Rivista Mat. Univ. Parma 5, 269-280 (1954)

BRUNO PINI (*)

Estensione al caso parabolico di un teorema di F. Riesz relativo alle funzioni subarmoniche. (**)

È noto che se una funzione $u(x, y)$ è subarmonica in un campo A e se D è un dominio contenuto in A, esiste una distribuzione di masse positive $\omega(e)$ in D tale che

$$u(P) = -\int_D \lg\,(1/\overline{PQ})\,d\omega(e_o) + H(P)\,, \tag{1}$$

dove $H(P)$ è armonica in D e P è interno a D (¹).

Se l'operatore $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ si sostituisce con l'operatore $\partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial y$, è possibile stabilire anche per le funzioni che, relativamente a questo operatore parabolico, sono le analoghe delle funzioni subarmoniche, una decomposizione del tipo (1), ed è presumibile che ciò possa farsi anche in relazione a operatori ellittici e parabolici più generali.

Servendosi di opportune formole di media, l'estensione si realizza agevolmente con ragionamenti simili a certi ragionamenti usati da EVANS (²).

1. – Indichiamo con $\mathcal{M}$ l'operatore $\partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial y$ e con $\mathcal{L}$ il suo aggiunto. Fissato un punto $P_0(x_0, y_0)$ e un numero positivo r, indichiamo con $\mathcal{C}(P_0, r)$

(*) Professore s. della Università di Cagliari. Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Cagliari, Italia.

(**) Ricevuto il 28-X-1954.

(¹) F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*, I et II, Acta Math. **48**, 329-343 (1926) et **54**, 321-360 (1930).

(²) G. C. EVANS, *On potential of positive mass*, I, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, (1935). Cfr. anche: T. RADÓ, *Subharmonic functions*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Bd. 5, n. 1, Chelsea Publishing Company, Berlin 1937.

la curva

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \sqrt{2}\, r \operatorname{sen} \theta \cdot \sqrt{\lg (1/\operatorname{sen}^2 \theta)} \\ y = y_0 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \end{cases} \qquad (-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)\,,$$

e con $\mathcal{D}(P_0, r)$ il dominio limitato che ha $\mathcal{C}(P_0, r)$ per frontiera.

In tutto il seguito chiameremo *dominio normale* un dominio D del tipo $a \leqslant y \leqslant b$, $X_1(y) \leqslant x \leqslant X_2(y)$, essendo $X_1(y)$ e $X_2(y)$ due funzioni per esempio lipschitziane su $a \leqslant y \leqslant b$ e tali che $X_1(y) < X_2(y)$ per $a \leqslant y < b$; indicheremo con S_D la $\mathcal{F}D$ privata dei punti di $X_1(a) < x < X_2(a)$, $y = a$; inoltre, se P_0 è un punto di D, indicheremo con D_{y_0} il dominio $D(y \geqslant y_0)$.

Assegnato un dominio normale D e una funzione $f(P)$ continua su S_D, chiameremo *$\mathcal{M}$-funzione associata ad $f(P)$* la funzione $u(P)$ tale che $\mathcal{M}(u) = 0$ in $D - S_D$, $u = f$ su S_D.

In un precedente lavoro (³) una funzione $v(P)$ continua in un campo A è stata chiamata $\mathcal{M}$-subvalente se, fissato ad arbitrio in A un dominio normale D e detta $u(P)$ la $\mathcal{M}$-funzione associata a v su S_D, riesce $u \geqslant v$ in tutto D.

Posto

$$(3)\qquad \mu_0(v, P, r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (v)_{\mathcal{C}(P,r)} \cos \theta \cdot \sqrt{\lg (1/\operatorname{sen}^2 \theta)}\, d\theta\,,$$

si ha che condizione necessaria e sufficiente affinchè v sia $\mathcal{M}$-subvalente è che per ogni punto P di A e per tutti i valori ammissibili di r [cioè tali che $\mathcal{D}(P, r) \subset A$] sia

$$(4)\qquad v(P) \leqslant \mu_0(v, P, r)\,.$$

La caratterizzazione delle funzioni $\mathcal{M}$-subvalenti continue può essere fatta sostituendo alla (3) una diversa media, e ciò con larga arbitrarietà. Sebbene la (3) debba in certo senso considerarsi come la più semplice media relativa all'operatore $\mathcal{M}$ (analoga alla media gaussiana relativa al laplaciano), per gli scopi cui tende la presente Nota è opportuno usare una media diversa dalla (3).

