Rivista Mat. Univ. Parma 6, 261-268 (1955)

M. CUGIANI (*)

Sulla estensione ai polinomi di un teorema di Sylvester - Schur - Erdös. (**)

I. - Introduzione.

Il teorema ricordato nel titolo si riferisce al prodotto

$$g(x, y) = (x - y + 1)(x - y + 2) \ldots (x - 1)x$$

(x, y interi positivi) ed afferma che, detto P il massimo divisore primo di $g(x, y)$, risulterà $P > y$ tutte le volte che $y \leqslant x/2$.

Questa proposizione, dimostrata per la prima volta da J. SYLVESTER, fu ritrovata dopo una quarantina d'anni da I. SCHUR, ed infine ridimostrata in forma più semplice ed elegante da P. ERDÖS (1).

Recentemente lo stesso ERDÖS è giunto ad una più acuta proposizione, che può essere così formulata (2): «Esiste una costante $c < 1$ tale che risulti $P > cy \log y$, quando sia $x \geqslant y(1 + c \log y)$.

Noi ci siamo proposti di condurre analoghe ricerche nel caso di un polinomio irriducibile

$$F(x) = a_0 x^g + a_1 x^{g-1} + \ldots + a_g$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico F. ENRIQUES, Università, Via C. Saldini 50, Milano, Italia.

(**) Ricevuto il 25-X-1955.

(1) Su tutto questo si veda ad esempio: P. ERDÖS, *A theorem of Sylvester and Schur*, J. London Math. Soc. **9**, 282-288 (1934); ivi si troveranno anche i riferimenti bibliografici relativi agli altri lavori sopra accennati.

(2) Si veda: P. ERDÖS, *On consecutive integers*, Nieuw Arch. Wiskunde (3) **3**, 124-128 (1955).

a coefficienti interi (gli a_i si potranno supporre primi fra loro, ed $a_0 > 0$); è dunque $g \geqslant 1$ il grado di $F(x)$ e sia $\Delta \neq 0$ il suo discriminante.

In luogo del prodotto $g(x, y)$ considereremo il prodotto

$$G(x, y) = F(x-y+1)F(x-y+2) \ldots F(x-1)F(x)$$

e studieremo l'andamento del massimo divisore P di $G(x, y)$ nell'intento di stabilirne delle limitazioni inferiori in funzione di y.

Già G. Ricci aveva osservato (per un polinomio di grado $g > 1$), che se y è dello stesso ordine di x ($y = [\alpha x]$, con $0 < \alpha \leqslant 1$) risulta $P > c_1 y \log y$ ($c_1 = c_1(\alpha, g) < 1$) per $x \geqslant x_0$, dove x_0 dipende dal polinomio $F(x)$ e da α (3).

Questo risultato si presentava in una serie di ricerche sul massimo divisore primo del prodotto $F(1)F(2) \ldots F(x)$, le quali erano intese a stabilire una limitazione inferiore di tale divisore in funzione di x. Il problema che così viene a delinearsi si può riguardare come un caso particolare di quello da noi sopra prospettato, ove si pensi $y = x$, ed è da considerarsi come una questione ormai classica: le prime ricerche risalgono infatti a P. Tchebycheff e successivi contributi sono dovuti a I. Ivanoff, G. Pólya e T. Nagell, oltre a quelli contenuti nel citato lavoro di G. Ricci (4).

Recentemente P. Erdös recava un nuovo rilevante contributo alla questione con alcuni più acuti risultati, ottenuti attraverso processi piuttosto laboriosi (5).

Portando invece l'attenzione sul caso, in certo senso opposto, che y sia piuttosto piccolo rispetto ad x, e comunque di ordine inferiore ad x per $x \to +\infty$, noi abbiamo ottenuti i risultati che ci proponiamo di esporre qui, alla cui dimostrazione, come vedremo, si giunge con considerazioni assai semplici, sfruttando un impianto di ragionamento che noi abbiamo sostanzialmente dedotto dal citato lavoro di G. Ricci.

I risultati annunziati sono condensati in due teoremi, la cui dimostrazione costituisce il principale scopo della presente Nota e di cui premettiamo qui l'enunciato.

Teorema A. *Fissati il polinomio $F(x)$ e le costanti δ ed ε ($0 < \delta < 1$, $\delta < \varepsilon g$) è possibile in conseguenza determinare x_0 ed y_0 tali che, per ogni coppia x, y con $x \geqslant x_0$, $y_0 \leqslant y < x^\delta$, risulti:*

$$P > (1-\varepsilon) y \log y .$$

---

(3) Si veda: G. Ricci, *Su un teorema di Tchebycheff-Nagell*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **12**, 295-303 (1934).

