Rivista Mat. Univ. Parma 5, 233-253 (1954)

T. MANACORDA (*)

Sulla più generale teoria linearizzata delle trasformazioni reversibili adiabatiche.

1. – Introduzione. Il presente lavoro riguarda la teoria linearizzata delle trasformazioni adiabatiche reversibili di solidi incomprimibili perfettamente elastici.

È ben noto che mentre i fenomeni della statica elastica trovano la loro più aderente rappresentazione nello schema delle trasformazioni reversibili isoterme, i fenomeni della elastodinamica sembra si possano più convenientemente rappresentare nello schema delle trasformazioni reversibili adiabatiche.

D'altra parte recentemente il prof. A. SIGNORINI ha istituito [1] una teoria linearizzata della elastostatica isoterma la quale, affrancandosi dalla restrizione che lo stato di riferimento sia stato naturale di equilibrio, risulta la più generale possibile per solidi perfettamente elastici. Tale teoria è stata poi estesa, ancor più di recente, al caso di trasformazioni isoterme linearizzate di solidi incomprimibili [2].

Ora, nel caso di solidi non soggetti al vincolo di incomprimibilità, un teorema generale sul lavoro delle forze intime per una qualunque trasformazione isoterma ed una qualunque trasformazione adiabatica che portino dalla stessa configurazione iniziale alla stessa configurazione finale [3], permette senz'altro

---

(*) Indirizzo: Via Dupré 32, Firenze, Italia.

(1) A. SIGNORINI: *Lezioni di Fisica Matematica*, V. Veschi, Roma 1952-53 (litografia); *Sopra un'estensione della teoria linearizzata dell'elasticità*, Università e Politecnico Torino, Rend. Sem. Mat. **12**, 83-93 (1952-53).

(2) A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. III, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **39** (1955) [in corso di stampa, cfr. Cap. I, n. 8]. Nel seguito saranno richiamate anche le prime due Memorie (dallo stesso titolo della Mem. III): Mem. I, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22**, 33-143 (1943); Mem. II, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **30**, 1-72 (1949). Queste tre Memorie del prof. SIGNORINI saranno semplicemente citate con Mem. I, Mem. II, Mem. III.

(3) A. SIGNORINI, Mem. I, Cap. III, n. 5.

di concludere che le proprietà principali dei solidi perfettamente elastici, se ammesse valide per le trasformazioni isoterme, vengono necessariamente ancora ad essere valide anche per le trasformazioni adiabatiche. Onde è immediata l'estensione a queste ultime delle conclusioni della teoria linearizzata isoterma.

Invece, come osserverò al n. **2**, nel caso di solidi incomprimibili, almeno quando, come sempre si ammette nel presente lavoro, ci sia una dipendenza effettiva della dilatazione cubica dalla temperatura, un teorema analogo non può sussistere. Appare dunque chiara, da tutto quanto precede, l'opportunità di istituire, indipendentemente da ogni teoria isoterma, una teoria delle trasformazioni adiabatiche linearizzate che prenda le mosse dalla più generale teoria delle trasformazioni reversibili di solidi incomprimibili ([4]). È appunto ciò che viene fatto nel presente lavoro.

Dopo alcune considerazioni di carattere generale, si passa ad esaminare le restrizioni che le proprietà principali dei solidi perfettamente elastici (poste anche qui a base della teoria) vengono ad imporre al potenziale elastico adiabatico. Interviene anche ora una opportuna forma quadratica in nove variabili, mediante la quale è facile estendere al caso in esame classici teoremi di unicità nella elastodinamica, e, limitatamente alla statica, il teorema del BETTI, della minima energia potenziale, ecc.. Ma, per di più, essa permette proprio di esprimere tutti i coefficienti della omografia di KIRCHHOFF linearizzata, in analogia a quanto accade per i coefficienti dello stress nella elasticità classica.

Infine la teoria generale sviluppata nella prima parte viene applicata ad alcuni esempi notevolmente espressivi: le piccole vibrazioni flessionali di un cilindro omogeneo, l'estensione alla dinamica dei solidi incomprimibili di un teorema di reciprocità, la propagazione di onde ordinarie di discontinuità.

In tutto il corso del presente lavoro vengono ovunque adottate le notazioni delle Memorie del prof. SIGNORINI. In particolare, $\mathcal{F}$ indica l'energia libera (per unità di massa) del sistema, E l'equivalente meccanico della caloria, α l'omografia di trasformazione, ε l'omografia di deformazione e con u_r $(r=1,2,3)$ vengono indicate le componenti dello spostamento $\mathbf{s}$ rispetto ad una terna di riferimento prefissata.

2. – Premesse. Considerazioni generali. In ogni trasformazione reversibile, non isoterma, di un solido incomprimibile G_ϱ non cinematicamente indifferente alle variazioni di temperatura, la condizione di incomprimibilità

$$I_3\alpha \equiv \mathcal{D}(\varepsilon) = f(T, T_*, P_*) \qquad [f(T_*, T_*, P_*) = 1] \tag{1}$$

viene a stabilire una relazione effettiva tra la dilatazione cubica, la tempera-

([4]) A. SIGNORINI, Mem. III, Cap. I.

tura T nello stato attuale C e quella T_* nello stato di riferimento C_*. Ciò implica che la derivata di f rispetto a T non è identicamente nulla:

$$\frac{\partial f}{\partial T} \neq 0 \,, \tag{2}$$

almeno generalmente. Se per di più la trasformazione è adiabatica, la relazione generale [5]

$$k_* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} + p \frac{\partial f}{\partial T} = -E k_* s \,, \tag{3}$$

si specializza nel senso che, per ogni elemento di G_ϱ, l'entropia specifica s va intesa coincidente durante tutta la trasformazione con una costante s_* assegnata. Con ciò le (1) e (3), data la (2), vengono a costituire due effettive relazioni in termini finiti tra i coefficienti di deformazione $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_6$, la temperatura T e p, che devono sussistere identicamente durante tutta la trasformazione. La (2) stessa assicura che la (1) è esplicitabile rispetto a T. Indicherò con $T^{(\varepsilon)}$ la funzione delle ε [e di P_* e T_*] che si ottiene in tal modo. La (3) allora, una volta sostituita $T^{(\varepsilon)}$ a T, permette di ricavare p in funzione delle ε [e di P_*, T_*, s_*] nella forma

$$p^{(\varepsilon)} \equiv p(\varepsilon \,|\, T_*, s_*, P_*) = -k_* \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} + E s_*\right] \Big/ \frac{\partial f}{\partial T} \,. \tag{4}$$

Osservo subito che, ad esplicitazione effettuata, dalle (1) e (3) si ottiene

$$\frac{\partial T^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_j} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \varepsilon_j} \Big/ \frac{\partial f}{\partial T} \,, \qquad \frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_j} = -\left[p^{(\varepsilon)} \frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \frac{\partial T^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_j} + k_* \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \, \partial \varepsilon_j}\right] \Big/ \frac{\partial f}{\partial T} \,, \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6)$$

ed in particolare, nella configurazione di riferimento,

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial T^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_j}\right)_{\varepsilon=0} = \delta_j \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^{-1}_{T=T_*} , \\ \left(\frac{\partial p^{(\varepsilon)}}{\partial \varepsilon_j}\right)_{\varepsilon=0} = -k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \, \partial \varepsilon_j}\right)_{\varepsilon=0} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^{-1}_{T=T_*} - p_* \left(\frac{\partial^2 f}{\partial T^2}\right)_{T=T_*} \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^{-2}_{T=T_*} \delta_j , \end{gathered} \tag{5}$$

dove p_* indica naturalmente $p^{(\varepsilon)}(0, T_*, P_*, s_*)$, ed intendo

$$\delta_j = 1 \,, \qquad \delta_{j+3} = 0, \qquad (j = 1, 2, 3) \,.$$

([5]) A. SIGNORINI, Mem. III, Cap. I, n. 1.