Sia $\mathcal{C}^*(P_0, r)$ la curva

$$(2')\qquad \begin{cases} x = x_0 + \sqrt{6}\, r^{1/3} \operatorname{sen} \theta \cdot \sqrt{\log (1/\operatorname{sen}^2 \theta)} \\ y = y_0 + r^{2/3} \operatorname{sen}^2 \theta \end{cases} \qquad (-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2)\,,$$

e $\mathcal{D}^*(P_0, r)$ il dominio limitato che ha $\mathcal{C}^*(P_0, r)$ per frontiera. La soluzione

(³) B. PINI, *Maggioranti e minoranti delle soluzioni delle equazioni paraboliche*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **37**, 249-264 (1954).

fondamentale dell'equazione del calore

$$U(P, P_0) = \begin{cases} (y-y_0)^{-1/2} \exp\left[-\dfrac{(x-x_0)^2}{4(y-y_0)}\right] & \text{per } y > y_0\,, \\ 0 & \text{per } y \leqslant y_0\,, \end{cases}$$

risulta eguale ad $1/r$ su $\mathcal{C}(P_0, r)$ ed eguale a $(y-y_0)/r$ su $\mathcal{C}^*(P_0, r)$.

Dalla formula di reciprocità

$$\iint_T [u\mathcal{M}(v) - v\mathcal{L}(u)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathcal{F}T} [(uv_x - vu_x)\,\mathrm{d}y - uv\,\mathrm{d}x]\,,$$

prendendo per u la funzione $U(P, P_0) - (y-y_0)/r$, per v una funzione continua insieme a $\partial^2 v/\partial x^2$, $\partial v/\partial y$ e per T il dominio $\mathcal{D}^*(P_0, r)$ privato di un intorno di P_0, facendo successivamente tendere a zero il raggio del detto intorno si ottiene, con qualche semplice calcolo,

$$v(P_0) = \mu^*(v, P_0, r) - \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r}\right) \varrho^{2/3} \frac{\operatorname{sen}^4\theta\cdot\cos\theta}{\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\, \mathcal{M}(v)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\theta\,, \tag{5}$$

ove

$$\mu^*(v, P_0, r) = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (v)_{\mathcal{C}^*(P_0,r)} \operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos\theta\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{r}\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} v \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos\theta}{\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\theta\,. \tag{3'}$$

Se v è una funzione continua insieme alle derivate $\partial^2 v/\partial x^2$, $\partial v/\partial y$ in un campo A ed è ivi $\mathcal{M}$-subvalente, quindi tale che $\mathcal{M}(v) \geqslant 0$, dalla (5) si ha

$$v(P) \leqslant \mu^*(v, P, r) \tag{4'}$$

per ogni punto P, e reciprocamente. Pertanto la (4') caratterizza al pari della (4) le funzioni $\mathcal{M}$-subvalenti continue con le derivate $\partial^2/\partial x^2$ e $\partial/\partial y$.

Supponiamo ora la v soltanto continua. Posto

$$m^{(1)}(v, P, 1/n) = \frac{n^2}{\pi} \iint_{\xi^2+\eta^2 \leq 1/n^2} v(x+\xi, y+\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{6}$$

e in generale

$$(7)\qquad m^{(p)}(v, P, 1/n) = m^{(1)}(m^{(p-1)}(v, Q, 1/n), P, 1/n)\ ,$$

è noto che se v è continua, $m^{(1)}(v, P, 1/n)$ è continua con le derivate prime ed $m^{(2)}(v, P, 1/n)$ è continua insieme alle derivate seconde. Supponiamo che la v sia $\mathcal{M}$-subvalente; applicando a v la mediazione $m^{(2)}$ si ottiene ancora una funzione $\mathcal{M}$-subvalente; infatti dalla (3) e dalla (4) si deduce

$$m^{(2)}(v, P, 1/n) \leqslant m^{(2)}(\mu_0(v, Q, r), P, 1/n) = \mu_0(m^{(2)}(v, Q, 1/n), P, r)$$

e quindi, per la regolarità di $m^{(2)}(v, P, 1/n)$, resta soddisfatta la (4′) con $m^{(2)}(v, P, 1/n)$ al posto di v. Ora, fissato in A un insieme chiuso, per $n \to \infty$ la $m^{(2)}(v, P, 1/n)$ converge uniformemente a v; quindi dalla

$$m^{(2)}(v, P, 1/n) \leqslant \mu^*(m^{(2)}(v, Q, 1/n), P, r)$$

si deduce la (4′).

