Rivista Mat. Univ. Parma 5, 363-371 (1954)

MARIA ANTONIETTA BARATTA (*)

Sopra un problema non lineare di ripartizione del calore. (**)

1. – Introduzione.

In recenti lavori i Sigg. R. MANN e F. WOLF [1] (1), B. MANFREDI [2] si sono occupati di problemi, di grande interesse dal punto di vista tecnico, oltre che matematico, relativi allo scambio di calore fra un solido e un fluido nell'ipotesi che il coefficiente di conducibilità fra i due mezzi non sia costante, ma funzione della temperatura superficiale del solido.

Interessante è pure lo studio della ripartizione del calore fra due mezzi solidi, specialmente quando fra i due corpi esista una distribuzione di sorgenti di calore variabili col tempo. Si è condotti a problemi di questo tipo, volendo determinare lo stato termico di due solidi in moto relativo l'uno rispetto all'altro e aventi una parte di superficie a comune.

In molti casi fra le superficie in contatto dei due corpi circola un fluido particolare (contatto lubrificato), negli altri casi (contatto diretto) esisterà sempre fra le due superficie, data la loro inevitabile rugosità, un sottile strato d'aria.

Il depositarsi del fluido, in particolare dell'aria, sulle superficie dei due corpi, e quindi, nelle porosità che tali superficie presentano, genera su di esse una sottile pellicola che tende ad opporsi alla penetrazione del calore ([3], p. 74), generando così una resistenza che viene chiamata « resistenza termica di contatto ».

Tale resistenza dipenderà, com'è naturale, dalla natura delle superficie a

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 10-XII-1954.

(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

contatto, dal fluido che circola fra i due corpi e dalle temperature superficiali di questi. Infatti, al variare di queste varia la temperatura dello straterello di fluido e, con essa, cambiano le sue caratteristiche fisiche (densità, viscosità, ecc.) e, di conseguenza, anche la « resistenza termica di contatto » che, soltanto per temperature assai piccole, può ritenersi indipendente da queste.

È in questa ipotesi, di resistenza costante, che il Sig. S. A. SCHAAF [**4**] risolve un problema unidimensionale di flusso di calore relativo a due semispazi S_1 ed S_2, aventi a comune il piano origine, nell'ipotesi che la temperatura iniziale sia ovunque nulla e che sul piano comune esista una distribuizone di sorgenti di calore il cui rendimento specifico sia variabile col tempo.

Problemi analoghi furono già risolti da G. SESTINI [**5**], [**6**], [**7**] nell'ipotesi che i due corpi S_1 ed S_2 fossero un cilindro e un manicotto cilindrico coassiali in contatto diretto, nei quali le temperature dipendessero dal posto solo tramite la distanza dall'asse comune (problema unidimensionale).

Il problema [**7**] è stato da me successivamente esteso [**8**] al caso più generale di temperature in S_i $(i = 1, 2)$ funzioni anche dell'anomalia θ (problema bidimensionale).

I lavori dei Sigg. R. MANN e F. WOLF [**1**] e di B. MANFREDI [**2**] mi hanno suggerito l'idea di risolvere il problema analogo a quello studiato dal Sig. S. A. SCHAAF [**4**], supponendo la « resistenza termica di contatto » funzione delle temperature superficiali dei due corpi, tramite la loro differenza. Questa ipotesi, sperimentalmente verificata nel caso di un contatto solido-fluido [**1**], [**2**], è ragionevolmente accettabile, almeno in un primo studio, anche nel caso di un contatto solido-solido, in quanto, nell'accoppiamento diretto o lubrificato dei due solidi, la « resistenza termica di contatto » nasce, in ultima analisi, nel semplice accoppiamento solido-fluido.

Il problema così generalizzato ci è sembrato di un certo interesse, oltre che dal punto di vista matematico, data la sua non linearità, anche dal punto di vista fisico e tecnico, tanto da farne oggetto di questa Nota.

2. – Impostazione del problema.

Siano S_1 ed S_2 due mezzi semi-infiniti omogenei ed isotropi occupanti due semispazi aventi in comune il piano origine che assumeremo come piano $x = 0$ di un sistema di coordinate cartesiane ortogonali.

