Rivista Mat. Univ. Parma 5, 209-215 (1954)

ANTONIO MAMBRIANI (*)

Su i prodotti delle derivazioni definite, d'ordine qualsiasi.

Questa Nota fa seguito a un altro mio lavoro su la derivazione d'ordine qualsiasi ([1]), che verrà qui richiamato con (D.q.1). In (D.q.1) sono introdotti in modo naturale e semplice i due concetti fondamentali di *derivata definita di ordine qualsiasi* (o, se si vuole, *derivata di Riemann e Liouville*) e di *derivata indefinita di ordine qualsiasi*. Questi concetti sono fra loro collegati dalla nozione di *derivata* (*indefinita*) *di ordine qualsiasi dello zero*, come esprime la formula (13) di (D.q.1.). Tale formula ci mostra che « solo quando l'ordine di derivazione è intero positivo i due concetti di derivata definita e indefinita vengono a coincidere ». Nella presente Nota mi occupo della risoluzione del seguente

Problema. *Determinare come si esprime il prodotto di due derivazioni definite, con una stessa origine e di ordini μ e ν qualsiasi, mediante la derivazione definita con quella origine e d'ordine la somma $\mu+\nu$.*

La risoluzione di questo problema è ben conosciuta nel caso in cui tanto μ che ν abbiano parti reali negative, ma lo è solo vagamente negli altri casi, per quanto mi consta. Il prodotto di due derivazioni definite degli ordini μ e ν non è in ogni caso eguale soltanto ad una derivazione definita d'ordine la somma $\mu+\nu$, come mostra subito la seconda delle formule (5) di (D.q.1). La risoluzione completa di questo problema e dell'altro analogo relativo alla derivazione indefinita è assai utile per le applicazioni della derivata d'ordine qualsiasi alla teoria delle equazioni differenziali.

In questo lavoro ho abbandonato il simbolo $\mathcal{R}(\nu)$ usato in (D.q.1) per indicare la parte reale di ν e vi ho sostituito sistematicamente il simbolo $|\nu|_0$,

---

(*) Professore o. della Università di Parma. Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

([1]) A. MAMBRIANI, *Su la derivata d'ordine qualsiasi*, Atti del 4° Congr. Un. Mat. Ital. (Taormina, 25-31 ottobre 1951) 2, 142-150 (1953).

assai comodo e caso particolare di un simbolo generale (²). La formula qui stabilita, che risponde al problema, è la seguente:

$$\text{(I)} \qquad \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu}} f(x) - \sum_{1}^{n}{}_{k} \left[\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-k}} f(x)\right]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{-\mu-k}}{(-\mu-k)!}$$

$$(|\nu|_0 < n, \quad n \text{ numero naturale}),$$

dove nel primo membro la prima derivazione da eseguire è quella di ordine ν. Qualora ν sia un numero naturale può farsi anche $n = \nu$.

Da (I) segue

$$\text{(II)} \qquad \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu}} f(x)$$

quando:

Caso 1°. Si ha μ qualsiasi e $|\nu|_0 < 0$.
Caso 2°. Si ha $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ e ν qualsiasi.

Per $\mu = -\nu$ e $|\nu|_0 \geqslant 0$, con $\nu \neq 0$, da (I) risulta:

$$\text{(III)} \qquad f(x) = \sum_{1}^{n}{}_{k} \left[\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-k}} f(x)\right]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} + \underset{x_0}{\mathrm{D}^{-\nu}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) \qquad (|\nu|_0 < n),$$

formula generalizzante la nota formula di TAYLOR [cfr. la formula (6) di (D.q.1)].

1. – Prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine e negative.

Consideriamo il prodotto

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} \qquad \text{con} \qquad |\mu|_0 < 0, \ |\nu|_0 < 0 .$$

Supponendo ora, per semplicità, che $f(x)$ sia continua nel suo campo di definizione, abbiamo [(D.q.1), formula (8)]

$$\text{(1)} \qquad \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\mu-1}}{(-\mu-1)!}\,\mathrm{d}\tau \int_{x_0}^{\tau} \frac{(\tau-t)^{-\nu-1}}{(-\nu-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t .$$

(²) A. MAMBRIANI, *Sul concetto di « modulo parziale »*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 227-232 (1953).