Reciprocamente, supposta soddisfatta la (4′), la v riesce $\mathcal{M}$-subvalente. Supponiamo dapprima che nella (4′) sussista sempre il segno di diseguaglianza. Se la v non fosse $\mathcal{M}$-subvalente, esisterebbe un dominio normale D in A tale che se u è la $\mathcal{M}$-funzione associata a v, in qualche punto di $D - S_D$ si avrebbe $v > u$; se P_0 è un punto ove $v - u$ raggiunge il massimo, si avrebbe, per r abbastanza piccolo, $v(P_0) - u(P_0) \geqslant \mu^*(v - u, P_0, r)$ e quindi $v(P_0) \geqslant \mu^*(v, P_0, r)$, contrariamente alla ipotesi. Se poi nella (4′) sussiste anche il segno di eguaglianza, posto

$$v_n(P) = v(P) + x^2/(2n)\ ,$$

con il ragionamento precedente si vede che $v_n(P)$ è $\mathcal{M}$-subvalente qualunque sia n. Fissato ora ad arbitrio un dominio normale D, sia u_n la $\mathcal{M}$-funzione associata a v_n; per note proprietà estremali delle $\mathcal{M}$-funzioni si ha che per $n \to \infty$ la $\{u_n\}$ converge uniformemente alla $\mathcal{M}$-funzione associata a v [da $u_n(P) = \mu^*(u_n, P, r)$ per tutti gli r ammissibili, segue $u(P) = \mu^*(u, P, r)$ per tutti gli r ammissibili, e questa è una proprietà di media caratteristica delle $\mathcal{M}$-funzioni]. Dunque:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la funzione $v(P)$ continua nel campo A sia ivi $\mathcal{M}$-subvalente è che per ogni punto P di A e per tutti gli r ammissibili sia soddisfatta la (4′).

Potremo perciò usare la (4′) per la definizione di funzione continua $\mathcal{M}$-subvalente.

2. – Attenuando ora le ipotesi sulla funzione $v(P)$, diremo che essa è $\mathcal{M}$-subvalente in un campo A se è $-\infty \leqslant v(P) < +\infty$; $v(P)$ è superiormente semicontinua in A; per ogni punto P di A e per tutti gli r abbastanza piccoli, la $\mu^*(v, P, r)$ esiste finita e soddisfa la (4').

Elenchiamo qui di seguito alcune osservazioni che saranno utili nel seguito.

I. Fissato in A un dominio normale D, se D' è un dominio interno a D, D' è ricopribile con un numero finito di intorni $\mathcal{D}^*(P, r)$ tutti contenuti in D se si prende r abbastanza piccolo; esiste poi una costante M tale che $v \leqslant M$ in D; essendo allora $v - M \leqslant 0$ in D e $\mu^*(v - M, P, r) > -\infty$ per ogni P di D', è anche

$$\iint\limits_{\mathcal{D}^*(P,r)} (v - M)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int\limits_0^r \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (v - M) \frac{\operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta}{\sqrt{\lg\,(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\, \mathrm{d}\varrho\, \mathrm{d}\theta > -\infty\,,$$

e quindi v è sommabile su D'. Pertanto l'insieme dei punti P ove $v(P) > -\infty$ è denso in A, e v è sommabile su ogni dominio appartenente ad A.

II. È $\lim\limits_{r\to 0} \mu^*(v, P_0, r) = v(P_0)$ in ogni punto P_0 di A. Supposto dapprima $v(P_0) > -\infty$, poichè vale la (4') per tutti gli r abbastanza piccoli, sarà $\min\lim\limits_{r\to 0} \mu^*(v, P_0, r) \geqslant v(P_0)$; d'altra parte, poichè $v(P)$ è superiormente semicontinua, si ha $v(P) < v(P_0) + \varepsilon$ per un $\varepsilon > 0$ fissato ad arbitrio e, corrispondentemente, per tutti i P di un conveniente intorno di P_0; perciò

$$\mu^*(v, P_0, r) < \mu^*(v(P_0) + \varepsilon, P_0, r) = v(P_0) + \varepsilon$$

e quindi $\max\lim\limits_{r\to 0} \mu^*(v, P_0, r) \leqslant v(P_0)$. Di qui l'asserto. Se poi è $v(P_0) = -\infty$, per la semicontinuità superiore è anche $\lim\limits_{P\to P_0} v(P) = -\infty$ e quindi l'asserto è del tutto evidente.