Se si indica poi con $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\varepsilon | P_*)$ la funzione delle ε che si ottiene, nel caso in esame, dall'espressione dell'energia interna specifica $u(\varepsilon | T; P_*)$ sostituendo $T^{(\varepsilon)}$ a T, il lavoro delle forze intime per ogni trasformazione adiabatica, anche finita, di G_ϱ che si inizi da C_*, è dato ancora, per unità di volume, da

$$l_i^{(\mathcal{A})} = -k_*[\mathcal{U}(\varepsilon | P_*) - \mathcal{U}(0 | P_*)]\,. \tag{6}$$

Ricordo anche che $\mathcal{U}$ è legata ad $\mathcal{F}$ dalla relazione

$$\mathcal{U} = \mathcal{F} + Es_* T\,. \tag{7}$$

A questo punto conviene osservare che, se C è una configurazione di G_ϱ raggiunta, a partire da C_*, con una trasformazione adiabatica, la stessa C non può essere anche raggiunta, in generale, a partire dalla stessa C_*, con una trasformazione isoterma. Per quest'ultima infatti sarebbe, durante tutta la trasformazione, ed in particolare in C, $\mathcal{D} = 1$, mentre per la prima, stante la (2), in corrispondenza alle stesse ε è $\mathcal{D} = f$, con f in generale diversa da uno. Il paragone quindi tra il lavoro compiuto dalle forze intime per una qualunque trasformazione isoterma e per una qualunque adiabatica che portino dalla stessa C_* alla stessa C non è più possibile. Ciò implica, in particolare, a differenza di quanto accade per i solidi non soggetti al vincolo di incomprimibilità ([6]), che le proprietà principali dei solidi incomprimibili perfettamente elastici ([7]), anche se soddisfatte per le trasformazioni isoterme, non vengono necessariamente a valere anche per le trasformazioni adiabatiche. Appare tuttavia spontaneo ammetterne la validità anche per le trasformazioni del tipo preso in esame nel presente lavoro. Nel seguito intenderò sempre perciò che: a) in corrispondenza ad ogni valore τ della temperatura in un dato intervallo (τ_1, τ_2) sia possibile scegliere C_* coincidente con una configurazione di equilibrio spontaneo ([8]) alla temperatura uniforme τ; b) tra tutte le C_τ corrispondenti ad un dato valore della temperatura, ne esista almeno una, $\bar{C}_\tau$, a partire dalla quale il lavoro delle forze intime sia negativo per ogni trasformazione adiabatica, finita o infinitesima, che non si riduca ad uno spostamento rigido.

Chiamerò ancora $\bar{C}_\tau$ *configurazione stabile di equilibrio*, e dirò che G_ϱ è un *solido perfettamente elastico* G_e ogni volta che per esso siano verificate le proprietà a) e b).

([6]) A. Signorini, Mem. I, Cap. III, n. 5.

([7]) A. Signorini, Mem. III, Cap. I, n. 5.

([8]) Cioè una configurazione di equilibrio in assenza di forze di massa e superficiali esterne: A. Signorini, Mem. II, Cap. I, n. 1.

Posto anche qui

$$\varphi_j = k_* \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_j}, \qquad \varphi \equiv \|\varphi_j\|, \qquad (j = 1, 2, ..., 6), \tag{8}$$

dove la derivata si intende effettuata considerando le ε e T come variabili indipendenti, scriverò

$$p^{(\tau)}, \qquad \varphi_j^{(\tau)}, \qquad X_j^{(\tau)}, \qquad (j = 1, 2, ..., 6)$$

per i valori di p, delle φ_j e dei coefficienti di tensione nello stato di riferimento. Tra $p^{(\tau)}$, le $\varphi_j^{(\tau)}$ e le $X_j^{(\tau)}$ sussistono le relazioni

$$X_j^{(\tau)} = p^{(\tau)} - \varphi_j^{(\tau)} \qquad (j = 1, 2, ..., 6), \tag{9}$$

mentre è in generale

$$\beta = p - \frac{1}{\mathcal{D}} \alpha\varphi K \alpha \quad (^9). \tag{10}$$

3. – Potenziale elastico adiabatico. Trasformazioni dipendenti da un parametro. Intendendo ormai specializzata C_* in una $\overline{C}_\tau$, per il potenziale elastico specifico relativo ad una trasformazione adiabatica iniziantesi da $\overline{C}_\tau$, pongo ancora

$$W_a = k_*[\mathcal{U}(\varepsilon | P_*) - \mathcal{U}(0 | P_*)] . \tag{11}$$

Con ciò il lavoro complessivo delle forze intime resta ancora espresso, nonostante il vincolo di incomprimibilità, da [cfr. (6)]

$$- \mathcal{L}_i^{(\mathcal{A})} \equiv V_a = \int_{C_*} W_a \, dC_* . \tag{12}$$

Penso poi ad una trasformazione $C_* \to C$ dipendente in modo regolare da un parametro λ (10), con la sola convenzione che al valore $\lambda = 0$ corrisponda proprio la configurazione di riferimento. Con ciò, W_a, V_a, e quindi $\mathcal{L}_i^{(\mathcal{A})}$, vengono a dipendere da λ, e, tenuto conto della (11), (7) e (3), si ha

$$\frac{\partial W_a}{\partial \lambda} = k_* \sum_1^6{}_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \lambda} + k_* \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} + Es_*\right) \sum_1^6{}_j \frac{\partial T}{\partial \varepsilon_j} \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \lambda} = \sum_1^6{}_j \varphi_j \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial \lambda} - p \frac{\partial f}{\partial \lambda} . \tag{13}$$

(9) A. Signorini, Mem. III, Cap. I, nn. 3 e 1.
(10) A. Signorini, Mem. I, Cap. I, n. 18.

Posto, dunque, per ogni funzione scalare o vettoriale Φ di λ, $\Phi^{(n)} = \left(\dfrac{\partial^n \Phi}{\partial \lambda^n}\right)_{\lambda=0}$, si ha

$$W_a^{(1)} = \sum_1^6{}_j\, \varphi_j^{(\tau)} \varepsilon_j^{(1)} - p^{(\tau)} f^{(1)}, \tag{14}$$

e quindi

$$V_a^{(1)} = \int_{C_*} \mathrm{d}C_* \left\{ \sum_1^6{}_j \varphi_j^{(\tau)} \varepsilon_j^{(1)} - p^{(\tau)} f^{(1)} \right\}, \tag{15}$$

con

$$2\varepsilon_{rs}^{(1)} = \frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial y_s} + \frac{\partial u_s^{(1)}}{\partial y_r}, \qquad \varepsilon_r^{(1)} = \varepsilon_{rr}^{(1)}, \quad \varepsilon_{r+3}^{(1)} = 2\varepsilon_{r+1,r+2}^{(1)}, \qquad (r, s = 1, 2, 3). \tag{15'}$$

In modo analogo si ottiene

$$W_a^{(2)} = \sum_1^6{}_j [\varphi_j^{(\tau)} \varepsilon_j^{(2)} + \varphi_j^{(1)} \varepsilon_j^{(1)}] - p^{(\tau)} f^{(2)} - p^{(1)} f^{(1)}, \tag{16}$$

e

$$V_a^{(2)} = \int_{C_*} \mathrm{d}C_* \left\{ \sum_1^6{}_j [\varphi_j^{(\tau)} \varepsilon_j^{(2)} + \varphi_j^{(1)} \varepsilon_j^{(1)}] - p^{(\tau)} f^{(2)} - p^{(1)} f^{(1)} \right\}, \tag{17}$$

con

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_1^6{}_k\, k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_j \, \partial \varepsilon_k}\right)_{\lambda=0} \varepsilon_k^{(1)} + k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial T \, \partial \varepsilon_j}\right)_{\lambda=0} \sum_1^6{}_k \left(\frac{\partial T}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\lambda=0} \varepsilon_k^{(1)}. \tag{18}$$

