Rivista Mat. Univ. Parma 5, 183-196 (1954)

MARIALUISA DE SOCIO (*)

Sulla propagazione nelle guide con dielettrico eterogeneo. (**)

1. – Nel presente lavoro studieremo il problema generale della propagazione delle onde elettromagnetiche nelle guide d'onda a pareti perfettamente conduttrici, riempite con dielettrico eterogeneo, ma identico su ogni retta parallela all'asse del tubo, supponendo l'eterogeneità molto piccola, onde poter applicare il metodo delle perturbazioni. Con tali ipotesi ogni modo di propagazione sarà prossimo a un modo TE o TM che si ha nella guida con dielettrico omogeneo. Se questo modo è semplice, cioè non esistono altri modi che si propagano con la stessa velocità, ci sarà facile trovare la correzione di velocità dovuta alla eterogeneità. Vedremo poi in questo caso che, il modo, se TM nella guida con dielettrico omogeneo, rimane tale, in prima approssimazione, anche se il dielettrico è eterogeneo, purchè in ogni sezione le linee di livello delle componenti longitudinali del campo elettrico siano parallele alle linee di livello della costante dielettrica ε; analoga proprietà vale per un modo TE.

Studieremo poi il caso multiplo, ossia un modo prossimo a due modi TM (o TE), dotati di uguale velocità in un mezzo omogeneo; per effetto dell'eterogeneità i due modi si propagano con velocità diversa determinata da un'equazione secolare di 2° grado, e tratteremo il caso particolare dei modi dissimmetrici nelle guide a sezione circolare.

Considereremo anche un modo TE e uno TM, propagantisi con ugual velocità se il dielettrico è omogeneo; l'eterogeneità li rende, in generale, ibridi, come avviene nel caso particolare delle guide a sezione rettangolare, segnalato da I. GIOVANARDI (1) e che viene qui ritrovato.

Da ultimo verrà trattato il caso del modo TE simmetrico e dei due modi

---

(*) Indirizzo: Via Don Minzoni 9, Bologna, Italia.

(**) Ricevuto il 21-V-1954.

(1) I. GIOVANARDI, *Sulla propagazione delle onde elettromagnetiche in una guida riempita da un dielettrico eterogeneo*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. 7, 1, 81-87 (1950-51; 1951-52).

TM dissimmetrici che in una guida a sezione circolare, riempita con dielettrico omogeneo, si propagano con eguale velocità; abbiamo provato che essi si spezzano in tre modi ibridi con diversa velocità.

2. – Consideriamo una guida d'onda a sezione qualunque, ma a connessione semplice, con pareti perfettamente conduttrici, riempita con dielettrico di costante dielettrica variabile (identica però su ogni retta parallela alla direzione di propagazione) e permeabilità magnetica μ costante. Più precisamente supponiamo $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$, con ε_0 costante ed ε_1 variabile, ε_1 però così piccola rispetto ad ε_0 da poterla considerare come infinitesima.

Fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale $Oxyz$ con l'asse z coincidente con l'asse della guida, supposto al solito che il campo elettrico e quello magnetico dipendano dal tempo t e dall'ordinata z secondo il fattore $e^{j\omega t - j\beta z}$ con $\beta = \omega/v$, ω e v rispettivamente pulsazione e velocità di propagazione di fase dell'onda, possiamo, come è noto (²), ricavare dalle componenti delle equazioni di MAXWELL lungo gli assi x ed y le quantità: E_x, E_y, H_x, H_y in funzione di E_z ed H_z. Si ha:

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
k^2 E_x &= -j\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu j\omega \frac{\partial H_z}{\partial y} \\
k^2 E_y &= -j\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \mu j\omega \frac{\partial H_z}{\partial x} \\
k^2 H_x &= \varepsilon j\omega \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \\
k^2 H_y &= -\varepsilon j\omega \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} ,
\end{aligned}
\right.
$$

con $k^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - \beta^2$, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1$.

