia K_ε l'insieme dei punti di ascissa $0, 1, 2, \ldots, n_\varepsilon$. Il verificarsi della α) implica allora che sia

$$|u_{n+h_1} + u_{n+h_2} + u_{n+h_3} + \ldots + u_{n+h_p}| < \varepsilon$$

se $n \geqslant n_\varepsilon$ ed $h_1, h_2, \ldots, h_p$ sono p interi qualunque (p qualunque). Ne scende in particolare che $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Ed è subito visto il viceversa.

Abbiamo ora tutti gli elementi per provare il

Teorema. *La funzione $f(x)$ definita in un insieme μ-misurabile L, ivi μ-misurabile, sia non μ-sommabile in L^+ e L^- e verifichi in L la condizione α). Fissato un qualunque numero reale a è possibile costruire una successione $\{K_n\}$ di insiemi di tipo $(\mathcal{K})$, non decrescente e la cui somma è L e tale che sia*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu = a\,.$$

La dimostrazione sarà conseguita provando che, più in generale, assegnati due numeri reali a' e a'' ($a' \leqslant a''$) o addirittura, in loro luogo, $-\infty$ e $+\infty$, è possibile costruire una successione $\{K_n\}$ non decrescente, il cui limite è L e tale che

$$\min_{n\to\infty}\lim\int_{K_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu = a'(-\infty), \qquad \max_{n\to\infty}\lim\int_{K_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu = a''(+\infty)\,.$$

In tal modo sarà provata la completa estensione del teorema di RIEMANN-DINI per cui a partire da una serie non assolutamente convergente, soddisfacente le condizioni più volte ripetute, possono ottenersi — alterando l'ordine dei termini — serie indeterminate (con limiti di indeterminazione finiti o no), convergenti, divergenti.

Allo scopo facciamo anzitutto vedere che, verificandosi la α), è possibile decomporre L^+ [e L^-] in una somma di una infinità numerabile di insiemi disgiunti di tipo $(\mathcal{K})^+$ $[(\mathcal{K})^-]$:

$$L^+ = K_1 \dot{+} K_2 \dot{+} K_3 \dot{+} \dots \dot{+} K_n \dot{+} \dots \tag{1}$$

e tali che sia

$$\lim_{n\to\infty}\int_{K_n} f(x)\,\mathrm{d}\mu = 0\,.$$

Basterà ovviamente esporre la dimostrazione per l'insieme L^+.

Si fissi una successione $H_1', H_2', \dots, H_n', \dots$ di insiemi di tipo $(\mathcal{K})^+$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} H_n' = L^+$ e del resto qualunque. Sia poi $K_{1/n}$ l'insieme di tipo $(\mathcal{K})$ in corrispondenza al quale, e qualunque sia $K \supset K_{1/n}$, l'insieme $(K - K_{1/n})L^+$ risulti decomponibile in un numero finito di insiemi di tipo $(\mathcal{K})^+$ per ciascuno dei quali l'integrale della funzione è minore di $1/n$ e si consideri la successione $K_1, K_{1/2}, K_{1/3}, \dots, K_{1/n}, \dots$. Posto

$$K_n' = \sum_{i=1}^{n} K_{1/i}\, L^+,$$

l'insieme $H_n = H'_n + K'_n$ è di tipo $(\mathcal{H})^+$ e la successione $\{H_n\}$, non decrescente, ha per limite L^+. Inoltre, per ogni n, è $H_n \supset K'_n$.

Dopo di ciò è

$$L^+ = H_1 \dot{+} (H_2 - H_1) \dot{+} (H_3 - H_2) \dot{+} \dots \dot{+} (H_{n+1} - H_n) \dot{+} \dots$$

e $H_{n+1} - H_n$ è decomponibile in un numero finito di insiemi di tipo $(\mathcal{H})^+$ su ciascuno dei quali l'integrale della $f(x)$ è minore di $1/n$. Ne segue facilmente la asserita possibilità di decomporre L^+ in una somma soddisfacente i requisiti richiesti per la (1).