Cambiando nel secondo membro l'ordine delle due integrazioni successive, s'ottiene (avendosi $x_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant x$)

(1′)
$$\underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} f(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \int_{t}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\mu-1}}{(-\mu-1)!} \frac{(\tau-t)^{-\nu-1}}{(-\nu-1)!}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Ma è [(D.q.1), formula (8)]

$$\int_{t}^{x} \frac{(x-\tau)^{-\mu-1}}{(-\mu-1)!} \frac{(\tau-t)^{-\nu-1}}{(-\nu-1)!}\,\mathrm{d}\tau = \underset{t}{\mathrm{D}}^{\mu} \frac{(x-t)^{-\nu-1}}{(-\nu-1)!}\,,$$

e inoltre [(D.q.1), formula (10′)], avendosi $|\nu|_0 < 0$ e quindi $|-\nu-1|_0 > -1$,

$$\underset{t}{\mathrm{D}}^{\mu} \frac{(x-t)^{-\nu-1}}{(-\nu-1)!} = \frac{(x-t)^{-\mu-\nu-1}}{(-\mu-\nu-1)!}\,.$$

La (1′) diventa allora

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} f(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{-\mu-\nu-1}}{(-\mu-\nu-1)!} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

ossia [(D.q.1), formula (8)]

(1″)
$$\underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu+\nu} f(x) \qquad (|\mu|_0 < 0, \quad |\nu|_0 < 0).$$

Dunque:

Il prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine e negative, è uguale ad una sola derivazione definita, con quella origine e negativa, di ordine uguale alla somma degli ordini delle derivazioni fattori.

Analogamente è

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu+\nu} f(x) \qquad (|\mu|_0 < 0, \quad |\nu|_0 < 0),$$

onde, confrontando con (1″),

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\nu} \underset{x_0}{\mathrm{D}}^{\mu} f(x) \qquad (|\mu|_0 < 0, \quad |\nu|_0 < 0),$$

cioè: *Il prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine e negative, gode della proprietà commutativa.*

2. – Prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine, la prima negativa e la seconda positiva o nulla.

Riprendiamo la formula (9) di (D.q.1), ossia (mutandovi ν in μ ed n in m, per opportunità delle considerazioni seguenti)

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} f(x) = \mathrm{D}^m \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu-m}} f(x) \qquad (|\mu|_0 < m,\ m \text{ numero naturale}), \tag{3}$$

oppure, scambiando i due membri,

$$\mathrm{D}^m \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu-m}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} f(x) \qquad (|\mu|_0 < m,\ m \text{ numero naturale}). \tag{3'}$$

La (3′) esprime già una parziale affermazione nel senso da stabilire ora. Applicando (3) e (3′) si può giungere alla affermazione più generale per un prodotto

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} \quad \text{con} \quad |\mu|_0 \geqslant 0,\ |\nu|_0 < 0\,.$$

Invero, supposto $f(x)$ tale che $\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x)$ abbia senso, applicando (3) si ottiene

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \mathrm{D}^m \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu-m}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) \qquad (|\mu|_0 < m,\ m \text{ numero naturale}). \tag{4}$$

Essendo $|\mu - m|_0 < 0$, $|\nu|_0 < 0$, per il precedente n. **1** risulta

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu-m}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu-m}} f(x)\,,$$

onde (4) diventa

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \mathrm{D}^m \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu-m}} f(x) \qquad (|\mu|_0 < 0,\ |\nu|_0 < 0,\ m \text{ numero naturale}). \tag{4'}$$

Poichè qui si ha $|\mu+\nu|_0 < m$, applicando (3′) segue infine

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu}} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu}} f(x) \qquad (|\mu|_0 \geqslant 0,\ |\nu|_0 < 0)\,. \tag{4''}$$

Dunque:

Il prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine, la prima negativa *e la seconda positiva o nulla, è uguale ad una sola derivazione definita con quella origine e di ordine uguale alla somma degli ordini delle derivazioni fattori.*

Questa conclusione associata a quella del n. **1** ci dà intanto l'affermazione (II), caso 1°, considerata nella Introduzione.

3. – Prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine, la prima d'ordine un numero naturale e la seconda d'ordine qualsiasi.