Se il mezzo nella guida fosse omogeneo, cioè $\varepsilon = \varepsilon_0$, si avrebbe $k^2 = k_0^2 > 0$; poichè abbiamo supposto il dielettrico debolmente eterogeneo, cioè ε_1 molto piccolo assieme alle sue derivate, è allora $k^2 = k_0^2 + k_1^2$, con k_1^2 molto piccolo rispetto a k_0^2. Si ha così anche $k^2 > 0$ ed è lecito dividere le (1) per k^2 e sostituire poi nelle componenti delle equazioni di MAXWELL lungo l'asse z. Si ha allora, in una sezione generica normale all'asse,

$$
(2) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta E_z - \frac{\beta^2}{k^2 \varepsilon} \operatorname{grad} E_z \times \operatorname{grad} \varepsilon - \frac{\beta\mu\omega}{k^2 \varepsilon} \operatorname{grad} \varepsilon \wedge \operatorname{grad} H_z \times \boldsymbol{k} + k^2 E_z = 0 \\
&\Delta H_z + \frac{\beta\omega}{k^2} \operatorname{grad} \varepsilon \wedge \operatorname{grad} E_z \times \boldsymbol{k} - \frac{\mu\omega^2}{k^2} \operatorname{grad} \varepsilon \times \operatorname{grad} H_z + k^2 H_z = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

(²) D. GRAFFI, *Le guide d'onde*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **21**, 14-27 (1950).

Le condizioni al contorno sono:

$$\left\{ E_z = 0 , \qquad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 . \right. \tag{3}$$

Come è noto nelle (2) il laplaciano ed il gradiente vanno eseguiti considerando E_z ed H_z solo funzioni di x ed y, nella (3), $\frac{\partial H_z}{\partial n}$ è la derivata di H_z fatta in direzione normale al contorno della sezione.

Conforme alle nostre ipotesi, le soluzioni di (2) saranno molto prossime a modi di componenti longitudinali E_{z0}, H_{z0}, propagantisi nella guida riempita da dielettrico omogeneo con costante dielettrica ε_0. Posto, allora, $E_z=E_{z0}+E_{z1}$, $H_z=H_{z0}+H_{z1}$, $\beta^2=\beta_0^2+\beta_1^2$, $k^2=k_0^2+k_1^2$ con $k_1^2=\varepsilon_1\mu\omega^2-\beta_1^2$, notando che E_{z0} ed H_{z0} soddisfano alle equazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} &\Delta E_{z0} + k_0^2 E_{z0} = 0 , \\ &\Delta H_{z0} + k_0^2 H_{z0} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{4}$$

la (2) in prima approssimazione diviene, perchè $E_{z1}, H_{z1}, \varepsilon_1$ con le loro derivate e β_1^2, K_1^2 si suppongono così piccole da poter trascurare i loro quadrati e prodotti,

$$\left| \begin{aligned} &\Delta E_{z1} - \frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0} \operatorname{grad} E_{z0} \times \operatorname{grad} \varepsilon_1 - \frac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0} \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad} H_{z0} \times \boldsymbol{k} + k_0^2 E_{z1} + \\ &\qquad\qquad + \varepsilon_1\mu\omega^2 E_{z0} - \beta_1^2 E_{z0} = 0 \\ &\Delta H_{z1} + \frac{\beta_0\omega}{k_0^2} \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad} E_{z0} \times \boldsymbol{k} - \frac{\mu\omega^2}{k_0^2} \operatorname{grad} \varepsilon_1 \times \operatorname{grad} H_{z0} + k_0^2 H_{z1} + \\ &\qquad\qquad + \varepsilon_1\mu\omega^2 H_{z0} - \beta_1^2 H_{z0} = 0 . \end{aligned} \right. \tag{2'}$$