(4) Per notizie su tale questione e riferimenti bibliografici si veda il lavoro citato nella annotazione (3).

(5) P. Erdös, *On the greatest prime factor of* $\prod_{k=1}^{x} f(k)$, J. London Math. Soc. **27**, 379-384 (1952).

Teorema B. *Fissati il polinomio* $F(x)$ *e le costanti* η *e* σ $(\eta<1,$ $\sigma<(1-\eta)g/2)$ *è possibile in conseguenza determinare* x_0 *ed* y_0 *tali che, per ogni coppia* x, y *con* $x\geqslant x_0$, $y_0\leqslant y<\exp\{(\sigma\log x\cdot\log\log x)^{1/2}\}$, *risulti:*

$$P>y(\log y+\eta\log\log y)\,.$$

A meglio chiarire il contenuto del Teorema B riteniamo opportuno enunciare esplicitamente tre Corollari che ne forniscono interpretazioni espressive e graduali nei tre casi:

$\eta<0$, molto grande in valore assoluto $(\eta=-K)$,

$\eta<0$, piccolo in valore assoluto $(\eta=-\varepsilon)$,

η molto prossimo ad 1 $(\eta=1-\varepsilon)$.

Corollario 1°. *Per* H *arbitrariamente grande e* K *abbastanza grande,* $K\geqslant K_0(H)$, *e quando sia* $x\geqslant x_0$, $y_0\leqslant y<\exp\{(H\log x\cdot\log\log x)^{1/2}\}$, *si ha*

$$P>y(\log y-K\log\log y)\,.$$

Corollario 2°. *Per* $\varepsilon>0$ *arbitrario e quando sia* $x\geqslant x_0$, $y_0\leqslant y<$ $<\exp[\{(1/2)g\log x\cdot\log\log x\}^{1/2}]$, *si ha:*

$$P>y(\log y-\varepsilon\log\log y)\,.$$

Corollario 3°. *Per* $\varepsilon>0$ *arbitrario e* $\sigma>0$ *abbastanza piccolo,* $\sigma<\sigma_0(\varepsilon)$, *e quando sia* $x\geqslant x_0$, $y_0\leqslant y<\exp\{(\sigma\log x\cdot\log\log x)^{1/2}\}$, *si ha:*

$$P>y(\log y+(1-\varepsilon)\log\log y)\,.$$

II. - Due formule preliminari.

Dimostriamo adesso due formule, che contrassegneremo con (a) e (b), e che saranno di importanza essenziale per il seguito.

Indicheremo con $\nu(m)$ il numero delle soluzioni, mod m, della congruenza $F(x)\equiv 0\pmod m$.

Porremo poi $z=x-y$. Nelle nostre ipotesi è sempre $y=o(x)$, quindi noi potremo sempre supporre x abbastanza grande perchè risulti $z>x/2$.

Porremo infine: $\Phi(x,y)=\log G(x,y)$.

Sia ora α una costante positiva $<a_0$.

Supporremo x abbastanza grande perchè risulti:

$$\alpha n^g < F(n) \qquad \text{per ogni} \qquad n > z.$$

Avremo allora:

$$\Phi(x, y) \geqslant \sum_{n=z+1}^{x} \log(\alpha n^g) \geqslant y \log(\alpha z^g) \geqslant y \log\{\alpha \cdot (x/2)^g\} \geqslant gy \log x + y \log(\alpha \cdot 2^{-g}),$$

e potremo quindi scrivere:

$$\Phi(x, y) \geqslant gy \log x + O(y). \tag{a}$$

Sia ora p un numero primo. I fattori di $G(x, y)$ divisibili per p^a sono in numero al più eguale a

$$\nu(p^a)([y/p^a] + 1) \leqslant \nu(p^a)(y/p^a + 1).$$

La massima potenza di p che divide un qualunque fattore $F(n)$ del prodotto $G(x, y)$ $(z < n \leqslant x)$ avrà un esponente che non può superare

$$A = [\{\log F(x)\} / \log p] \leqslant [\{g \log x + \log(a_0 + 1)\} / \log p]$$

(si dovrà supporre x abbastanza grande in modo che risultino soddisfatte anche queste condizioni).

Ora se $p^{l(p)} \| G(x, y)$, avremo (6):

$$l(p) \leqslant \nu(p)\{(y/p) + 1\} + \nu(p^2)\{(y/p^2) + 1\} + \ldots +$$
$$+ \nu(p^A)\{(y/p^A) + 1\} \leqslant y \sum_{i=1}^{\infty} \nu(p^i)/p^i + \sum_{i=1}^{A} \nu(p^i).$$

Abbiamo chiamato Δ il discriminante di $F(x)$; siano ora $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots, p_r$ i numeri primi $\leqslant g|\Delta|$. Per un noto teorema di T. Nagell risulta, qualunque sia p e per ogni a (7),

$$\nu(p^a) \leqslant g\Delta^2.$$

(6) Scriviamo, come è ormai nell'uso, $p^a \| b$ per indicare:

$$p^a | b, \qquad p^{a+1} \nmid b.$$

Tale simbolo indica dunque che p^a è la massima potenza di p che divide b.