Consideriamo il prodotto

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\,\mathrm{D}^n \qquad \text{con } \mu \text{ qualsiasi e } n = 1, 2, 3, \dots .$$

Supposto $f(x)$ tale che $\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\,\mathrm{D}^n f(x)$ abbia senso, osserviamo che per la conclusione (II), caso 1°, provata nei precedenti nn. **1**, **2**, si ha

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu} = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{-n}},$$

onde

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\,\mathrm{D}^n f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}}\,\underset{x_0}{\mathrm{D}^{-n}}\,\mathrm{D}^n f(x) .$$

Ma è [(D.q.1), formula (5)]

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{-n}}\,\mathrm{D}^n f(x) = f(x) - \sum_{0}^{n-1}{}_k [\mathrm{D}^k f(x)]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^k}{k!},$$

onde

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\,\mathrm{D}^n f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}} f(x) - \sum_{0}^{n-1}{}_k [\mathrm{D}^k f(x)]_{x=x_0} \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}} \frac{(x-x_0)^k}{k!} .$$

Ed essendo [(D.q.1), formula (10')]

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}} \frac{(x-x_0)^k}{k!} = \frac{(x-x_0)^{k-n-\mu}}{(k-n-\mu)!},$$

si conclude

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\,\mathrm{D}^n f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}} f(x) - \sum_{0}^{n-1}{}_k [\mathrm{D}^k f(x)]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{k-n-\mu}}{(k-n-\mu)!} \tag{5}$$

(μ qualsiasi; $n = 1, 2, 3, \dots$).

Osservazione I. Se μ è pure un numero naturale ($\mu = 1, 2, 3, \ldots$), si si ha da (5) proprio

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \mathrm{D}^n f(x) = \mathrm{D}^{\mu+n} f(x)\,,$$

avendosi in tale caso è $(k - n - \mu)\,! = \infty$ per $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Osservazione II. Risolvendo (5) rispetto al primo termine del secondo membro e ponendo $\mu + n = \nu$, onde $\mu = \nu - n$, si ha:

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}}\, \mathrm{D}^n f(x) + \sum_0^{n-1}{}_k [\mathrm{D}^k f(x)]_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^{k-\nu}}{(k - \nu)\,!} \tag{5'}$$

[ν qualsiasi purchè $\underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x)$ abbia senso; $n = 1, 2, 3, \ldots$].

Questa formula è da mettere a confronto con la (9) di (D.q.1), ossia con

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x) = \mathrm{D}^n \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x) \qquad (|\nu|_0 < n,\ n \text{ numero naturale}).$$

4. – Prodotto di due derivazioni definite, con la stessa origine, la prima positiva o nulla e la seconda qualsiasi.

Consideriamo il prodotto

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} \qquad \text{con } \mu \text{ qualsiasi e } |\nu|_0 \geqslant 0.$$

Supposto $f(x)$ tale che $\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x)$ abbia senso, risulta [(D.q.1), formula (9)]

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \mathrm{D}^n \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x) \qquad (|\nu|_0 < n,\ n \text{ numero naturale}).$$

Applicando (5) segue

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^\mu}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^\nu} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x) - \sum_0^{n-1}{}_k \left[\mathrm{D}^k \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x)\right]_{x=x_0} \frac{(x - x_0)^{k-n-\mu}}{(k - n - \mu)\,!}\,.$$

Ed essendo, per (II), caso 1°,

$$\underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+n}}\, \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\mu+\nu}} f(x)\,, \qquad \mathrm{D}^k \underset{x_0}{\mathrm{D}^{\nu-n}} f(x) = \underset{x_0}{\mathrm{D}^{k-n+\nu}} f(x)\,,$$

si conclude

$$\mathop{\mathrm{D}^\mu}_{x_0} \mathop{\mathrm{D}^\nu}_{x_0} f(x) = \mathop{\mathrm{D}^{\mu+\nu}}_{x_0} f(x) - \sum_0^{n-1}{}_k \left[\mathop{\mathrm{D}^{k-n+\nu}}_{x_0} f(x) \right]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{k-n-\mu}}{(k-n-\mu)!} \tag{6}$$

$$(\mu \text{ qualsiasi}; \quad |\nu|_0 < n; \qquad n = 1, 2, 3, \ldots),$$

dove nel secondo membro la somma si può anche scrivere

$$\sum_1^{n}{}_k \left[\mathop{\mathrm{D}^{\nu-k}}_{x_0} f(x) \right]_{x=x_0} \frac{(x-x_0)^{-\mu-k}}{(-\mu-k)!} .$$

La (6) è cioè esattamente la formula (I) della Introduzione.

Osservazione I. Per $\nu = n$ la (6) è pure vera, in quanto la (6) per $\nu = n$ diventa la (5).

Osservazione II. Se è $\mu = 0, 1, 2, \ldots$, avendosi

$$(k - n - \mu)! = \infty \qquad \text{per} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1,$$

risulta semplicemente

$$\mathop{\mathrm{D}^\mu}_{x_0} \mathop{\mathrm{D}^\nu}_{x_0} f(x) = \mathop{\mathrm{D}^{\mu+\nu}}_{x_0} f(x) ,$$

come si è affermato nella Introduzione [formula (II), caso 2°].