Consideriamo ora, per esempio, un modo TM nella guida con dielettrico omogeneo e sia E_{z0} il valore della componente longitudinale del campo elettrico. Tale modo abbia inoltre velocità di fase diversa da tutti gli altri modi propagantisi nella guida. Le (2′) si riducono in questo caso, poichè $H_{z0} = 0$, a

$$\left| \begin{aligned} &\Delta E_{z1} - \frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0} \operatorname{grad} E_{z0} \times \operatorname{grad} \varepsilon_1 + k_0^2 E_{z1} + \varepsilon_1\mu\omega^2 E_{z0} - \beta_1^2 E_{z0} = 0 \\ &\Delta H_{z1} + \frac{\beta_0\omega}{k_0^2} \operatorname{grad} \varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad} E_{z0} \times \boldsymbol{k} + k_0^2 H_{z1} = 0 , \end{aligned} \right. \tag{2''}$$

con le stesse condizioni al contorno (3) valide per E_{z0}, E_{z1}, H_{z1}.

Per calcolare β_1^2 applichiamo i soliti metodi della teoria delle perturbazioni, cioè moltiplichiamo la prima equazione di (4) per E_{z1}, la prima di (2″) per E_{z0}, sottraiamo membro a membro ed integriamo su tutta la sezione σ. Dal primo lemma di GREEN e dall'annullarsi al contorno di E_{z0} ed E_{z1} si ha subito che gli integrali contenenti i laplaciani di E_{z0} ed E_{z1} sono nulli, sicchè dopo facili calcoli si ricava:

$$\beta_1^2 = \left\{ \mu\omega^2 \int_\sigma \varepsilon_1 E_{z0}^2 \, d\sigma - \frac{\beta_0^2}{k_0^2 \varepsilon_0} \int_\sigma E_{z0} \operatorname{grad} E_{z0} \times \operatorname{grad} \varepsilon_1 \, d\sigma \right\} \Big/ \int_\sigma E_{z0}^2 \, d\sigma \, .$$

Questa formula permette il calcolo di β_1^2, da cui è facile vedere l'influenza dell'eterogeneità sulla velocità di propagazione. Per semplificare tale formula osserviamo che, essendo $E_{z0} = 0$ al contorno di σ, si ha:

(5)
$$\int_\sigma E_{z0} \operatorname{grad} E_{z0} \times \operatorname{grad} \varepsilon_1 \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2} \int_\sigma \operatorname{div}(E_{z0}^2 \operatorname{grad} \varepsilon_1) \, d\sigma - \frac{1}{2} \int_\sigma E_{z0}^2 \Delta \varepsilon_1 \, d\sigma = - \frac{1}{2} \int_\sigma E_{z0}^2 \Delta \varepsilon_1 \, d\sigma .$$

Quindi:

$$\beta_1^2 = \left\{ \mu\omega^2 \int_\sigma \varepsilon_1 E_{z0}^2 \, d\sigma + \frac{\beta_0^2}{2 k_0^2 \varepsilon_0} \int_\sigma E_{z0}^2 \Delta \varepsilon_1 \, d\sigma \right\} \Big/ \int_\sigma E_{z0}^2 \, d\sigma \, .$$

Nel caso che ε_1 sia armonica, ossia $\Delta \varepsilon_1 = 0$, questa formula si semplifica ulteriormente ed è analoga a quella trovata da CAPRIOLI ([3]) per le onde prossime a modi TEM in un cavo.

Noto β_1^2, si può calcolare, con i metodi della teoria delle perturbazioni E_{z1} ed H_{z1}. Non insisteremo su tali calcoli, osserveremo piuttosto che se grad ε_1 è parallelo a grad E_{z0}, cioè se le linee ove E_{z0} è costante coincidono con quelle in cui è costante ε_1, la seconda di (2″) si riduce alla seconda equazione di (4) con H_{z1} in luogo di H_{z0}. Ma k_0^2 non è autovalore di questa equazione, onde si ha $H_{z1} \equiv 0$, cioè l'eterogeneità lascia il modo ancora TM. In caso contrario $H_{z1} \neq 0$ ma molto piccolo; diremo che il modo è *lievemente ibrido*.