III. Fissato ad arbitrio in A un dominio normale D e su S_D una funzione continua $w \geqslant v$, se u è la $\mathcal{M}$-funzione associata a w, riesce $u \geqslant v$ in tutto D. Se non fosse $u \geqslant v$ in tutto D, la $v - u$, che è superiormente semicontinua in D, raggiungerebbe il massimo in un punto P_0 di $D - S_D$ onde $v(P_0) - u(P_0) \geqslant \geqslant \mu^*(v - u, P_0, r)$, ossia $v(P_0) \geqslant \mu^*(v, P_0, r)$ per tutti gli r abbastanza piccoli. Ciò è impossibile se la v soddisfa la (4') costantemente col segno di diseguaglianza. Se invece nella (4') può presentarsi anche il segno di eguaglianza, poichè la $v_n = v + x^2/(2n)$ si trova nelle condizioni ora dette, se $w_n = w + x^2/(2n)$ e u_n è la $\mathcal{M}$-funzione associata a w_n, si ha $u_n \geqslant v_n$ in tutto D. Al limite per $n \to \infty$ si deduce che $u \geqslant v$.

IV. Se la (4') è, per ogni punto P, verificata per tutti gli r abbastanza piccoli, lo è anche per tutti gli r ammissibili. Infatti, fissato un P_0 per cui

$v(P_0) > -\infty$ e una r ammissibile, consideriamo una successione $\{\varepsilon_n\}$ di numeri positivi decrescente a zero; sia y_n il più piccolo valore di y ($> y_0$) per cui $\varepsilon_n^2 = 2(y_n - y_0)\cdot \lg r^2/(y_n - y_0)^3$; sia $\mathcal{C}_n^*(P_0, r)$ la curva costituita dall'arco di $\mathcal{C}^*(P_0, r)$ appartenente a $y \geqslant y_n$ e dai segmenti $x = x_0 - \varepsilon_n$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_n$ e $x = x_0 + \varepsilon_n$, $y_0 \leqslant y \leqslant y_n$. Sia $\{v_n\}$ una successione non crescente di funzioni continue convergente a v in un dominio appartenente ad A e al quale $\mathcal{D}^*(P_0, r)$ sia interno; sia u_n la $\mathcal{M}$-funzione associata a v_n relativamente a $\mathcal{C}_n^*(P_0, r)$. Allora è $v(P_0) \leqslant u_n(P_0) = \mu^*(u_n, P_0, r)$; sull'arco comune a $\mathcal{C}^*(P_0, r)$ e a $\mathcal{C}_n^*(P_0, r)$ è $u_n = v_n$; $\{u_n\}$ è al pari di $\{v_n\}$ una successione non crescente e $\mu^*(u_n, P_0, r)$ è limitata inferiormente da una quantità indipendente da n; allora passando al limite per $n \to \infty$ si ha $v(P) \leqslant \mu^*(v, P_0, r)$.

V. Poichè $v(P)$ è superiormente semicontinua, comunque si fissi in A un insieme chiuso E, esiste una successione non crescente di funzioni continue convergente su E a v. Fissato allora un dominio D in A, se $\{v_n\}$ è la predetta successione relativa a S_D, se u_n è la $\mathcal{M}$-funzione associata a v_n, sia $u = \lim_{n\to\infty} u_n$. Se P_0 è un punto ove $u(P_0) > -\infty$, per una proposizione analoga al secondo teorema di HARNACK [4] si ha che la $\{u_n\}$ converge uniformemente in ogni dominio interno a D_{y_0} e quindi ivi u è una $\mathcal{M}$-funzione. Riesce inoltre $u \geqslant v$ in tutto D.

VI. Fissato ad arbitrio in A un dominio normale D, sia $\{v_n\}$ una successione non crescente di funzioni continue convergente su S_D a v. Sia u_n la $\mathcal{M}$-funzione associata a v_n e u il $\lim_{n\to\infty} u_n$. Se u' è una $\mathcal{M}$-funzione che su S_D prende valori $\geqslant v$, riesce $u' \geqslant u$ in tutto D. Infatti, fissato un $\varepsilon > 0$, sarà $v < u' + \varepsilon$ su S_D e quindi anche $v_n < u' + \varepsilon$ su S_D per n maggiore di un certo $n(\varepsilon)$; poichè è $u_n = v_n$ su S_D, per note proprietà estremali delle $\mathcal{M}$-funzioni, sarà anche $u_n < u' + \varepsilon$ per $n > n(\varepsilon)$ su S_D e quindi in tutto D; ma u_n converge non crescendo ad u onde $u < u' + \varepsilon$; per l'arbitrarietà di ε si ha l'asserto.

Si può ora provare che la funzione u dipende solo da v (e da D) e non dalla successione $\{v_n\}$. Infatti sia $\{v_n'\}$ un'altra successione non crescente di funzioni continue su S_D convergente a v; detta u_n' la $\mathcal{M}$-funzione associata a v_n', si ha, per quanto precede, $u_n' \geqslant u$ in D e, per la stessa ragione, $u_n \geqslant u'$, essendo $u' = \lim_{n\to\infty} u_n'$. Al limite si ha $u' \geqslant u$, $u \geqslant u'$, onde $u \equiv u'$. Diremo che la u è la *minima $\mathcal{M}$-funzione maggiorante associata a v* in D.