Siano allora

$$L^+ = P_1 \dot{+} P_2 \dot{+} P_3 \dot{+} \dots \dot{+} P_n \dot{+} \dots,$$

$$L^- = Q_1 \dot{+} Q_2 \dot{+} Q_3 \dot{+} \dots \dot{+} Q_n \dot{+} \dots$$

due decomposizioni di L^+ e L^- in insiemi di tipo $(\mathcal{H})$ e tali che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{P_n} f(x)\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{Q_n} f(x)\, d\mu = 0.$$

Fissati due qualunque numeri reali a', a'' $(a' \leqslant a'')$ sia $K_1 = \dot{\sum\limits_{i=1}^{\lambda_1}} P_i$ l'insieme — certo esistente data la non μ-sommabilità di $f(x)$ su L^+ — per cui è $\int_{K_1} f(x)\, d\mu \geqslant a''$, essendo $\int_{K_1 - P_{\lambda_1}} f(x)\, d\mu < a''$. Si consideri poi l'insieme $K_2 = K_1 \dot{+} \dot{\sum\limits_{j=1}^{\nu_1}} Q_j$ tale che $\int_{K_2} f(x)\, d\mu \leqslant a'$, mentre è $\int_{K_2 - Q_{\nu_1}} f(x)\, d\mu > a'$. Sia, successivamente, $K_3 = K_2 \dot{+} \dot{\sum\limits_{i=\lambda_1+1}^{\lambda_2}} P_i$ tale che $\int_{K_3} f(x)\, d\mu \geqslant a''$, essendo $\int_{K_3 - P_{\lambda_2}} f(x)\, d\mu < a''$. Così seguitando, e sia:

$$\int_{K_{2n}} f(x)\, d\mu \leqslant a', \qquad \int_{K_{2n} - Q_{\nu_n}} f(x)\, d\mu > a', \qquad \Big(K_{2n} = K_{2n-1} \dot{+} \dot{\sum_{j=\nu_{n-1}+1}^{\nu_n}} Q_j\Big),$$

$$\int_{K_{2n+1}} f(x)\, d\mu \geqslant a'', \qquad \int_{K_{2n+1} - P_{\lambda_{n+1}}} f(x)\, d\mu < a'', \qquad \Big(K_{2n+1} = K_{2n} \dot{+} \dot{\sum_{i=\lambda_n+1}^{\lambda_{n+1}}} P_i\Big).$$

Ne viene:

$$a' + \int_{Q_{\nu_n}} f(x)\, d\mu < \int_{K_{2n}} f(x)\, d\mu \leqslant a', \qquad a'' \leqslant \int_{K_{2n+1}} f(x)\, d\mu < a'' + \int_{P_{\lambda_{n+1}}} f(x)\, d\mu,$$

e poichè al tendere di n all'infinito tendono all'infinito ν_n e λ_n, e K_n invade L, sarà:

$$\min_{n\to\infty}\lim\int_{K_n} f(x)\,d\mu = a', \qquad \max_{n\to\infty}\lim\int_{K_n} f(x)\,d\mu = a''. \tag{2}$$

È facile intendere come le cose dette vadano modificate in vista di far sussistere le (2) ove si ponga $a' = -\infty$, $a'' = +\infty$. E, finalmente, se $a' = a''$ è compiutamente provato il Teorema enunciato.

Chiudiamo con una Osservazione. Sia $S = S_r$ lo spazio euclideo ad r dimensioni, e μ la ordinaria misura di LEBESGUE (I = intervallo superiormente aperto di S_r, K = lebesghiano limitato). La ipotesi α) è sempre verificata, come segue dall'osservare che ogni lebesghiano limitato K della famiglia $\mathcal{K}(L, f)$ è sempre decomponibile in un numero finito di lebesghiani H di misura arbitrariamente piccola e che su ogni H la $f(x)$ è limitata. Sicchè in tale caso particolare (e — più in generale — ogni volta che la misura μ, non negativa, è assolutamente continua rispetto alla misura di LEBESGUE) appena la $f(x)$ sia non sommabile e sulla parte di L su cui essa è non negativa e su quella sulla quale è negativa, si può sempre costruire un integrale della $f(x)$ che assuma prefissati valori.