3. – Supponiamo che nella guida con dielettrico omogeneo si propaghino colla stessa velocità ω/β_0 due modi TM (si ottengono analoghi risultati considerando due modi TE). La velocità di tutti gli altri modi TE e TM che possono propagarsi nella guida sia diversa da quella dei due modi considerati. Dette E'_{z0}, E''_{z0} le componenti del campo elettrico di questi due modi lungo l'asse z, converrà porre:

$$E'_{z0} = C_1 \varphi_1(x, y) \, , \qquad E''_{z0} = C_2 \varphi_2(x, y) \, ,$$

([3]) L. CAPRIOLI, *Sul comportamento dei modi* TEM *nei cavi coassiali in presenza di lieve eterogeneità del dielettrico*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **22**, 354-365 (1953).

dove C_1 e C_2 sono due costanti, φ_1 e φ_2 due funzioni che possiamo sempre supporre reali, ortogonali fra loro e normalizzate, cioè tali che l'integrale su σ di φ_1^2 e φ_2^2 sia uno, quello di $\varphi_1\varphi_2$ sia zero.

Per quanto si è detto, l'autovalore delle equazioni di propagazione del campo elettrico nella guida con dielettrico omogeneo è multiplo, sicchè l'espressione più generale delle componenti lungo l'asse z del campo che si propaga con velocità ω/β_0 è:

$$E_{z0} = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2\,, \qquad H_{z0} = 0\,,$$

con C_1 e C_2 non entrambe nulle.

Per la lieve eterogeneità del dielettrico avremo $E_z = E_{z0} + \varphi'$, $H_z = \psi'$, $k^2 = k_0^2 + k_1^2$, $\beta^2 = \beta_0^2 + \beta_1^2$, con φ', ψ', β_1^2, k_1^2, $\operatorname{grad}\varphi'$, $\operatorname{grad}\psi'$ da considerarsi piccoli come il termine correttivo ε_1 di ε_0, sì da poter trascurare i loro quadrati e prodotti.

Il sistema (2') diviene, nel nostro caso,

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta\varphi' - \dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}(C_1\operatorname{grad}\varphi_1 + C_2\operatorname{grad}\varphi_2)\times\operatorname{grad}\varepsilon_1 + k_0^2\varphi' + \\ \qquad\qquad + (\varepsilon_1\mu\omega^2 - \beta_1^2)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = 0 \\[2ex] \Delta\psi' + \dfrac{\beta_0\omega}{k_0^2}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge (C_1\operatorname{grad}\varphi_1 + C_2\operatorname{grad}\varphi_2)\times\boldsymbol{k} + k_0^2\psi' = 0\,, \end{cases}$$

mentre le condizioni al contorno sono ancora le (3), la prima valida per φ_1, φ_2, φ', la seconda per ψ'.

Si ha inoltre che φ_1 e φ_2 soddisfano alle equazioni:

$$(7)\qquad \Delta\varphi_1 + k_0^2\varphi_1 = 0\,, \qquad \Delta\varphi_2 + k_0^2\varphi_2 = 0\,.$$

Come nel n. precedente, moltiplichiamo la prima equazione di (7) per φ_1', la prima di (6) per φ_1, sottraiamo membro a membro, integriamo su σ e applichiamo il primo lemma di Green in modo da annullare i termini contenenti i laplaciani di φ' e φ_1. Ripetiamo poi le stesse operazioni sostituendo φ_2 a φ_1 ed alla prima equazione di (6) la seconda equazione di (6). Otteniamo così il sistema:

$$(8)\qquad \begin{cases} C_1\left\{\dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_1\operatorname{grad}\varphi_1\times\operatorname{grad}\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1^2\,d\sigma + \beta_1^2\right\} + \\ \qquad + C_2\left\{\dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_1\operatorname{grad}\varphi_2\times\operatorname{grad}\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2\,d\sigma\right\} = 0 \\[2ex] C_1\left\{\dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_2\operatorname{grad}\varphi_1\times\operatorname{grad}\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2\,d\sigma\right\} + \\ \qquad + C_2\left\{\dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_2\operatorname{grad}\varphi_2\times\operatorname{grad}\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_2^2\,d\sigma + \beta_1^2\right\} = 0\,. \end{cases}$$

Tale sistema è omogeneo nelle costanti C_1 e C_2; affinchè abbia soluzioni non tutte nulle dovrà essere uguale a zero il determinante dei coefficienti. Notiamo che si ha, ricordando che φ_1 è nulla al contorno,

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad \int_\sigma \varphi_1 \operatorname{grad}\varphi_2 \times \operatorname{grad}\varepsilon_1 \, d\sigma &= \int_\sigma \varphi_1 \operatorname{div}(\varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_2)\, d\sigma - \int_\sigma \varphi_1 \varepsilon_1 \Delta\varphi_2 \, d\sigma = \\
&= \int_\sigma \operatorname{div}(\varphi_1\varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_2)\, d\sigma - \int_\sigma \varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_1 \times \operatorname{grad}\varphi_2 \, d\sigma - \int_\sigma \varphi_1\varepsilon_1 \Delta\varphi_2 \, d\sigma = \\
&= k_0^2 \int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2 \, d\sigma - \int_\sigma \varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_1 \times \operatorname{grad}\varphi_2 \, d\sigma ,
\end{aligned}
$$

relazione ancora valida scambiando gli indici nelle φ. Tenendo presente la (5), dove in luogo di E_{z0} si ponga φ_0, l'uguaglianza a zero del predetto determinante diviene:

$$
(10) \qquad \begin{vmatrix}
-\dfrac{\beta_0^2}{2k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_1^2 \Delta\varepsilon_1 \, d\sigma - \mu\omega^2 \int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1^2 \, d\sigma + \beta_1^2 & -\dfrac{k_0^2}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2 \, d\sigma - \dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_1 \times \operatorname{grad}\varphi_2 \, d\sigma \\
-\dfrac{k_0^2}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2 \, d\sigma - \dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varepsilon_1 \operatorname{grad}\varphi_1 \times \operatorname{grad}\varphi_2 \, d\sigma & -\dfrac{\beta_0^2}{2k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi_2^2 \Delta\varepsilon_1 \, d\sigma - \mu\omega^2 \int_\sigma \varepsilon_1\varphi_2^2 \, d\sigma + \beta_1^2
\end{vmatrix} = 0 .
$$

Quindi β_1^2 soddisfa ad un'equazione secolare di 2° grado. Esistono perciò, in generale, due valori reali e distinti di β_1^2, cioè per effetto della eterogeneità si hanno nella guida due modi che si propagano con diversa velocità. Dalla seconda equazione di (6) si può poi ricavare ψ', che sarà in generale diverso da zero.

4. – Come caso particolare consideriamo, in una guida a sezione circolare di raggio a e costante dielettrica ε_0, due modi TM propagantisi con la stessa velocità e tali che le componenti longitudinali valgano, rispettivamente,

$$
\begin{aligned}
E'_{z0} &= C_1\lambda J_n(k_0\varrho)\cos n\vartheta = C_1\varphi_1 , \qquad & E''_{z0} &= C_2\lambda J_n(k_0\varrho) \operatorname{sen} n\vartheta = C_2\varphi_2 , \\
H'_{z0} &= 0 , & H''_{z0} &= 0 .
\end{aligned}
$$

Ovviamente φ_1 e φ_2 formano un sistema ortogonale, inoltre possiamo scegliere λ in modo che sia anche normale.