Sul piano $x=0$ penseremo generata, ad esempio per attrito, per $t > 0$, una distribuzione di sorgenti di calore di rendimento specifico variabile col tempo.

Supporremo, inoltre, inizialmente nulle le temperature in S_i $(i = 1, 2)$ e, per $t > 0$, funzioni del posto solo per tramite della distanza del punto considerato dal piano $x = 0$ (problema unidimensionale).

Indicheremo con

$U^{(i)} = U^{(i)}(x, t)$	la temperatura in S_i $(i = 1, 2)$,
$T \;\; = T(t)$	la temperatura dello strato di sorgenti con $T(0) = 0$,
$U_0^{(i)} = U^{(i)}(0, t)$	le temperature in S_i, per $x = 0$ e $t \geqslant 0$, con $U^{(i)}(0, 0) = 0$,
$\Phi \;\; = \Phi(0, t) = U_0^{(1)} - U_0^{(2)}$	il salto termico per $x = 0$, $t \geqslant 0$,
$f \;\; = f(\Phi)$	la resistenza di contatto funzione del salto termico Φ,
$h \;\; = f(0) > 0$	il valore di f per $\Phi = 0$, uguale al valore della stessa resistenza, sensibilmente costante per piccolissimi salti termici,
a_i	la diffusività termica di S_i,
k_i	la conduttività termica di S_i $(i = 1, 2)$.

Indicheremo infine con C_i $(i = 1, 2)$ delle costanti dipendenti dalla natura delle superficie a contatto.

Posto, per brevità,

$$\frac{\partial U^{(i)}}{\partial x} = U_x^{(i)}, \qquad \frac{\partial^2 U^{(i)}}{\partial x^2} = U_{xx}^{(i)}, \qquad \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t} = U_t^{(i)}, \qquad (i = 1, 2),$$

il problema di trovare le temperature in ogni istante t e in ogni punto P (di S_i) porta, com'è ben noto, alla risoluzione dei seguenti sistemi:

$$(\mathcal{A}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} U_{xx}^{(1)} = a_1^{-2} U_t^{(1)}, & x > 0,\ t > 0, \\ U^{(1)} - U^{(2)} = f \cdot (C_1 T + k_1 U_x^{(1)}), & x = 0,\ t > 0, \\ U^{(1)} = 0, & x \geqslant 0,\ t = 0; \end{array} \right.$$

$$(\mathcal{B}) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} U_{xx}^{(2)} = a_2^{-2} U_t^{(2)}, & x < 0,\ t > 0, \\ U^{(2)} - U^{(1)} = -f \cdot (C_2 T + k_2 U_x^{(2)}), & x = 0,\ t > 0, \\ U^{(2)} = 0, & x \leqslant 0,\ t = 0, \end{array} \right.$$

dove, come richiede la natura del problema, supporremo che

$$U^{(i)}, \qquad U_x^{(i)}, \qquad U_{xx}^{(i)}, \qquad U_t^{(i)}, \qquad (i = 1, 2),$$

siano funzioni continue delle loro variabili e inoltre che le U_i siano limitate per $|x| \to \infty$ e $t \to \infty$.

Supporremo inoltre:

a) T funzione continua e limitata per ogni $t \geqslant 0$,

b) Φ funzione continua e limitata per ogni $t \geqslant 0$ con $\Phi(0) = 0$,

c) f funzione continua e positiva.

Supposto

$$U_0^{(1)} \geqslant U_0^{(2)}, \qquad \text{per ogni } t \geqslant 0,$$

con che il problema non perde in generalità, si consideri la funzione

$$G = G(\Phi) = \Phi/f\,. \tag{1}$$

In base alle ipotesi formulate, la G risulta, manifestamente, funzione continua di Φ, positiva, nulla per $\Phi = 0$. Inoltre, essendo $1/f$ limitata qualunque sia Φ, e quindi per qualunque $t \geqslant 0$, la (1) assicura la lipschitzianità di G.

3. - Espressione della temperatura di S_i in funzione della differenza delle loro temperature superficiali.