(7) Si veda a questo proposito: T. Nagell, *Généralisation d'un théorème de Tchebycheff*, J. Math. (8) **4**, 343-356 (1921).

Sarà dunque per tutti i p:

$$l(p) \leqslant g\Delta^2 \cdot y \sum_{i=1}^{\infty} (1/p^i) + g\Delta^2 \cdot A \leqslant g\Delta^2 \cdot y/(p-1) +$$
$$+ g\Delta^2 \cdot \{ g \log x + \log (a_0 + 1) \} / \log p \leqslant g\Delta^2 \cdot y + 2g^2\Delta^2 \cdot \log x +$$
$$+ 2g\Delta^2 \cdot \log (a_0 + 1) = O(y) + O(\log x) + O(1) = O(y + \log x).$$

Detto perciò D il massimo divisore di $G(x, y)$, composto esclusivamente coi fattori primi $p_1, p_2, \ldots, p_r$, avremo:

$$\log D = \sum_{i=1}^{r} l(p_i) \log p_i \leqslant O(y + \log x) \sum_{i=1}^{r} \log p_i = O(y + \log x).$$

Per un primo $p \geqslant p_{r+1} > g \,|\, \Delta \,|$ risulterà invece:

$$\nu(p^a) = \nu(p) \leqslant g$$

e quindi:

$$l(p) \leqslant \nu(p) y/(p-1) + \nu(p) A \leqslant \nu(p) y/p +$$
$$+ \nu(p) y/\{ p(p-1) \} + \nu(p) \{ g \log x + \log (a_0 + 1) \} / \log p .$$

Ora, se P è il massimo divisore primo di $G(x, y)$, avremo:

$$\Phi(x, y) \leqslant \log D + \sum_{p=p_{r+1}}^{P} l(p) \log p \leqslant O(y + \log x) + \sum_{p_r < p \leq P} l(p) \log p .$$

Per quest'ultima sommatoria abbiamo:

$$\sum_{p=p_{r+1}}^{P} l(p) \log p \leqslant y \sum_{p=p_{r+1}}^{P} \{ \nu(p) \log p \} / p +$$
$$+ y \sum_{p=p_{r+1}}^{P} \{ \nu(p) \log p \} / \{ p (p-1) \} + \{ g \log x + \log (a_0 + 1) \} \sum_{p=p_{r+1}}^{P} \nu(p) .$$

Ci servono adesso tre relazioni che ci permettano di maggiorare le tre ultime sommatorie. Una di queste relazioni è immediata:

$$\sum_{p_r < p \leq P} \{ \nu(p) \log p \} / \{ p(p-1) \} \leqslant g \sum_{p=p_{r+1}}^{P} (\log p) / \{ p(p-1) \} = kg = O(1) .$$

Le altre due sono rappresentate dalle note formule [8]:

$$\sum_{p \leq P} \{ \nu(p) \log p \} / p = \log P + O(1) ,$$

$$\sum_{p \leq P} \nu(p) = P/\log P + O(P/\log^2 P) .$$

Di qui ricaviamo adesso:

$$\sum_{p_r < p \leq P} l(p) \log p \leqslant y \log P + O(y) + g \log x \cdot (P/\log P) + \\ + O(P/\log P) + \log x \cdot O(P/\log^2 P) ,$$

e ne deduciamo infine la relazione:

$$\text{(b)} \qquad \Phi(x, y) \leqslant O(y + \log x) + y \log P + \\ + g \log x \cdot (P/\log P) + O(P/\log P) + O(P \log x/\log^2 P) .$$

III. – Dimostrazione dei Teoremi A e B.

Dimostriamo adesso il Teorema A.