Supponiamo ora che la costante dielettrica risulti variabile ed esprimibile con la seguente formula:

$$
\varepsilon = \varepsilon_0 + A_m(\varrho)\cos m\vartheta + B_m(\varrho) \operatorname{sen} m\vartheta ,
$$

con A_m e B_m funzioni di ϱ tali che, escluso al più il caso $m=0$, per $\varrho=0$ sia $A_m(0)=B_m(0)=0$.

Sostituendo tali valori in (10), si nota che tutti gli integrali che ivi compaiono risultano nulli quando m assume un valore diverso da $2n$, ciò perchè ognuno di questi integrali è il prodotto o la somma di prodotti di un integrale di una funzione di ϱ per un integrale, da zero a 2π, di una funzione trigonometrica di $2n\vartheta$ moltiplicata per una funzione, pure trigonometrica, di $m\vartheta$, con $m\neq 2n$. Perciò, se, come avviene in generale, ε ha la forma

$$\varepsilon=\varepsilon_0+\sum_{0}^{\infty}{}_m\{A_m(\varrho)\cos m\vartheta+B_m(\varrho)\operatorname{sen} m\vartheta\},$$

per il calcolo di β_1^2 basta limitarsi a considerare il termine per cui $m=2n$ e, poichè possiamo sempre scegliere l'asse polare in modo che sia $B_{2n}(\varrho)=0$, consideriamo

$$\varepsilon=\varepsilon_0+A_{2n}(\varrho)\cos 2n\vartheta=\varepsilon_0+\varepsilon_1\,. \tag{11}$$

Si ha allora ([4]):

$$\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^a A_{2n}(\varrho)J_n^2(k_0\varrho)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\operatorname{sen} n\vartheta\cdot\cos n\vartheta\cdot\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=0\,,$$

$$\int_\sigma \varepsilon_1\operatorname{grad}\varphi_1\times\operatorname{grad}\varphi_2\,\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\int_\sigma A_{2n}(\varrho)\cos 2n\vartheta\left\{\frac{\mathrm{d}J_n(k_0\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\cos n\vartheta\cdot\operatorname{grad}\varrho-nJ_n(k_0\varrho)\operatorname{sen} n\vartheta\cdot\operatorname{grad}\vartheta\right\}\times$$

$$\times\left\{\frac{\mathrm{d}J_n(k_0\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\operatorname{sen} n\vartheta\cdot\operatorname{grad}\varrho+nJ_n(k_0\varrho)\cos n\vartheta\cdot\operatorname{grad}\vartheta\right\}\mathrm{d}\sigma=$$

$$=\int_0^a A_{2n}(\varrho)\left\{\left(\frac{\mathrm{d}J_n(k_0\varrho)}{\mathrm{d}\varrho}\right)^2-\frac{n^2}{\varrho^2}J_n^2(k_0\varrho)\right\}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\cos 2n\vartheta\cdot\operatorname{sen} n\vartheta\cdot\cos n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=0,$$

$$\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^a A_{2n}(\varrho)J_n^2(k_0\varrho)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\cos^2 n\vartheta\cdot\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\frac{\pi}{2}\int_0^a A_{2n}(\varrho)J_n^2(k_0\varrho)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,,$$

$$\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_2^2\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^a A_{2n}(\varrho)J_n^2(k_0\varrho)\varrho\,\mathrm{d}\varrho\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 n\vartheta\cdot\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=-\frac{\pi}{2}\int_0^a A_{2n}(\varrho)J_n^2(k_0\varrho)\varrho\,\mathrm{d}\varrho.$$

([4]) Ricordando che è $\operatorname{grad}\varrho\times\operatorname{grad}\varrho=1$, $\operatorname{grad}\vartheta\times\operatorname{grad}\vartheta=1/\varrho^2$, $\int_0^{2\pi}\cos^2 n\vartheta\cdot\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=(1/2)\int_0^{2\pi}(1+\cos 2n\vartheta)\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=\pi/2$, $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2 n\vartheta\cdot\cos 2n\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta=-\pi/2$.