Con l'intervento delle (5) e con le posizioni

$$M_{jk} = k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \varepsilon_j \, \partial \varepsilon_k}\right)_{\lambda=0}, \qquad p_j^{(\tau)} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varepsilon_j}\right)_{\lambda=0}, \qquad a^{(\tau)} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial T^2} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)^2\right]_{\lambda=0}, \tag{19}$$

la (18) si può scrivere nella forma

$$\varphi_j^{(1)} = \sum_1^6{}_k\, M_{jk} \varepsilon_k^{(1)} - [p^{(\tau)} a^{(\tau)} \delta_j + p_j^{(\tau)}] \operatorname{div}_{P_*} \mathbf{s}^{(1)}, \tag{20}$$

mentre è anche

$$p^{(1)} = \sum_1^6{}_j\, p_j^{(\tau)} \varepsilon_j^{(1)}. \tag{18'}$$

La $(5)_1$ permette anche di scrivere il primo termine dello sviluppo di $T^{(\varepsilon)}-\tau$ in serie di λ nella forma

$$T^{(\varepsilon)}-\tau=\frac{\lambda}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial T}\right)_{T=\tau}}\operatorname{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)}+\dots \tag{21}$$

4. – Intervento della condizione di incomprimibilità. La (1) permette di esprimere nel modo più semplice le funzioni $f^{(1)}$ e $f^{(2)}$ che figurano nelle (15) e (17) in funzione delle $\varepsilon^{(1)}$ e $\varepsilon^{(2)}$. Basta tener presente che la (1) stessa può anche essere scritta

$$1+2I_1\varepsilon+4I_2\varepsilon+8I_3\varepsilon=f^2(T,\tau,P_*)\,. \tag{22}$$

Derivando questa relazione rispetto a λ una e due volte, e poi facendo $\lambda=0$, si ottiene

$$I_1\varepsilon^{(1)}=\operatorname{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)}=f^{(1)},\qquad I_1\varepsilon^{(2)}+4I_2\varepsilon^{(1)}=(f^{(1)})^2+f^{(2)}\,. \tag{23}$$

Con ciò, la (15) si modifica subito in

$$V_a^{(1)}=\int_{C_*}\mathrm{d}C_*\left\{\sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(\tau)}\varepsilon_j^{(1)}-p^{(\tau)}\operatorname{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)}\right\},$$

mentre la specificazione della C_* in una C_τ ha da sola come conseguenza [11]

$$\int_{C_*}\mathrm{d}C_*\sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(\tau)}\varepsilon_j^{(1)}=\int_{C_*}p^{(\tau)}\operatorname{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)}\,\mathrm{d}C_*\,. \tag{24}$$

L'intervento della $(23)_2$ permette poi di trasformare opportunamente la (17). Avendosi infatti

$$\varepsilon_j^{(2)}=\eta_j^{(2)}+2\underline{\varepsilon}_j^{(1)}, \tag{25}$$

con

$$\left\{\begin{aligned}&\eta_j^{(2)}=\frac{\partial u_j^{(2)}}{\partial y_j},\qquad \eta_{j+3}^{(2)}=\frac{\partial u_{j+1}^{(2)}}{\partial y_{j+2}}+\frac{\partial u_{j+2}^{(2)}}{\partial y_{j+1}},\\ &\underline{\varepsilon}_j=\frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y_j}\right)^2,\qquad \underline{\varepsilon}_{j+3}=\sum_1^3{}_i\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial y_{j+1}}\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial u_{j+2}},\end{aligned}\right.\qquad (j=1,2,3), \tag{25'}$$

[11] A. SIGNORINI, Mem. III, Cap. I, n. 3.

si ha subito [cfr. (9)]

$$\sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(\tau)}\varepsilon_j^{(2)} = \sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(\tau)}\eta_j^{(2)} + 2p^{(\tau)}\sum_1^3{}_i\,\underline{\varepsilon}_i^{(1)} - 2\sum_1^6{}_j\,X_j^{(\tau)}\underline{\varepsilon}_j^{(1)}.$$

È anche [cfr. $(23)_2$ e $(25')_1$]

$$p^{(\tau)}f^{(2)} = p^{(\tau)}\,\mathrm{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(2)} + p^{(\tau)}\left\{2\sum_1^3{}_i\,\underline{\varepsilon}_i^{(1)} + 4I_2\varepsilon^{(1)} - (I_1\varepsilon^{(1)})^2\right\}.$$

Sostituendo nella (17), e tenendo conto della (24), si ottiene perciò

$$V_a^{(2)} = \int_{C_*} dC_*\left\{\sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(1)}\varepsilon_j^{(1)} + p^{(\tau)}[(I_1\varepsilon^{(1)})^2 - 4I_2\varepsilon^{(1)}] - 2\sum_1^6{}_j\,X_j^{(\tau)}\underline{\varepsilon}_j^{(1)} - p^{(1)}f^{(1)}\right\}. \tag{26}$$

D'altra parte si ha

$$(I_1\varepsilon^{(1)})^2 - 4I_2\varepsilon^{(2)} = 2[(I_1\varepsilon^{(1)})^2 - 2I_2\varepsilon^{(2)}] - (I_1\varepsilon^{(1)})^2 =$$

$$= 2\left[\sum_1^3{}_i\,(\varepsilon_i^{(1)})^2 + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,(\varepsilon_{i+3}^{(1)})^2\right] - (f^{(1)})^2.$$

È quindi in definitiva

$$V_a^{(2)} = \int_{C_*} dC_*\left\{\sum_1^6{}_j\,\varphi_j^{(1)}\varepsilon_j^{(1)} + 2p^{(\tau)}\left[\sum_1^3{}_i\,(\varepsilon_i^{(1)})^2 + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,(\varepsilon_{i+3}^{(1)})^2\right] - 2\sum_1^6{}_j\,X_j^{(\tau)}\underline{\varepsilon}_j^{(1)} - \right.$$
$$\left. - f^{(1)}[p^{(\tau)}f^{(1)} + p^{(1)}]\right\}, \tag{27}$$

con le $\varphi_j^{(1)}$ date dalle (20) e $p^{(1)}$ dalla (18'). Il fattore integrando non contiene più le $\varepsilon_j^{(2)}$, anzi è una funzione di secondo grado nelle variabili $u_{rs}^{(1)} = \partial u_r^{(1)}/\partial y_s$ [cfr. (15') e $(25')_2$] funzioni di P_* e del tempo.

In relazione ad ogni sestupla di variabili $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$, posto

$$\Xi = \sum_1^3{}_r\,\xi_r\,,$$

indico allora con $w_a(\xi|P_*)$ la forma quadratica nelle ξ (12)

$$w_a(\xi|P_*) = \frac{1}{2}\sum_{jk}^{1\dots6} M_{jk}\xi_j\xi_k + p^{(\tau)}\left[\sum_1^3{}_i\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}\sum_1^3{}_i\,\xi_{i+3}^2\right] -$$
$$-\left[\frac{1}{2}(1 + a^{(\tau)})p^{(\tau)}\,\Xi + \sum_1^6{}_j\,p_j^{(\tau)}\xi_j\right]\Xi\,, \tag{28}$$

(12) $w_a(\varepsilon^{(1)}|P_*)$ si riduce proprio alla forma quadratica w_τ [potenziale specifico ridotto] che interviene nella elasticità linearizzata isoterma quando sia $f \equiv 1$. Infatti, in tal caso, con la specificazione delle ξ nelle $\varepsilon^{(1)}$ è $\Xi \equiv \mathrm{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)} \equiv 0$ per la $(23)_1$. Il fatto che $a^{(\tau)}$ si riduca a zero [cfr. $(19)_3$] ogni volta che f sia funzione lineare di T non basta invece da solo a ridurre w_a a w_τ.

e per ogni vettore $\boldsymbol{v}$, funzione regolare di P_*, pongo anche

$$Q_a(\mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}P_*,\, P_*) = w_a(e\,|\,P_*) - \sum_{1}^{6}{}_j\, X_j^{(\tau)} \underline{e}_j\,, \tag{29}$$

dove e_j e $\underline{e}_j$ stanno ad indicare ciò che divengono i secondi membri delle (15′) e $(25')_2$ per $u_r \equiv v_r$ $(r = 1, 2, 3)$.