La dimostrazione procederà per assurdo. Supponiamo dunque che, nelle ipotesi del Teorema A, risulti sempre:

$$P \leqslant (1 - \varepsilon) y \log y .$$

Ne risulterebbe:

$$\log P \leqslant \log y + O(\log \log y),$$

$$P/\log P \leqslant (1 - \varepsilon) y \log y / \{ \log y + o(\log y) \} = (1 - \varepsilon) y + o(y) ,$$

$$P/\log^2 P = O(y/\log y), \qquad \log y < \delta \log x ,$$

---

(8) Per la prima di queste formule si veda il lavoro citato in (7), per la seconda si veda il lavoro citato in (3).

e quindi la (b) ci darebbe:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &\leqslant O(y + \log x) + y \log y + O(y \log\log y) + \\ &+ g(1-\varepsilon) y \log x + o\,(y \log x) + O(y) + O(y \log x/\log y) \leqslant \\ &\leqslant gy \log x + \delta y \log x - \varepsilon g y \log x + o(y \log x).\end{aligned}$$

Poichè si ha per ipotesi $\varepsilon g - \delta > 0$, risulterebbe la relazione

$$\Phi(x, y) \leqslant gy \log x - (\varepsilon g - \delta) y \log x + o(y \log x)$$

in evidente contrasto colla (a) per x ed y abbastanza grandi. Questa contraddizione dimostra il nostro asserto.

Un pò più laboriosa è la dimostrazione del Teorema B, che procederà anche essa per assurdo. Mettiamoci dunque nelle ipotesi del Teorema B e supponiamo:

$$P \leqslant y \cdot (\log y + \eta \log\log y) = y \log y \cdot (1 + \eta \log\log y/\log y)\,.$$

Varrebbero le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}\log P &\leqslant \log y + \log\log y + \log\,(1 + \eta \log\log y/\log y) = \\ &= \log y \cdot \left\{1 + \log\log y/\log y + O(\log\log y/\log^2 y)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{P}{\log P} &\leqslant \frac{y \log y \cdot (1 + \eta \log\log y/\log y)}{\log y \cdot \{\, 1 + \log\log y/\log y + O(\log\log y/\log^2 y)\,\}} = \\ &= y(1 + \eta \log\log y/\log y) \left\{1 - \log\log y/\log y + O((\log\log y)^2/\log^2 y)\right. = \\ &= y\left\{1 - (1-\eta) \log\log y/\log y + O((\log\log y)^2/\log^2 y)\right\},\end{aligned}$$

$$\frac{P}{\log^2 P} = O(y/\log y)\,, \qquad \log y < (\sigma \log x \cdot \log\log x)^{1/2}\,.$$

La (b) ci darebbe adesso:

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &\leqslant O(y + \log x) + y \log y + O(y \log\log y) + \\ &+ gy \log x \cdot \left\{1 - (1-\eta) \log\log y/\log y + O((\log\log y)^2/\log^2 y)\right\} + \\ &+ O(y) + O(y \log x/\log y) \leqslant gy \log x + y \log y - \\ &- (1-\eta) gy \log x \cdot \log\log y/\log y + o(y \log x \cdot \log\log y/\log y)\,.\end{aligned}$$

Per ipotesi abbiamo $\sigma < (1-\eta)g/2$, potremo dunque trovare un η_1 tale che sia

$$\sigma < (1-\eta_1)g/2\,, \qquad \eta < \eta_1 < 1\,.$$

Ora facciamo vedere che per x ed y abbastanza grandi risulta sempre:

$$y \log y < (1-\eta_1) g y \log x \cdot \log\log y / \log y\,,$$

ossia

$$\log^2 y < (1-\eta_1) g \log x \cdot \log\log y\,.$$

Infatti se è

$$y \leqslant \exp\left\{ (\log x)^{\sigma/\{g\cdot(1-\eta_1)\}} \right\},$$

ricordando che $\sigma/\left\{g\cdot(1-\eta_1)\right\} < 1/2$, si ha subito:

$$\log^2 y \leqslant (\log x)^{2\sigma/\{g\cdot(1-\eta_1)\}} = o(\log x) < (1-\eta_1) g \log x \cdot \log\log y\,.$$

Se è invece

$$y > \exp\left\{ (\log x)^{\sigma/\{g\cdot(1-\eta_1)\}} \right\},$$

basterà che sia

$$\sigma \log x \cdot \log\log x < (1-\eta_1) g \log x \cdot \log\log y\,,$$

ossia

$$\sigma \log\log x < (1-\eta_1) g \log\log y\,,$$

$$(\log x)^{\sigma} < (\log y)^{g\cdot(1-\eta_1)}\,, \qquad (\log x)^{\sigma/\{g\cdot(1-\eta_1)\}} < \log y\,,$$

cioè:

$$y > \exp\left\{ (\log x)^{\sigma/\{g\cdot(1-\eta_1)\}} \right\},$$

come era appunto nelle ipotesi. Ne segue

$$\Phi(x, y) \leqslant g y \log x - (\eta_1 - \eta) y \log x \cdot \log\log y/\log y + o(y \log x \cdot \log\log y/\log y)\,,$$

in evidente contrasto colla (a) per x ed y abbastanza grandi. Da questa contraddizione segue l'asserto. Anche il Teorema B è così dimostrato.