Infine, posto per brevità

$$F(\varrho) = \frac{1}{\varrho} A'_{2n}(\varrho) + A''_{2n}(\varrho) - \frac{4n^2}{\varrho^2} A_{2n}(\varrho) ,$$

si ha:

$$\int_\sigma \varphi_1^2 \Delta\varepsilon_1 \, d\sigma = \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho)\varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} \cos^2 n\vartheta \cdot \cos 2n\vartheta \cdot d\vartheta = \frac{\pi}{2} \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho) \varrho \, d\varrho ,$$

$$\int_\sigma \varphi_2^2 \Delta\varepsilon_1 \, d\sigma = \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho)\varrho \, d\varrho \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 n\vartheta \cdot \cos 2n\vartheta \cdot d\vartheta = -\frac{\pi}{2} \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho) \varrho \, d\varrho .$$

Sostituendo in (10) si ha che, poichè i termini della diagonale secondaria del determinante a primo membro risultano nulli, la (10) si spezza allora nelle due equazioni

$$\beta_1^2 \mp \left\{ \frac{\pi\beta_0^2}{4k_0^2\varepsilon_0} \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho) \varrho \, d\varrho + \frac{\mu\omega^2\pi}{2} \int_0^a A_{2n}(\varrho) J_n^2(k_0\varrho) \varrho \, d\varrho \right\} = 0 , \tag{12}$$

con le soluzioni

$$\beta_1^2 = \pm \left\{ \frac{\pi\beta_0^2}{4k_0^2\varepsilon_0} \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) F(\varrho) \varrho \, d\varrho + \frac{\mu\omega^2\pi}{2} \int_0^a A_{2n}(\varrho) J_n^2(k_0\varrho) \varrho \, d\varrho \right\} .$$

Nel primo caso, dal sistema (8), risulta $C_1 \neq 0$, $C_2 = 0$, nel secondo risulta $C_2 \neq 0$, $C_1 = 0$. Si ha così [tenendo conto anche della seconda di (6)], per effetto della lieve eterogeneità, che i due modi TM nel mezzo omogeneo e propagantisi con la stessa velocità, ora diventano lievemente ibridi e si propagano con diversa velocità. Inoltre, mentre nel caso del mezzo omogeneo la posizione del sistema di coordinate polari ϱ, ϑ era arbitraria, ora si è scelta in modo che ε vari con la legge (11), sicchè i due modi, a differenza del caso omogeneo, *sono definiti senza alcuna arbitrarietà*, salvo la solita costante moltiplicativa.

Le equazioni (12) si semplificano ulteriormente se supponiamo che la costante dielettrica risulti armonica, ossia $\Delta\varepsilon_1 = 0$. Ciò avviene se, per esempio, è (b costante):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + b\varrho^{2n} \cos 2n\vartheta .$$

Si ha in tal caso:

$$\beta_1^2 = \mp b \frac{\mu\omega^2\pi}{2} \int_0^a J_n^2(k_0\varrho) \varrho^{2n+1} d\varrho ,$$

ossia, ovviamente, ancora due modi in generale lievemente ibridi, di diversa velocità.

5. – Studiamo ora il caso in cui, in una guida generica a pareti perfettamente conduttrici e riempita da dielettrico omogeneo, si propaghino un modo TM ed uno TE corrispondenti ad uno stesso autovalore k_0^2 e quindi con la stessa velocità.