---

[4] Cfr. B. PINI, *Sulla soluzione generalizzata di Wiener per il primo problema di valori al contorno nel caso parabolico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **23**, 422-434 (1954).

3. – Poniamo

$$V(Q, P) = -U(Q, P)$$

e, per ogni $s > 0$,

$$V^{(s)}(Q, P) = \begin{cases} V(Q, P) & \text{se } Q \text{ è esterno a } \mathcal{D}^*(P, s) \\ -(\eta - y)/s & \text{se } Q \text{ appartiene a } \mathcal{D}^*(P, s), \end{cases} \tag{9}$$

essendo Q il punto (ξ, η).

Se $s \to 0$ decrescendo, $V^{(s)}(Q, P) \to V(Q, P)$ decrescendo. Per ogni valore di s la $V^{(s)}(Q, P)$ è, fissato P, una funzione di Q continua in tutto il piano. Per $\eta > y$ si ha $\mathcal{M}_P(V(Q, P)) = 0$ ed $\mathcal{M}_P(-(\eta - y)/s) = 1/s > 0$; inoltre è

$$-(\eta - y)/s \begin{cases} \geqslant V(Q, P) & \text{in } \mathcal{D}^*(P, s) \\ < V(Q, P) & \text{fuori di } \mathcal{D}^*(P, s). \end{cases}$$

Perciò $V^{(s)}(Q, P)$ è l'inviluppo superiore di due funzioni $\mathcal{M}$-subvalenti e quindi è $\mathcal{M}$-subvalente.

Sia ora $\omega(e)$ una distribuzione di masse positive su un insieme chiuso E. Proviamo che *la funzione*

$$u(P) = \int_E V(Q, P)\, d\omega(e_Q) \tag{10}$$

è $\mathcal{M}$-subvalente secondo la definizione del n. **2.**

Poichè $V^{(s)}(Q, P)$ è, fissato P, uniformemente continua rispetto a Q su ogni insieme chiuso, l'integrale

$$u^{(s)}(P) = \int_E V^{(s)}(Q, P)\, d\omega(e_Q)$$

è una funzione continua; poichè $\omega(e) \geqslant 0$ e $V^{(s)}(Q, P)$ è decrescente per s decrescente a zero, $u^{(s)}(P)$ è una funzione di s decrescente per s decrescente a zero; il limite di $u^{(s)}(P)$ per $s \to 0$, sia $u(P)$, è una funzione superiormente semicontinua tale che $-\infty \leqslant u(P) < +\infty$. Per la continuità di $V^{(s)}(Q, P)$ si ha

$$\mu^*(u^{(s)}(T), P, r) = \int_E \mu^*(V^{(s)}(Q, T), P, r)\, d\omega(e_Q)\,.$$

Ma $V^{(s)}(Q, P)$, come si è già detto, per ogni fissato Q, è una funzione $\mathcal{M}$-subvalente in P, onde

$$\mu^*(V^{(s)}(Q, T), P, r) \geqslant V^{(s)}(Q, P)$$

e quindi

$$\mu^*(u^{(s)}(T), P, r) \geqslant u^{(s)}(P) ,$$

cioè $u^{(s)}(P)$ è anch'essa $\mathcal{M}$-subvalente.

Ora la funzione $u(P)$ in un campo che abbia distanza positiva da E è una $\mathcal{M}$-funzione; perciò non è identicamente $u(P) = -\infty$. Sia P_0 un punto ove $u(P_0) > -\infty$; poichè $u^{(s)}(P)$ converge decrescendo a $u(P)$ per s decrescente a zero, ed è $\mathcal{M}$-subvalente, si ha

$$u(P_0) \leqslant u^{(s)}(P_0) \leqslant \mu^*(u^{(s)}, P_0, r) .$$

D'altra parte si può scrivere

$$\mu^*(u^{(s)}, P_0, r) =$$

$$= \frac{1}{r\sqrt{6\pi}} \int_0^r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \Big[3\sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}\, u^{(s)}(x_0 + \sqrt{6}\, r^{1/3} \operatorname{sen}\theta \cdot \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)},\; y_0 + r^{2/3} \operatorname{sen}^2\theta) +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{(\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\, u^{(s)}(x_0 + \sqrt{6}\, \varrho^{1/3} \operatorname{sen}\theta \cdot \sqrt{\lg(1/\operatorname{sen}^2\theta)},\; y_0 + \varrho^{2/3} \operatorname{sen}^2\theta) \Big] \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\theta \, d\varrho \, d\theta ;$$