Per la (1) i sistemi ($\mathcal{A}$) e ($\mathcal{B}$) possono scriversi nella forma seguente:

$$(\mathcal{A}') \quad \left\{\begin{array}{ll} U_{xx}^{(1)} = a_1^{-2} U_t^{(1)}, & x > 0,\ t > 0, \\ k_1 U_x^{(1)} = G - C_1 T, & x = 0,\ t > 0, \\ U^{(1)} = 0, & x \geqslant 0,\ t = 0; \end{array}\right.$$

$$(\mathcal{B}') \quad \left\{\begin{array}{ll} U_{xx}^{(2)} = a_2^{-2} U_t^{(2)}, & x < 0,\ t > 0, \\ k_2 U_x^{(2)} = G - C_2 T, & x = 0,\ t > 0, \\ U^{(2)} = 0, & x \leqslant 0,\ t = 0. \end{array}\right.$$

Applicando ai sistemi ($\mathcal{A}'$) e ($\mathcal{B}'$) il noto metodo della trasformazione di LAPLACE si ottengono facilmente per le loro soluzioni le espressioni ([**9**], pag. 247):

[**10**], pag. 402)

$$U^{(i)} = \int_0^t \frac{a_i[C_i T(\tau) - G(\Phi(0,\tau))]}{k_i\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \frac{-x^2}{4a_i^2(t-\tau)}\, d\tau\,, \tag{2}$$

con $i = 1, 2$.

Ricordando la definizione di prodotto integrale ([**11**], pag. 29) è opportuno, per il seguito, scrivere le (2) nella forma

$$U^{(i)} = a_i\,[C_i\, T(t) - G(\Phi(0, t))] * \frac{1}{k_i\sqrt{\pi t}} \exp \frac{-x^2}{4a_i^2 t}\,. \tag{3}$$

4. - Relazione per la differenza di temperatura superficiale.

Dalla (2), calcolando le temperature $U^{(i)}$ in punti simmetrici rispetto al piano $x = 0$, si ha:

$$U^{(1)} - U^{(2)} = \tag{4}$$

$$= \int_0^t \frac{a_1[C_1 T(\tau) - G(\Phi(0,\tau))]}{k_1\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \frac{-x^2}{4a_1^2(t-\tau)}\, d\tau - \int_0^t \frac{a_2[C_2 T(\tau) - G(\Phi(0,\tau))]}{k_2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \exp \frac{-x^2}{4a_2^2(t-\tau)}\, d\tau.$$

Passando al limite nella (4) per $|x| \to 0$, con $t > 0$, per le ipotesi formulate si ha ([**12**], pag. 302)

$$\Phi = U_0^{(1)} - U_0^{(2)} = \int_0^t \frac{a_1[C_1 T(\tau) - G(\Phi(0,\tau))]}{k_1\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, d\tau - \int_0^t \frac{a_2[C_2 T(\tau) - G(\Phi(0,\tau))]}{k_2\sqrt{\pi(t-\tau)}}\, d\tau\,. \tag{5}$$

Quindi, posto per brevità

$$h = \frac{a_1 k_2 C_1 - a_2 k_1 C_2}{k_1 k_2 \sqrt{\pi}}\,, \tag{6}$$

$$\varphi(t) = h \int_0^t \frac{T(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau, \tag{7}$$

$$l = \frac{a_2 k_1 - a_1 k_2}{k_1 k_2 \sqrt{\pi}}\,, \tag{8}$$

la (5) si può scrivere più brevemente

$$\Phi(0, t) = \varphi(t) + l \cdot \int_0^t \frac{G(\Phi(0, \tau))}{\sqrt{t - \tau}} \, d\tau. \tag{9}$$

Gioverà subito osservare che, per le ipotesi fatte sulle funzioni T e G, i due termini del secondo membro della (9) hanno significato per qualunque $t \geqslant 0$. Si può inoltre notare che se è

$$a_2 k_1 = a_1 k_2 \, , \tag{10}$$

è nullo il secondo integrale della (9). In questo caso la (9), tenuto conto delle relazioni (6), (7), (8), diventa

$$\Phi(0, t) = \frac{a_1(C_1 - C_2)}{k_1} \int_0^t \frac{T(\tau)}{\sqrt{\pi(t - \tau)}} \, d\tau. \tag{11}$$

La (10), e di conseguenza la (11), è sicuramente verificata se i due corpi sono costituiti dallo stesso materiale. Se, però, le loro superficie di contatto hanno caratteristiche diverse ($C_1 \neq C_2$) la (11) mostra che la differenza di temperatura superficiale non dipende più dalla «resistenza termica di contatto», ma risulta funzione esclusivamente della temperatura $T(t)$ dello strato di sorgenti, ed il problema ritorna ad essere di tipo lineare.