L'introduzione di Q_a permette allora di scrivere la (26) semplicemente [cfr. (20) e (27)]

$$V_a^{(2)} = 2\int_{C_*} Q_a(\mathrm{d}\boldsymbol{s}^{(1)}/\mathrm{d}P_*,\, P_*)\,\mathrm{d}C_*\,. \tag{30}$$

Stante la (28), e tenuta presente la specificazione delle ξ nelle e, Q_a viene ad essere una forma quadratica nelle nove $v_{rs} = \partial v_r/\partial y_s$, che si riduce a w_a quando lo stato di riferimento venga ad essere configurazione naturale di equilibrio $[X_j^{(\tau)} = 0]$. In ogni modo, anche nel caso generale, la precisazione di C_* in una $\overline{C}_\tau$ porta, accanto alla (24), alle condizioni

$$V_a > 0\,, \qquad V_a^{(2)} > 0\,, \tag{31}$$

ogni volta che $\boldsymbol{s}^{(1)}$ non si riduca ad uno spostamento rigido infinitesimo.

5. – Equazioni di Kirchhoff linearizzate. Relazione simbolica della elastodinamica linearizzata. Nelle equazioni di KIRCHHOFF relative a trasformazioni reversibili di solidi incomprimibili [13] faccio anche qui intervenire un comune parametro moltiplicativo ϑ per le forze di massa e superficiali, scrivendo

$$\left\{\begin{aligned} k_*\vartheta\boldsymbol{F} - k_*\boldsymbol{a} &= \mathrm{grad}_{P_*}\chi && \ldots\quad C_*\,, t \\ \vartheta\boldsymbol{f}_* &= \chi\boldsymbol{N}_* && \ldots\quad \Sigma_*\,, t \end{aligned}\right. \tag{32}$$

con

$$\chi = pR\alpha - \alpha\varphi\,,$$

e penso naturalmente che lo spostamento $\boldsymbol{s}$ dipenda da ϑ. Derivando allora le (32) rispetto a ϑ e poi ponendo $\vartheta = 0$, si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} k_*\boldsymbol{F} - k_*\boldsymbol{a}^{(1)} &= \mathrm{grad}_{P_*}\chi^{(1)} && \ldots\quad C_*\,, t\,, \\ \boldsymbol{f}_* &= \chi^{(1)}\boldsymbol{N}_* && \ldots\quad \Sigma_*\,, t\,, \end{aligned}\right. \tag{33}$$

[13] A. SIGNORINI, Mem. III, Cap. I, n. 1.

con

$$(33') \qquad \chi^{(1)} = p^{(1)} - \varphi^{(1)} + p^{(\tau)}(R\alpha)^{(1)} - \alpha^{(1)}\varphi^{(\tau)} .$$

Sfruttando d'altra parte l'identità $R\alpha K\alpha = I_3\alpha$, si ha innanzi tutto, con l'intervento delle (1) e $(23)_1$,

$$(R\alpha)^{(1)} + K\alpha^{(1)} = f^{(1)} .$$

Tenendo poi anche conto delle (9) si ottiene, per $\chi^{(1)}$,

$$(34) \qquad \chi^{(1)} = p^{(1)} + p^{(\tau)}f^{(1)} - \varphi^{(1)} - 2p^{(\tau)}\varepsilon^{(1)} + \alpha^{(1)}\beta^{(\tau)} .$$

Indicherò con G_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$ i coefficienti di $\chi^{(1)}$ rispetto ad una terna prefissata di riferimento. Tenendo presente la (29) è facile allora constatare direttamente che per le G_{rs} semplicemente si ha

$$(35) \qquad G_{rs} = -\frac{\partial Q_a}{\partial u^{(1)}_{rs}} \qquad \left(u^{(1)}_{rs} = \frac{\partial u^{(1)}_r}{\partial y_s}\,; \qquad r, s = 1, 2, 3\right).$$

Se infatti $\varepsilon^{(1)}_k$ è l'unica delle $\varepsilon^{(1)}_j$ $(j = 1, 2, ..., 6)$ in cui interviene $u^{(1)}_{rs}$ si ha [cfr. (28)]

$$(35') \quad \frac{\partial w_a}{\partial \varepsilon^{(1)}_k} = \sum_1^6{}_t\, M_{tk}\varepsilon^{(1)}_t - [p^{(\tau)}a^{(\tau)}\delta_k + p^{(\tau)}_k]\,\mathrm{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)} - p^{(\tau)}\delta_k\,\mathrm{div}_{P_*}\mathbf{s}^{(1)} - p^{(1)}\delta_k + 2p^{(\tau)}\varepsilon^{(1)}_{rs\tau}$$

con $p^{(1)}$ dato dalla (18′) e [cfr. (15′)]

$$\varepsilon^{(1)}_{rs} = \varepsilon^{(1)}_k \quad \text{per} \quad r = s = k\,, \qquad \varepsilon^{(1)}_{rs} = \frac{1}{2}\,\varepsilon^{(1)}_k \quad \text{per} \quad r \neq s.$$

Tenendo presenti le (20) si può anche scrivere

$$\frac{\partial w_a}{\partial \varepsilon^{(1)}_k} = \varphi^{(1)}_k - p^{(1)}\delta_k - p^{(\tau)}f^{(1)}\delta_k + 2p^{(\tau)}\varepsilon^{(1)}_{rs}.$$

Siccome è anche

$$(35'') \qquad \frac{\partial}{\partial u^{(1)}_{rs}} \sum_1^6{}_j\, X^{(\tau)}_j \varepsilon^{(1)}_j = 2\sum_1^3{}_t\, u^{(1)}_{rt} X^{(\tau)}_{ts}\,,$$

la (35) rimane completamente accertata.

Il sistema differenziale (33) risulta quindi perfettamente equivalente alla relazione globale

$$\int_{C_*} [k_* \boldsymbol{F} - k_* \boldsymbol{a}^{(1)}] \times \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}C_* + \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{f}_* \times \boldsymbol{v} \, \mathrm{d}\Sigma_* = \int_{C_*} \sum_{r,s}^{1...3} \frac{\partial Q_a}{\partial u_{rs}^{(1)}} v_{rs} \, \mathrm{d}C_* \,, \tag{36}$$

purchè intesa valida per ogni spostamento virtuale $\boldsymbol{v}$ dei punti di G_e a partire da C, con $\boldsymbol{v}$ funzione regolare di P_* in tutto C_*. La condizione $(31)_2$ permette allora di estendere al caso in esame ben noti teoremi di unicità, e, limitatamente alla statica adiabatica, i classici teoremi di BETTI, della minima energia potenziale, di CLAPEYRON, ecc..

6. – Solidi omogenei e isotropi. Per solido omogeneo e isotropo intendo naturalmente un G_e per il quale k_*, $\mathcal{F}$ e f non dipendano esplicitamente da P_*, e per di più $\mathcal{F}$ dipenda dalle ε solo per il tramite dei tre invarianti principali di deformazione. Lo stesso viene allora ad accadere, oltre che di $T^{(\varepsilon)}$, anche di $p^{(\varepsilon)}$. Nel seguito i tre invarianti principali di ε saranno semplicemente indicati con I_1, I_2, I_3.

L'intervento della condizione di omogeneità e isotropia semplifica notevolmente i risultati sin qui conseguiti. Intanto $\bar{C}_\tau$ deve ridursi ad una configurazione naturale di equilibrio ([14]), di modo che la (29) si semplifica in

$$Q_a(\mathrm{d}\boldsymbol{s}^{(1)}/\mathrm{d}P_*) = w_a(\varepsilon^{(1)}) \,,$$

mentre nella (28) le M_{jk}, $p^{(\tau)}$, $a^{(\tau)}$ e le $p_j^{(\tau)}$ si riducono ad altrettante costanti. Inoltre le espressioni delle M_{jk} attualmente si semplificano in

$$M_{jk} = k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial I_1^2}\right)_{\varepsilon=0} \delta_j \delta_k + k_* \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I_2}\right)_{\varepsilon=0} \left(\frac{\partial^2 I_2}{\partial \varepsilon_j \, \partial \varepsilon_k}\right)_{\varepsilon=0} . \tag{37}$$

Insieme è inoltre $p_j^{(\tau)} = \left(\frac{\partial p}{\partial I_1}\right)_{\varepsilon=0} \delta_j$, e quindi

$$p^{(1)} = \left(\frac{\partial p}{\partial I_1}\right)_{\varepsilon=0} \mathrm{div}_{P_*} \boldsymbol{s}^{(1)} \,.$$

Ciò semplifica le (20) in

$$\varphi_{rs}^{(1)} = A \, \mathrm{div}_{P_*} \, \boldsymbol{s}^{(1)} \cdot \delta_{rs} - 2B \varepsilon_{rs}^{(1)} \qquad (r, s = 1, 2, 3) \ ([15]) \,, \tag{38}$$

([14]) A. SIGNORINI, Mem. III, Cap. I, n. 3.