l'integrando è una funzione decrescente per s che decresce a zero e l'integrale è limitato inferiormente; è allora lecito eseguire il passaggio al limite sotto al segno di integrale; con ciò si ha

$$u(P_0) \leqslant \mu^*(u, P_0, r) .$$

D'altra parte si ha

$$\mu^*(V(Q, P), P, r) = V^{(r)}(Q, P) ; \tag{11}$$

la dimostrazione di questa eguaglianza si può fare con un ragionamento in tutto simile a quello fatto in altro luogo ([5]) per provare un'analoga eguaglianza, e quindi per brevità qui la omettiamo. Poichè $V^{(r)}(Q, P)$ è continua, si ha

$$\mu^*(u, P, r) = \int_E V^{(r)}(Q, P) \, d\omega(e_Q) ,$$

([5]) B. Pini, *Su un integrale analogo al potenziale logaritmico*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **9**, 244-250 (1954).

cioè la $\mu^*(u, P, r)$ esiste finita per ogni punto P. Da ciò e da quanto precede segue l'asserto.

4. – Vogliamo ora invertire la proposizione del n. precedente. Premettiamo una

Osservazione. Sia $v(P)$ $\mathcal{M}$-subvalente (secondo la definizione del n. **2**) in un campo A. Fissiamo in A un dominio normale a D_1; siano D_2, D_3, D_4 altri tre domini normali tali che D_i sia completamente interno a D_{i+1} $(i=1, 2, 3)$ e D_4 appartenga ad A. Chiamiamo M_1 ed M_2 i due domini normali staccati da D_4 dalle caratteristiche che limitano D_4 e D_2 superiormente e, rispettivamente, inferiormente, ed N_1, N_2 i due domini normali costituenti le chiusure dei due insiemi disgiunti forniti da $D_4 - M_1 - M_2 - D_2$. Sia $h_1(P)$ la minima $\mathcal{M}$-funzione maggiorante associata a v in M_1 e v_1 la funzione che in M_1 coincide con h_1 e in $D_4 - M_1$ coincide con v. La v_1 è $\mathcal{M}$-subvalente; infatti essa è superiormente semicontinua e soddisfa la $(4')$, riuscendo $\mu^*(v_1, P, r)$ finita. La seconda affermazione è evidente; per la prima, basta assicurarsi che essa vale nei punti della caratteristica che limita inferiormente M_1. Ora se P_0 è un tal punto e se $v(P_0) > -\infty$, poichè $v(P_0) \leqslant h_1(P_0) = v_1(P_0)$, si ha $\max\lim_{P \to P_0} v(P) \leqslant v(P_0)$, per $P \subset D_4 - M_1$, e $\max\lim_{P \to P_0} h_1(P) = \lim_{P \to P_0} h_1(P) = h_1(P_0)$, per $P \subset M_1$, onde $\max\lim_{P \to P_0} v_1(P) \leqslant v_1(P_0)$. Se poi $v(P_0) = -\infty$ la stessa conclusione è del tutto evidente.

Siano poi $k_1(P)$ e $k_2(P)$ le minime $\mathcal{M}$-funzioni maggioranti associate a v_1 in N_1 ed N_2 e $v_2(P)$ la funzione che coincide con k_1 in N_1, con k_2 in N_2 e con v_1 in $D_4 - N_1 - N_2$. Anche v_2 è una funzione $\mathcal{M}$-subvalente. Per assicurarsi della sua semicontinuità superiore basta riferirsi ai punti comuni a N_1 e D_2 e a quelli comuni a N_2 e D_2. Sia P_0 uno dei primi e sia $v_1(P_0) > -\infty$; si ha $v_2(P_0) = v_1(P_0)$ e $\max\lim_{P \to P_0} v_1(P) \leqslant v_1(P_0)$ per $P \subset D_4 - N_1$; se poi $\{v_{1n}\}$ è una successione non crescente di funzioni continue convergente a v_1 su S_{N_1} e $\{u_{1n}\}$ è la successione delle $\mathcal{M}$-funzioni associate, si ha $v_{1n} < v_1 + \varepsilon/2$ su S_{N_1} per n maggiore di un certo $n(\varepsilon)$, $k_1 \leqslant u_{1n}$ e, fissato n, $u_{1n}(P) < v_{1n}(P_0) + \varepsilon/2$ per P appartenente a un intorno di P_0 e a N_1; pertanto $k_1(P) < v_1(P_0) + \varepsilon$ e quindi $\max\lim_{P \to P_0} k_1(P) \leqslant v_1(P_0)$ per $P \subset N_1$, e di conseguenza $\max\lim_{P \to P_0} v_2(P) \leqslant v_2(P_0)$. Se poi $v_1(P_0) = -\infty$ la stessa conclusione è evidente. È del pari evidente che $\mu^*(v_2, P, r)$ è finita e che v_2 soddisfa la $(4')$.