Se poi, per la natura delle superficie di contatto fosse $C_1 = C_2$ si avrebbe dalla (11), per qualunque t,

$$\Phi(0, t) = 0 \, ,$$

cioè le due temperature superficiali risulterebbero in ogni istante uguali; cosa questa che soddisfa all'intuizione, in quanto, essendo i due corpi fisicamente identici, il calore delle sorgenti deve ripartirsi in essi in egual modo.

La (9) ([**13**], pp. 89-91), per le ipotesi fatte sulla funzione G, risulta un'equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie, singolare, non lineare nell'incognita funzione $\Phi(0, t)$, esprimente la differenza delle temperature superficiali, e rappresenta la relazione fondamentale cui deve soddisfare la detta funzione.

Risolta la (9), le (3) dànno la soluzione del problema in esame. Vogliamo ora provare che l'equazione (9) è caratteristica per il nostro problema, dimostrando il seguente

Teorema. *Condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione limitata e positiva $y(t)$ possa rappresentare la differenza di temperatura superficiale per* *il nostro problema, è che soddisfi alla seguente equazione integrale, non lineare, di Volterra, di seconda specie,*

$$y(t) = \mu(t) + c \int_0^t \frac{G(y(t))}{\sqrt{t-\tau}} \mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

Abbiamo già constatato sopra che la condizione è necessaria. Basta infatti porre

$$\Phi(0, t) = y(t), \qquad \mu(t) = \varphi(t), \qquad c = l$$

per identificare la (12) con la (9). Proviamo ora che la condizione è anche sufficiente.

Sia $y(t)$ una funzione limitata, positiva, soddisfacente alla (12) e dimostriamo che le funzioni definite dalle (3) sono soluzioni rispettivamente dei sistemi $(\mathcal{A}')$ e $(\mathcal{B}')$ quando s'identifichi $y(t)$, $\mu(t)$ e c rispettivamente con $\Phi(0, t)$, $\varphi(t)$ ed l.

Alle $U^{(i)}$ date dalle (3), per le ipotesi formulate, possiamo applicare i ben noti teoremi:

1°) ([**11**], pag. 26)

$$\mathfrak{L} U_t^{(i)} = p U_*^{(i)} - U_0, \tag{13}$$

2°) ([**14**], pag. 255)

$$\lim_{p\to\infty} (p U_*^{(i)}) = \lim_{t\to 0} U^{(i)}, \tag{14}$$

con $U_0 = \lim_{t\to 0} U^{(i)}$, $U_*^{(i)} = \mathfrak{L} U^{(i)}$ e $i = 1, 2$.

Posto inoltre

$$G_* = \mathfrak{L} G, \qquad T_* = \mathfrak{L} T,$$

avendosi $G < L$ e $T < N$, con L ed N costanti positive, segue

$$\lim_{p\to\infty} G_* = \lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} \exp[-pt] \cdot G(\Phi(0, t))\, \mathrm{d}t \leqslant L \lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} \exp[-pt]\, \mathrm{d}t = L \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} = 0 ,$$

$$\lim_{p\to\infty} T_* = \lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} \exp[-pt] \cdot T(t)\, \mathrm{d}t \leqslant \lim_{p\to\infty} N \int_0^{+\infty} \exp[-pt]\, \mathrm{d}t = N \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p} = 0 .$$

Essendo poi ([**11**], pag. 33), per le (3),

$$U_*^{(i)} = \frac{a_i(C_iT_* - G_*)}{k_i\sqrt{p}} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}, \tag{15}$$

da cui risulta $\lim\limits_{p\to\infty} U_*^{(i)} = 0$, si ha, dalla (14),

$$\lim_{t\to 0} U^{(i)} = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{16}$$

Restano così verificate, come volevamo dimostrare, le condizioni iniziali del nostro problema.