([15]) Intendo $\varphi_{rr} = \varphi_r$, $\varphi_{r+1,r+2} = \varphi_{r+2,r+1} = \varphi_{r+3}$.

con $\delta_{rr} = 1$, $\delta_{rs} = 0$, $r \neq s$, e

$$(38') \qquad \begin{aligned} A &= k_* \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial I_1^2} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I_2}\right)_{\varepsilon=0} - p^{(\tau)} a^{(\tau)} - \left(\frac{\partial p}{\partial I_1}\right)_{\varepsilon=0}, \\ B &= \frac{1}{2} k_* \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial I_2}\right)_{\varepsilon=0}. \end{aligned}$$

Le (38) consentono di scrivere la (34) nella forma

$$(39) \qquad G_{rs} = (\lambda_\tau + \varkappa_\tau) \operatorname{div}_{P_*} \mathbf{s}^{(1)} \cdot \delta_{rs} + 2\mu_\tau \varepsilon_{rs}^{(1)} \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

con

$$(39') \qquad \lambda_\tau = \left(\frac{\partial p}{\partial I_1}\right)_{\varepsilon=0}, \qquad \varkappa_\tau = p^{(\tau)} - A, \qquad \mu_\tau = B - p^{(\tau)}.$$

Ricordando la (10) si osservi che si ha, nelle condizioni presenti,

$$\chi^{(1)} = \beta^{(1)},$$

di modo che le G_{rs}, moltiplicate per ϑ, vengono anche a dare il primo termine dello sviluppo in serie di ϑ dei coefficienti di β. Allo stesso modo, $\vartheta \varepsilon_{rs}^{(1)}$ dà il primo termine dello sviluppo delle ε_{rs}. Infine $\vartheta \operatorname{div}_{P_*} \mathbf{s}^{(1)}$ risulta proporzionale, per la (21), al primo termine dello sviluppo di $T - \tau$. Posto dunque

$$\Delta X_{rs} = \vartheta G_{rs}, \qquad \eta_{rs} = \vartheta \varepsilon_{rs}^{(1)}, \qquad k \Delta T = \vartheta \varkappa_\tau \operatorname{div}_{P_*} \mathbf{s}^{(1)},$$

siccome risulta

$$\lambda_\tau \vartheta \operatorname{div}_{P_*} \mathbf{s}^{(1)} = \lambda_\tau \vartheta I_1 \varepsilon^{(1)} = \lambda_\tau I_1 \eta,$$

le (39) si possono scrivere

$$(39'') \qquad \Delta X_{rs} = \lambda_\tau I_1 \eta \cdot \delta_{rs} + 2\mu_\tau \eta_{rs} + k \Delta T \cdot \delta_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3).$$

Le (39″) vengono così a rientrare nelle classiche equazioni della termoelasticità linearizzata [16].

---

[16] A. E. H. LOVE, *Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 4ª ediz. 1927.

7. – Flessione di un cilindro omogeneo. Riprendo ora, come primo esempio di applicazione delle considerazioni generali svolte nei nn. precedenti, il problema della impostazione tridimensionale dell'equazione delle corde vibranti com'è trattato dal prof. SIGNORINI [17], con l'aggiunta del vincolo di incomprimibilità, ma in ipotesi più generali.

Penso dunque che, in C_*, G_e si riduca ad un cilindro retto omogeneo, con le basi fisse, mobile in assenza di forze di massa e superficiali esterne sulla superficie laterale. Scegliendo l'asse $O\boldsymbol{c}_1$ di una terna di riferimento trirettangola $O\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{c}_3$ parallelo alle generatrici del cilindro, in C_*, $\beta^{(\tau)}$ può ancora avere non nullo solo il coefficiente $X_{11}^{(\tau)}$. Pongo anche qui

$$X_{11}^{(\tau)} = -\mathcal{C}\boldsymbol{c}_1 .$$

L'omogeneità porta che $\mathcal{C}$ è costante; mi pongo poi ancora nel caso che sia $\mathcal{C} > 0$. Adotto però qui l'ipotesi che, durante il moto, sia perpendicolare a $\boldsymbol{c}_1$ lo sforzo interno relativo ad ogni elemento di superficie $\mathrm{d}\Sigma$ di C, di normale $\boldsymbol{u}$, al quale corrisponda in C_* un elemento $\mathrm{d}\Sigma_*$ di superficie di normale $\boldsymbol{u}_*$ perpendicolare a $\boldsymbol{c}_1$. Sia cioè

$$\beta\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\Sigma\times\boldsymbol{c}_1 = 0 \tag{40}$$

ogni volta che ad $\boldsymbol{u}$ corrisponda un versore $\boldsymbol{u}_*$ normale a $\boldsymbol{c}_1$. La (40) equivale anche a

$$\chi\boldsymbol{u}_*\times\boldsymbol{c}_1 = 0$$

ogni volta che $\boldsymbol{u}_*\times\boldsymbol{c}_1 = 0$, quindi anche a

$$\chi^{(1)}\boldsymbol{u}_*\times\boldsymbol{c}_1 = 0 \tag{40'}$$

per ogni $\boldsymbol{u}_*$ normale a $\boldsymbol{c}_1$. Ciò richiede senz'altro che siano identicamente nulle G_{12} e G_{13}, cioè [cfr. (35)] che sia

$$\frac{\partial Q_a}{\partial u_{12}^{(1)}} = \frac{\partial Q_a}{\partial u_{13}^{(1)}} = 0 . \tag{41}$$

D'altra parte è ora [cfr. (29)]

$$Q_a = w_a + \frac{1}{2}\mathcal{C}\sum_{1}^{3}{}_h\,(u_{h1}^{(1)})^2 .$$

---

[17] Nelle sue *Lezioni di Fisica Matematica* [loc. cit. in [1]]; cfr. Cap. V, n. 20.

Le (41) equivalgono quindi a

$$0 = \frac{\partial Q_a}{\partial u_{1i}^{(1)}} = \frac{\partial w_a}{\partial u_{1i}^{(1)}} = \frac{\partial w_a}{\partial u_{i1}^{(1)}} \qquad (i = 2, 3),$$

perchè w_a dipende da $u_{1i}^{(1)}$ solo per il tramite di $\varepsilon_{1i}^{(1)}$. Ciò permette di concludere che si ha, ancora,

$$G_{i1} = -\frac{\partial Q_a}{\partial u_{i1}^{(1)}} = -\mathcal{C}\, u_{i1}^{(1)} \qquad (i = 2, 3), \tag{42}$$

come nel caso di solidi comprimibili [18] e nonostante la maggiore generalità dell'ipotesi qui accettata.

Ciò è quanto basta ad assicurare che, ricorrendo alle equazioni linearizzate (33), si perviene anche nel caso in esame all'equazione di moto

$$k_* \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial t^2} + \mathcal{C} \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial y_1^2} = 0 \quad \ldots \quad C_*, t \quad (i = 2, 3), \tag{43}$$

per il valor medio sulla sezione retta di G_e in C_* della componente $u_i^{(1)}$ $(i=2, 3)$ di $\boldsymbol{s}^{(1)}$. Ad esempio per $i = 2$, dalla seconda delle $(33)_1$ si ha infatti, nel caso in esame

$$-k_* \frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2} = \frac{\partial G_{21}}{\partial y_1} + \frac{\partial G_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial G_{23}}{\partial y_3} \quad \ldots \quad C_*, t, \tag{44}$$

mentre la seconda delle $(33)_2$ dà $[\boldsymbol{N}_* = N_2 \boldsymbol{c}_2 + N_3 \boldsymbol{c}_3$ su $\Sigma_*^{(l)}]$

$$G_{22} N_2 + G_{23} N_3 = 0 \quad \ldots \quad \Sigma_*^{(l)}, t, \tag{44'}$$

sulla superficie laterale di G_e in C_*. Integrando allora la (44) sulla generica sezione retta A del cilindro in C_*, avendosi, se c indica il contorno completo di A [cfr. (44')]

$$\iint_A \left(\frac{\partial G_{22}}{\partial y_2} + \frac{\partial G_{23}}{\partial y_3} \right) \mathrm{d}y_2 \mathrm{d}y_3 = -\int_c (G_{22} N_2 + G_{23} N_3)\, \mathrm{d}c = 0,$$

si ottiene

$$-k_* \frac{\partial^2 \bar{u}_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{A} \iint_A G_{21}\, \mathrm{d}y_2\, \mathrm{d}y_3,$$

---

[18] Cfr. loc. cit. in [17], p. 273.

con

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{A} \iint_A u_2^{(1)} \, dy_2 \, dy_3 \, .$$

Basta allora l'intervento della (42) per ottenere da questa la (43). Per $\bar{u}_3$ si ottiene naturalmente un'equazione identica alla (43).