Infine sia $h_2(P)$ la minima $\mathcal{M}$-funzione maggiorante associata a v_2 in M_2 e $\bar{\bar{v}}(P)$ la funzione che in M_2 coincide con h_2 e in $D_4 - M_2$ coincide con v_2; anche questa è $\mathcal{M}$-subvalente come si riconosce con ragionamenti del tipo precedente.

Ciò premesso, dimostriamo che

Se $v(P)$ è $\mathcal{M}$-subvalente (nel senso specificato al n. **2**) *in un campo A, comunque* *si fissi un dominio normale D in A, esiste una distribuzione di masse positive $\omega(e)$ tale che*

$$v(P) = \int_D V(Q, P)\,\mathrm{d}\omega(e_Q) + h(P)\,, \tag{12}$$

essendo $h(P)$ una $\mathcal{M}$-funzione appartenente a $D - S_D$.

Consideriamo tre domini normali D_2, D_3 e D_4 tali che D_i sia interno a D_{i+1}, D sia interno a D_2 e D_4 appartenga ad A. Deduciamo da $v(P)$ la funzione $\bar{v}(P)$ come si è indicato sopra. La $\bar{v}(P)$ è sommabile su D_4; poniamo

$$\bar{v}_t(P) = \frac{\sqrt{3}}{t\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \bar{v} \frac{\operatorname{sen}^2\theta\cdot\cos\theta}{\sqrt{\lg\,(1/\operatorname{sen}^2\theta)}}\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\theta = \frac{3}{4t\sqrt{\pi}} \iint_{\mathcal{D}^*(P,t)} \bar{v}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \overline{m}(\bar{v}, P, t)$$

e poi

$$w_{nt}(P) = m^{(2)}(\bar{v}_t, P, 1/n)\,.$$

Prendendo t abbastanza piccolo ed n sufficientemente grande, la $\bar{v}_t(P)$ è una funzione continua in tutto D_3 e $w_{nt}(P)$ è continua con le derivate prime e seconde in tutto D_3. Poichè $\bar{v}$ è $\mathcal{M}$-subvalente, tale è anche $\bar{v}_t$ e conseguentemente w_{nt}. Infatti da $\bar{v}(P) \leqslant \mu^*(\bar{v}, P, r)$, essendo $\bar{v}$ limitata superiormente su D, per un teorema di TONELLI, sarà

$$\overline{m}(\bar{v}, P, t) \leqslant \overline{m}(\mu^*(\bar{v}, Q, r), P, t) = \mu^*(\overline{m}(\bar{v}, Q, t), P, r)$$

e poi, per la continuità di $\bar{v}_t(P)$,

$$m^{(2)}(\bar{v}_t, P, 1/n) \leqslant m^{(2)}(\mu^*(\bar{v}_t, Q, r), P, 1/n) = \mu^*(m^{(2)}(\bar{v}_t, Q, 1/n), P, r)\,.$$

Ora per P in D_3 si ha

$$w_{nt}(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_{D_3}} [(w_{nt}\,\partial V/\partial\xi - V\,\partial w_{nt}/\partial\xi)\mathrm{d}\eta + V w_{nt}\mathrm{d}\xi] + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_{D_3} V\mathcal{M}(w_{nt})\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{13}$$

intendendo che S_{D_3} sia percorso positivamente.

Poichè $w_{nt}(P)$ è $\mathcal{M}$-subvalente e continua con le derivate $\partial^2/\partial x^2$ e $\partial/\partial y$, è $\mathcal{M}(w_{nt}) \geqslant 0$. Poniamo

$$\omega_{nt}(e) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \iint_e \mathcal{M}(w_{nt})\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,, \tag{14}$$

essendo e un insieme boreliano variabile in D_3. Per $n = 1, 2, \ldots$ si ha una successione di distribuzioni di masse positive; ma

$$\omega_{nt}(D_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathcal{F}D_3} (\partial w_{nt}/\partial\xi \cdot d\eta - w_{nt}\, d\xi)$$

e w_{nt} e $\partial w_{nt}/\partial\xi$ per $n \to \infty$ convergono su $\mathcal{F}D_3$ uniformemente a $\overline{v}_t$ e $\partial\overline{v}_t/\partial\xi$; perciò le $\omega_{nt}(D_3)$ sono limitate superiormente da una quantità indipendente da n. È quindi possibile estrarre da $\{\omega_{nt}(e)\}$ una successione, che indicheremo ancora con $\{\omega_{nt}(e)\}$ convergente *debolmente* a una distribuzione di masse positive, sia $\omega_t(e)$. Dalla (13) si trae