Sostituendo la (16) nella (13) si ha

$$U_t^{(i)} = \mathcal{L}^{-1}(p\,U_*^{(i)}), \tag{17}$$

ovvero, per la (17) e ricordando la (15),

$$U_t^{(i)} = \mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{p}(a_i/k_i)(C_iT_* - G_*) \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right] =$$
$$= \mathcal{L}^{-1}\left[(a_i/k_i)(C_i\mathcal{L}T - \mathcal{L}G)\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1}\sqrt{p} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right],$$

dalla quale segue

$$a_i^{-2}U_t^{(i)} = \mathcal{L}^{-1}\mathcal{L}\left[(a_ik_i)^{-1}(C_iT - G)\mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{p} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right)\right]. \tag{18}$$

È noto ([**11**], pag. 29; [**10**], pag. 402) che le (3) si possono scrivere

$$U^{(i)}(x, t) = \frac{a_i(C_iT - G)}{k_i} * \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p}} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right), \tag{19}$$

dalle quali, derivando ambo i membri due volte rispetto ad x ([**12**], pag. 302), si ha rispettivamente:

$$U^{(i)}(x, t) = \frac{a_i(C_iT - G)}{k_i} * \mathcal{L}^{-1}\left(-a_i^{-1} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right), \tag{20}$$

$$U_{xx}^{(i)}(x, t) = \frac{C_iT - G}{a_i\,k_i} * \mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{p} \exp \frac{-x\sqrt{p}}{a_i}\right). \tag{21}$$

Coincidendo la (21) con la (18), risultano così verificate le prime equazioni dei sistemi ($\mathcal{A}'$) e ($\mathcal{B}'$).

Resta infine da verificare che le (3) soddisfano anche alla condizione al contorno, il che si ottiene immediatamente calcolando la (20) per $x = 0$, $t > 0$.

Riassumendo, possiamo quindi affermare che, ogni soluzione limitata, dell'equazione integrale non lineare (12) determina, attraverso le (2), non appena si attribuisca alle (12) l'espressione (9), una soluzione del nostro problema. Tale soluzione risulta, inoltre, unica, come si potrebbe provare con procedimento del tutto analogo a quello usato dai Sigg. R. Mann e F. Wolf **[1]**.

Bibliografia.

[1] R. Mann and F. Wolf: *Heat transfer between solids and gasses under nonlinear boundary condiction.* Q. Appl. Math. **9**, 163-184 (1951).

[2] B. Manfredi: *Sopra un problema cilindrico non lineare di propagazione del calore.* Rivista Mat. Univ Parma **3**, 383-396 (1952).

[3] R. C. L. Boskwort: *Heat transfer phenomena.* Assoc. General Publ., Sydney 1952.

[4] S. A. Schaaf: *On the surposition of heat source and conctat resistence.* Q. Appl. Math. **5**, 107-111 (1947).

[5] G. Sestini: *Sopra un problema di propagazione del calore.* Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **75**, 47-65 (1941).

[6] G. Sestini: *Sopra un problema ai limiti in un caso non stazionario di propagazione del calore.* Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat. e Appl. (5) **6**, 464-477 (1947).

[7] G. Sestini: *Sopra due problemi di propagazione del calore in un solido eterogeneo dotato di simmetria cilindrica.* Rivista Mat. Univ. Parma **1**, 405-417 (1950).

[8] M. A. Baratta: *Sopra un problema di ripartizione del calore.* Rivista Mat. Univ. Parma **5**, 197-207 (1954).

[9] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: *Conduction of heat in solids.* Clarendon Press, Oxford 1948.

[10] G. Doetsch: *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation.* Dover Publ., New York 1943.

[11] A. Ghizzetti: *Calcolo simbolico.* Zanichelli, Bologna 1943.

[12] É. Goursat: *Cours d'Analyse Mathématique.* Tom. III, Gauthier-Villars, Paris 1923.

[13] V. Volterra: *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles.* Gauthier-Villars, Paris 1913.

[14] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger: *Operational methods in applied Mathematics.* Univ. Press, Oxford 1949.