8. – Estensione di un teorema di reciprocità nella dinamica. D'ora innanzi e senza possibilità di equivoci, indico $\boldsymbol{s}^{(1)}, \chi^{(1)}$, ecc. semplicemente con $\boldsymbol{s}$, χ, ecc..

Mi propongo ora di mostrare come si adatti agevolmente al caso generale in esame — di solidi incomprimibili anche non isotropi, con configurazione di riferimento anche non esente da stress — un teorema di reciprocità per la dinamica dei solidi elastici stabilito dal prof. D. GRAFFI [19] nel caso di solidi isotropi e con configurazione di riferimento esente da stress, ma non soggetti al vincolo di incomprimibilità [20].

Riprendo in considerazione a questo scopo le equazioni linearizzate (33) facendo l'ipotesi che, se $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{f}_*$ dipendono dal tempo, siano funzioni tali che ne esista la trasformata di LAPLACE relativa ad un parametro σ reale, per ogni $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$. Applicando allora ad ambo i membri della (33) la trasformazione di LAPLACE, si perviene al sistema

$$(45) \qquad \begin{cases} k_* \mathfrak{L}\boldsymbol{F} - k_*\sigma^2 \mathfrak{L}\,\boldsymbol{s} + k_*(\sigma \boldsymbol{s}_0 + \dot{\boldsymbol{s}}_0) = \operatorname{grad}_{P_*} \mathfrak{L}\chi & \dots\ C_* \,, \\ \mathfrak{L}\boldsymbol{f}_* = \mathfrak{L}\chi \boldsymbol{N}_* & \dots\ \Sigma_* \,, \end{cases}$$

dove $\boldsymbol{s}_0(P_*)$ e $\dot{\boldsymbol{s}}_0(P_*)$ stanno ad indicare i valori, nell'istante iniziale, dello spostamento e della velocità dei punti P di G_e. Ponendo, per semplicità,

$$(46) \qquad \boldsymbol{\Phi}(P_*, \sigma) = \mathfrak{L}\boldsymbol{F} + \sigma \boldsymbol{s}_0 + \dot{\boldsymbol{s}}_0 \,, \qquad \boldsymbol{\varphi}_*(Q_*, \sigma) = \mathfrak{L}\boldsymbol{f}_* \,, \qquad \boldsymbol{d}(P_*, \sigma) = \mathfrak{L}\boldsymbol{s} \,,$$

---

[19] D. GRAFFI: *Sui teoremi di reciprocità nei fenomeni dipendenti dal tempo*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **18**, 173-200 (1939); *Sul teorema di reciprocità nella dinamica dei solidi elastici*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna, Cl. Sci. Fis. (10) **4**, 3-9 (1946-47); *Über die Reziprozitätssatz in der Dynamik der elastischen Körper*, Ing.-Archiv. **22**, 45-46 (1954). Una estensione alla dinamica del teorema del BETTI è stata anche data da P. LOCATELLI, *Principi della statica delle costruzioni nella dinamica*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **73**, 157-167 (1940).

[20] Del resto, l'estensione del principio nel caso della più generale elasticità linearizzata per solidi comprimibili [cfr. annotazione [1]] è anche più agevole.

le (45) divengono

$$(45') \qquad \begin{cases} k_*[\boldsymbol{\Phi} - \sigma^2 \boldsymbol{d}] = \operatorname{grad} \mathcal{L}\chi & \dots\ C_*\,, \\ \boldsymbol{\varphi}_* = \mathcal{L}\chi N_* & \dots\ \Sigma_*\,. \end{cases}$$

Si osservi ora che, essendo i coefficienti di χ funzioni lineari omogenee delle u_{rs} [cfr. (35) e (29)], i coefficienti di $\mathcal{L}\chi$ sono espressi da funzioni lineari omogenee nelle $d_{rs} = \partial d_r / \partial y_s$. Ponendo allora

$$Q_a(\mathrm{d}\,\boldsymbol{d}/\mathrm{d}P_*\,, P_*) = Q_a^{(d)}\,, \qquad G_{rs}^{(d)} = \mathcal{L}G_{rs}\,,$$

sussistono perciò tutte le uguaglianze

$$(47) \qquad G_{rs}^{(d)} = -\frac{\partial Q_a^{(d)}}{\partial d_{rs}} \qquad (r, s = 1, 2, 3)\,.$$

Il sistema (45′) è dunque perfettamente equivalente, per qualunque $\sigma \geqslant \sigma_0$, alla relazione globale

$$(48) \qquad \int_{C_*} k_*[\boldsymbol{\Phi} - \sigma^2 \boldsymbol{d}] \times \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}C_* + \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{\varphi}_* \times \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}\Sigma_* = \int_{C_*} \sum_{r,s}^{1\dots3} \frac{\partial Q_a^{(d)}}{\partial d_{rs}}\, v_{rs}\, \mathrm{d}C_*\,,$$

purchè intesa valida per qualsiasi vettore $\boldsymbol{v}$ funzione regolare dei punti P_* di C_* e dei punti Q_* di Σ_*, senza escludere che $\boldsymbol{v}$ possa anche dipendere da σ.

Ciò premesso, si pensi a due sistemi $\boldsymbol{F}'$ e $\boldsymbol{F}''$, $\boldsymbol{f}'$ e $\boldsymbol{f}''$, di forze di massa e superficiali, e si indichi con $\boldsymbol{s}'$ e $\boldsymbol{s}''$ i corrispondenti spostamenti all'istante t, relativi alle condizioni iniziali $\boldsymbol{s}_0'$, $\dot{\boldsymbol{s}}_0'$, e $\boldsymbol{s}_0''$, $\dot{\boldsymbol{s}}_0''$. Siano poi $\boldsymbol{\Phi}'$ e $\boldsymbol{\Phi}''$, $\boldsymbol{\varphi}_*'$ e $\boldsymbol{\varphi}_*''$, $\boldsymbol{d}'$ e $\boldsymbol{d}''$ i vettori corrispondenti secondo le posizioni (46). Nella (48) si identifichi allora, una prima volta $\boldsymbol{\Phi}$ con $\boldsymbol{\Phi}'$, $\boldsymbol{\varphi}_*$ con $\boldsymbol{\varphi}_*'$, $\boldsymbol{d}$ con $\boldsymbol{d}'$, e $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{d}''$, e una seconda volta, $\boldsymbol{\Phi}$ con $\boldsymbol{\Phi}''$, $\boldsymbol{\varphi}_*$ con $\boldsymbol{\varphi}_*''$, $\boldsymbol{d}$ con $\boldsymbol{d}''$ e $\boldsymbol{v}$ con $\boldsymbol{d}'$. È facile constatare che si ha

$$(49) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots3} \frac{\partial Q_a^{(d')}}{\partial d'_{rs}}\, d''_{rs} = \sum_{r,s}^{1\dots3} \frac{\partial Q_a^{(d'')}}{\partial d''_{rs}}\, d'_{rs}\,.$$

Tenendo infatti presenti le (35′) e (35″), tale uguaglianza risulta senz'altro evidente per quanto riguarda il secondo membro della (35″) e il primo, secondo, quarto e sesto termine del secondo membro della (35′). Quanto al terzo e quinto termine, per ciò che riguarda il primo membro della (49), si ha l'espressione

$$\operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{d}' \left\{ \sum_1^3{}_k\, p_k^{(\tau)} d''_{kk} + \sum_1^3{}_k\, p_{k+3}^{(\tau)} [d''_{k+1,k+2} + d''_{k+2,k+1}] \right\} +$$
$$+ \operatorname{div}_{P_*} \boldsymbol{d}'' \left\{ \sum_1^3{}_k\, p_k^{(\tau)} d'_k + \sum_1^3{}_k\, p_{k+3}^{(\tau)} [d'_{k+1,k+2} + d'_{k+2,k+1}] \right\},$$

che non cambia scambiando tra loro $\boldsymbol{d}'$ e $\boldsymbol{d}''$, e che quindi figura anche a secondo membro della (49).