$$\mu^*(w_{nt}, P, r) = \int_{D_3} \mu^*(V(Q, T), P, r)\, d\omega_{nt}(e_Q) + H_{nt}(P)\,,$$

ove

$$H_{nt}(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \mu^* \left\{ \int_{S_{D_3}} [(w_{nt}\partial V/\partial\xi - V\partial w_{nt}/\partial\xi) d\eta + V w_{nt}\, d\xi] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_{D_3}} [(w_{nt}\partial V/\partial\xi - V\partial w_{nt}/\partial\xi)\, d\eta + V w_{nt}\, d\xi]$$

è una $\mathcal{M}$-funzione. Per la (11) e la (9) $\mu^*(V(Q, T), P, r) = V^{(r)}(Q, P)$ è una funzione continua e quindi per la convergenza debole di $\{\omega_{nt}(e)\}$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_3} \mu^*(V(Q, T), P, r)\, d\omega_{nt}(e_Q) = \int_{D_3} V^{(r)}(Q, P)\, d\omega_t(e_Q)\,.$$

Le w_{nt} e $\partial w_{nt}/\partial\xi$ su S_{D_3} convergono uniformemente a $\overline{v}_t$ e $\partial\overline{v}_t/\partial\xi$, onde

$$\lim_{n\to\infty} H_{nt}(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{S_{D_3}} [(\overline{v}_t\partial V/\partial\xi - V\partial\overline{v}_t/\partial\xi)\, d\eta + V\overline{v}_t\, d\xi] = H_t(P)\,.$$

Pertanto

$$\mu^*(\overline{v}_t, P, r) = \int_{D_3} V^{(r)}(Q, P)\, d\omega_t(e_Q) + H_t(P)\,.$$

Ora in D_3 è $\overline{v} \leqslant M$ per una certa costante M e $M - \overline{v}(P) \geqslant \mu^*(M - \overline{v}, P, t)$

(perchè $\overline{v}$ è $\mathfrak{M}$-subvalente) onde, in particolare,

$$M - \overline{v}(P) \geqslant \frac{1}{t} \sqrt{\frac{2}{3\pi}} \int\limits_0^t \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (M - \overline{v}) \frac{\operatorname{sen}^2 \theta \cdot \cos \theta}{\sqrt{\lg (1/\operatorname{sen}^2 \theta)}} \, d\varrho \, d\theta$$

e quindi

$$M - \overline{v}(P) \geqslant 2M/3 - 2\overline{v}_t/3 \geqslant 0 \,, \qquad \text{ossia} \qquad M \geqslant \overline{v}_t \geqslant 3\overline{v}/2 - M/2 \,.$$

Poichè inoltre si ha quasi-dappertutto $\lim\limits_{t \to 0} \overline{v}_t = \overline{v}$, è

$$\lim_{t \to 0} \mu^*(\overline{v}_t, P, r) = \mu^*(\overline{v}, P, r) \,.$$

Essendo poi possibile scegliere una successione di valori di t convergente a zero in modo che la successione delle corrispondenti distribuzioni di masse converga debolmente, detto $\omega(e)$ il limite, si ha

$$\lim_{t \to 0} \int\limits_{D_3} V^{(r)}(Q, P) \, d\omega_t(e_Q) = \int\limits_{D_3} V^{(r)}(Q, P) \, d\omega(e_Q) \,.$$

È inoltre del tutto evidente che

$$\lim_{t \to 0} H_t(P) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{S_{D_3}} [(\overline{v} \, \partial V/\partial \xi - V \, \partial \overline{v}/\partial \xi) \, d\eta + V \overline{v} \, d\xi] = H(P) \,.$$

Dunque

$$\mu^*(\overline{v}, P, r) = \int\limits_{D_3} V^{(r)}(Q, P) \, d\omega(e_Q) + H(P) \,.$$

Infine, in base alla Osservazione II del n. **2**, e tenendo presente che se P appartiene a $D - S_D$ l'integrale $\int\limits_{D_3 - D} V(Q, P) \, d\omega(e_Q)$ è una $\mathfrak{M}$-funzione, che $V^{(r)}(Q, P)$ decresce per r che decresce a zero e che $\overline{v} = v$ in D, si conclude che

$$v(P) = \int\limits_D V(Q, P) \, d\omega(e_Q) + h(P) \,, \qquad P \subset D - S_D \,,$$

essendo $h(P)$ una $\mathfrak{M}$-funzione.