La (48) ha quindi come conseguenza la relazione

$$(48') \qquad \int_{C_*} k_* \boldsymbol{\Phi}' \times \boldsymbol{d}'' \, \mathrm{d}C_* + \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{\varphi}'_* \times \boldsymbol{d}'' \, \mathrm{d}\Sigma_* = \int_{C_*} k_* \boldsymbol{\Phi}'' \times \boldsymbol{d}' \, \mathrm{d}C_* + \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{\varphi}''_* \times \boldsymbol{d}' \, \mathrm{d}\Sigma_* ,$$

valida per ogni istante t e per qualunque $\sigma \geqslant \sigma_0$, e che formalmente [salvo il significato di $\boldsymbol{\Phi}'$, $\boldsymbol{\varphi}_*$ e $\boldsymbol{d}$] non differisce dal classico teorema di BETTI. Si osservi però che si ha [cfr. $(46)_1$]

$$k_* \boldsymbol{\Phi}' \times \boldsymbol{d}'' = k_* \mathcal{L} \boldsymbol{F}' \times \mathcal{L} \boldsymbol{s}'' + k_* (\sigma \boldsymbol{s}'_0 + \dot{\boldsymbol{s}}'_0) \times \mathcal{L} \boldsymbol{s}'' ,$$

e ancora, con una integrazione per parti,

$$\sigma \boldsymbol{s}'_0 \times \mathcal{L} \boldsymbol{s}'' = \boldsymbol{s}'_0 \times \boldsymbol{s}''_0 + \boldsymbol{s}'_0 \times \mathcal{L} \dot{\boldsymbol{s}}''_0 .$$

Se allora si pone, in relazione ad ogni $\tau \leqslant t$ e non negativo,

$$(50) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \int_{C_*} k_* \boldsymbol{F}'(t-\tau, P_*) \times \boldsymbol{s}''(P_*, \tau) \, \mathrm{d}C_* = L^{(F')}(t-\tau, \tau) , \\ & \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{f}'_*(t-\tau, Q_*) \times \boldsymbol{s}''(Q_*, \tau) \, \mathrm{d}\Sigma_* = L^{(f')}(t-\tau, \tau) , \end{aligned} \right.$$

una applicazione del teorema del prodotto integrale permette subito di scrivere la (48') nella forma:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t \int_0^t \{ L^{(F')} + L^{(f')} - L^{(F'')} - L^{(f'')} \} \mathrm{d}\tau =$$
$$= \int_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \, \mathrm{d}t \int_{C_*} k_* [\boldsymbol{s}''_0 \times \dot{\boldsymbol{s}}'(P_*, t) - \boldsymbol{s}'_0 \times \dot{\boldsymbol{s}}''(P_*, t) + \dot{\boldsymbol{s}}''_0 \times \boldsymbol{s}'(P_*, t) - \dot{\boldsymbol{s}}'_0 \times \boldsymbol{s}''(P_*, t)] \, \mathrm{d}C_* .$$

Da questa si ottiene infine la relazione di reciprocità cercata

$$(51)\qquad \int_0^t \{L^{(F')} + L^{(f')} - L^{(F'')} - L^{(f'')}\}\, d\tau =$$

$$= \int_{C_*} k_*[\boldsymbol{s}_0'' \times \dot{\boldsymbol{s}}'(P_*, t) - \boldsymbol{s}_0' \times \dot{\boldsymbol{s}}''(P_*, t) + \dot{\boldsymbol{s}}_0'' \times \boldsymbol{s}'(P_*, t) - \dot{\boldsymbol{s}}_0' \times \boldsymbol{s}''(P_*, t)]\, dC_* ,$$

che non differisce da quella ottenuta dal prof. GRAFFI ([21]).

Una semplice ma espressiva applicazione della (51) si può ottenere pensando che $\boldsymbol{s}'$ si riduca ad uno spostamento omogeneo indipendente dal tempo, a partire da C_*. La (35) porta allora che tutte le G'_{rs} formate con $\boldsymbol{s}'$ si riducono a delle costanti, e dalla $(33)_1$ deriva allora $\boldsymbol{F}' \equiv 0$, mentre la $(33)_2$ determina le forze superficiali atte a produrre la voluta deformazione.

Nella (51) è allora

$$L^{(F')} \equiv 0 , \qquad \boldsymbol{s}_0' = \dot{\boldsymbol{s}}_0' = 0 , \qquad \dot{\boldsymbol{s}}' \equiv 0 .$$

Si ha inoltre

$$L^{(f')} = \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{f}'_*(Q_*) \times \boldsymbol{s}''(Q_*, \tau)\, d\Sigma_* = \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{N}_* \times K\chi'\boldsymbol{s}''\, d\Sigma_* = -\int_{C_*} \sum_{r,s}^{1\ldots3} G'_{rs} \frac{\partial u''_r}{\partial y_s}\, dC_* ,$$

e, per la costanza delle G'_{rs},

$$L^{(f')} = -C_* \sum_{r,s}^{1\ldots3} G'_{rs}\, \bar{u}''_{rs} \qquad (r, s = 1, 2, 3),$$

con $\bar{u}''_{rs} = \dfrac{1}{C_*}\displaystyle\int_{C_*} u''_{rs}\, dC_*$. La (51) può dunque scriversi, nel caso particolare,

$$C_* \sum_{r,s}^{1\ldots3} G'_{rs} \int_0^t \bar{u}''_{rs}\, d\tau = -\int_0^t (L^{(F'')} + L^{(f'')})\, d\tau - \int_{C_*} k_* \dot{\boldsymbol{s}}_0'' \times \boldsymbol{s}'(P_*)\, dC_* .$$

Di qui infine, con una derivazione rispetto al tempo,

$$(52)\qquad C_* \sum_{r,s}^{1\ldots3} G'_{rs}\bar{u}''_{rs} = -\int_{C_*} k_* \boldsymbol{F}''(0, P_*) \times \boldsymbol{s}'\, dC_* - \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{f}''_*(0, Q_*) \times \boldsymbol{s}'\, d\Sigma_* -$$

$$- \int_0^t d\tau \left\{ \int_{C_*} k_* \boldsymbol{s}' \times \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{F}''(t-\tau, P_*)\, dC_* + \int_{\Sigma_*} \boldsymbol{s}' \times \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{f}''_*(t-\tau, Q_*)\, d\Sigma_* \right\} .$$

([21]) Cfr. loc. cit. in ([19]), secondo lavoro, formula (24).

Il secondo membro è una funzione nota di t. In relazione a particolari scelte di s', è dunque possibile determinare in ogni istante i valori medi in C_* delle u''_{rs}, perciò delle ε''_{rs}, della rotazione locale, ecc..

9. – Propagazione in G_e di onde ordinarie di discontinuità. Come ultimo esempio di applicazione della teoria generale svolta nella prima parte del presente lavoro, faccio ora qualche considerazione sulla propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un solido G_e del tipo qui sempre preso in considerazione.

Mentre la teoria delle onde di discontinuità nel caso di mezzi continui generali, non soggetti al vincolo di incomprimibilità, è stata oggetto da molti anni di numerosissime ricerche ([22]), il caso di solidi elastici incomprimibili ha invece finora incontrato un interesse assai ridotto ([23]), nonostante l'attuale sviluppo degli studi sulla elasticità dei continui incomprimibili.

Ammetto dunque che le componenti u_r $(r=1, 2, 3)$ di $\mathbf{s}$ ([24]) siano funzioni finite e continue di t, y_1, y_2, y_3 in tutto C_* insieme alle loro derivate prime, mentre le derivate parziali seconde possono anche subire delle discontinuità di prima specie nei punti di una superficie σ_* di C_*, variabile col tempo. Indico con a_* la velocità di avanzamento di σ_*, e con $\boldsymbol{\nu} \equiv (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ la normale a σ_* diretta nel verso della propagazione, ed infine, in relazione a qualunque scalare o vettore Φ, funzione di P_* e t, indico con $\Delta\Phi$ la discontinuità subita da Φ attraverso σ_*.

([22]) Basterà qui citare l'opera notissima: J. HADAMARD, *Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'Hydrodynamique*, A. Hermann, Paris 1903; inoltre le Memorie di P. DUHEM, *Recherches sur l'élasticité*, Ann. Sci. École. Norm. Sup. **22**, 143-217 (1905) e **23**, 169-223 (1906).

Cfr. anche, per una trattazione generale, A. SIGNORINI, *Lezioni di Fisica Matematica*, V. Veschi, Roma 1950-51, e tra i contributi italiani più recenti: B. FINZI, *Propagazione ondosa nei continui anisotropi*, Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. **75**, 630-640 (1942); C. TOLOTTI, *Deformazioni finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico dei solidi elastici isotropi*, Univ. Roma, Ist. Naz. Alta Mat., Rend. Mat. e Appl. (5) **4**, 34-59 (1943); C. CATTANEO, *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **1**, 66-72, 728-734 (1946); M. PASTORI, *Propagazione ondosa nei continui anisotropi e corrispondenti direzioni principali*, Nuovo Cimento (9) 6, 187-193 (1949).

([23]) Su questo argomento è a mia conoscenza il solo lavoro J. L. ERICKSEN, *On the propagation of waves in isotropic incompressible perfectly elastic materials*, J. Rational Mech. Anal. **2**, 329-337 (1953), nel quale l'A. tratta la propagazione di onde ordinarie di discontinuità in un solido perfettamente elastico, isotropo, in assenza di forze di massa, e soggetto al vincolo $\mathcal{D} \equiv 1$. Non so di ricerche dedicate al caso di solidi incomprimibili anche anisotropi, per trasformazioni adiabatiche.

([24]) Seguito naturalmente ad indicare $\mathbf{s}^{(1)}$, $\chi^{(1)}$, ecc. con $\mathbf{s}$, χ, ecc..

Se si pone, per uniformità di notazione,

$$t = y_0\,, \qquad a_* = -\nu_0\,,$$

e si indica con $\boldsymbol{\lambda} \equiv (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ il vettore caratteristico della discontinuità, le condizioni di compatibilità di HUGONIOT-HADAMARD si scrivono, come è ben noto,

$$\Delta \frac{\partial^2 u_r}{\partial y_h \partial y_k} = \lambda_r \nu_h \nu_k, \quad (r = 1, 2, 3;\; h, k = 0, 1, 2, 3). \tag{53}$$

In particolare è

$$\Delta \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \lambda_r a_*^2\,, \tag{53'}$$

$$\Delta \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial y_s} = \lambda_r \nu_r \nu_s\,, \qquad \Delta \frac{\partial \varepsilon_{r+3}}{\partial y_s} = (\lambda_{r+1}\nu_{r+2} + \lambda_{r+2}\nu_{r+1})\nu_s \qquad (r = 1, 2, 3;\; s = 0, 1, 2, 3).$$

Nel seguito intenderò sempre

$$\zeta_{rr} = \zeta_r = \lambda_r \nu_r\,, \qquad 2\zeta_{r+1,r+2} = \zeta_{r+3} = \lambda_{r+1}\nu_{r+2} + \lambda_{r+2}\nu_{r+1}\,. \tag{54}$$

Le $(53')_2$ si possono così uniformare in

$$\Delta \frac{\partial \varepsilon_j}{\partial y_s} = \zeta_j \nu_s \qquad (j = 1, 2, \ldots, 6;\; s = 0, 1, 2, 3). \tag{53''}$$

Richiamato tutto ciò, passiamo a determinare le condizioni di compatibilità dinamica nel caso in esame nel presente lavoro. Esse si ottengono calcolando la discontinuità, attraverso σ_*, del primo e secondo membro delle equazioni linearizzate di KIRCHHOFF (33).

Per quanto riguarda il primo membro si ha semplicemente [cfr. $(53')_1$]

$$\Delta[k_* \boldsymbol{F} - k_* \boldsymbol{a}] = -k_* a_*^2 \boldsymbol{\lambda}\,. \tag{55}$$

Quanto al secondo membro, la ricerca della discontinuità di $\mathrm{grad}_{P_*} \chi$ si riduce a quella delle discontinuità di $\sum_1^3{}_s \dfrac{\partial G_{rs}}{\partial y_s}$ $(r=1, 2, 3)$ con le G_{rs} date dalle (35). Tenendo conto della (35′) e delle (35″), è facile constatare che la discontinuità di $\partial G_{rs}/\partial y_s$ non differisce da ciò che diviene la G_{rs} medesima quando si sostituiscano a tutte le ε_j, le ζ_j, e alle u_{hk}, i prodotti $\lambda_h \nu_k$. Si ha infatti separatamente [cfr. (53) e (53″)]

$$\Delta \frac{\partial}{\partial y_s}(p^{(1)} + p^{(\tau)} f^{(1)}) = \left\{ \sum_1^6{}_j p_j^{(\tau)} \zeta_j + p^{(\tau)} \sum_1^3{}_k \zeta_k \right\} \nu_s ,$$

$$\Delta \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_s} = \left\{ \sum_1^6{}_t M_{jt} \zeta_t - [p^{(\tau)} a^{(\tau)} \delta_j + p_j^{(\tau)}] \sum_1^3{}_k \zeta_k \right\} \nu_s ,$$

$$\Delta \frac{\partial}{\partial y_s}(2p^{(\tau)} \varepsilon_{rs}) = 2p^{(\tau)} \zeta_{rs} \nu_s$$

ed infine

$$\Delta \sum_1^3{}_t \frac{\partial}{\partial y_s} u_{rt} X_{ts}^{(\tau)} = \left(\sum_1^3{}_t X_{ts}^{(\tau)} \lambda_r \nu_t \right) \nu_s .$$

Ciò permette di concludere che, se si indica con $Q_a(\lambda, \nu | P_*)$ la forma quadratica nelle $\lambda_h \nu_k$ $(h, k=1, 2, 3)$ che si ottiene dalla (29) quando si sostituiscano tutte le v_{hk} con le $\lambda_h \nu_k$, valgono tutte le uguaglianze

$$\Delta \frac{\partial G_{rs}}{\partial y_s} = -\nu_s \frac{\partial Q_a(\lambda, \nu | P_*)}{\partial(\lambda_r \nu_s)}$$

e quindi anche

$$\sum_1^3{}_s \Delta \frac{\partial G_{rs}}{\partial y_s} = -\sum_1^3{}_s \nu_s \frac{\partial Q_a}{\partial(\lambda_r \nu_s)} = -\frac{\partial}{\partial \lambda_r} Q_a(\lambda, \nu | P_*) .$$

Con ciò, nonostante il vincolo di incomprimibilità, le condizioni di compatibilità dinamica si scrivono ancora

$$k_* a_*^2 \boldsymbol{\lambda} = \mathrm{grad}_\lambda \, Q_a(\lambda, \nu | P_*) . \tag{56}$$

Si può allora, ad esempio, riprendere punto per punto senza modifiche la classica dimostrazione di HADAMARD sull'esistenza di un ellissoide reale di polarizzazione in ogni punto di σ_*, nella forma rigorosa datale da C. CATTANEO [25]. Con la conclusione che, *nonostante l'intervento della condizione di incomprimibilità, la condizione che* C_* *sia configurazione di equilibrio stabile* [cfr. $(31)_2$] *è ancora sufficiente perchè in ogni istante, in ogni punto di* σ_*, *sia reale l'ellissoide di polarizzazione*, che dà con i suoi assi le direzioni dei possibili vettori $\boldsymbol{\lambda}$, e con l'inverso dei suoi semiassi i valori di a_*.

---

[25] C. CATTANEO, loc. cit. in [22].