Siano, al solito,

$$E_{z0} = C\varphi(x, y) , \qquad H_{z0} = D\psi(x, y) ,$$

dove C e D sono costanti, mentre $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, che possiamo sempre supporre tali che $\int_\sigma \varphi^2(x, y)\, d\sigma = 1$, $\int_\sigma \psi^2(x, y)\, d\sigma = \varepsilon_0/\mu$, soddisfino alle equazioni

$$\Delta\varphi + k_0^2\varphi = 0 , \qquad \Delta\psi + k_0^2\psi = 0 . \tag{13}$$

Supponiamo ora il dielettrico lievemente eterogeneo. Allora i due modi considerati vengono trasformati nei modi di componenti longitudinali

$$E_z = C\varphi + \varphi_1 , \qquad H_z = D\psi + \psi_1 ,$$

dove φ_1 e ψ_1 sono molto piccole come il termine correttivo ε_1 di ε_0.

Evidentemente le equazioni di propagazione saranno, con le solite approssimazioni e posizioni,

$$\tag{14} \left\{ \begin{aligned} &\Delta\varphi_1 - C\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\varphi - \frac{D\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k} + k_0^2\varphi_1 + \\ &\qquad\qquad + C(\varepsilon_1\mu\omega^2 - \beta_1^2)\varphi = 0 \\ &\Delta\psi_1 + C\frac{\beta_0^2\omega}{k_0^2}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{k} - \frac{D\mu\omega^2}{k_0^2}\operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\psi + k_0^2\psi_1 + \\ &\qquad\qquad + D(\varepsilon_1\mu\omega^2 - \beta_1^2)\psi = 0 , \end{aligned} \right.$$

con le condizioni al contorno

$$\varphi = \varphi_1 = 0 , \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi_1}{\partial n} = 0 . \tag{15}$$

Con procedimento di calcolo già applicato nei paragrafi precedenti, cioè combinando al solito modo la prima equazione di (14) con la prima di (13) e la seconda equazione di (13) con la seconda di (14), si ottiene, sfruttando il lemma di GREEN e le (15), il sistema

$$\left\{\begin{aligned}
&C\left\{\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\varphi\, \mathrm{d}\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi^2 \mathrm{d}\sigma + \beta_1^2\right\} + \\
&\qquad + D\left\{\frac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma\right\} = 0\\
&C\left\{-\frac{\beta_0^2\omega}{k_0^2}\int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma\right\} + \\
&\qquad + D\left\{\frac{\mu\omega^2}{k_0^2}\int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\psi\, \mathrm{d}\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\psi^2 \mathrm{d}\sigma + \frac{\beta_1^2\varepsilon_0}{\mu}\right\} = 0 .
\end{aligned}\right.$$

Il sistema, omogeneo in C e D, ammette soluzioni non tutte nulle se è uguale a zero il determinante dei coefficienti:

$$(16)\qquad \begin{vmatrix}
\dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\varphi\, \mathrm{d}\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi^2 \mathrm{d}\sigma + \beta_1^2, & \dfrac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma\\
-\dfrac{\beta_0\omega}{k_0^2}\displaystyle\int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma, & \dfrac{\mu\omega^2}{k_0^2}\displaystyle\int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \times \operatorname{grad}\psi\, \mathrm{d}\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\psi^2 \mathrm{d}\sigma + \dfrac{\beta_1^2\varepsilon_0}{\mu}
\end{vmatrix} = 0$$

Tale condizione fornisce due valori per β_1^2 che sono certamente reali, infatti, notando che è, tenendo presente le (15),

$$(17)\qquad \begin{aligned}
\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma &= -\int_\sigma \varphi \operatorname{rot}(\psi \operatorname{grad}\varepsilon_1) \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma = \\
&= -\int_\sigma \varphi \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \boldsymbol{k})\, \mathrm{d}\sigma = -\int_\sigma \operatorname{div}(\varphi\psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \boldsymbol{k}) \mathrm{d}\sigma + \\
&+ \int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varphi \times \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma = -\int_\sigma \psi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\varphi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma ,
\end{aligned}$$

e ricordando la (9) in cui sia ora $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ oppure $\varphi_1 = \varphi_2 = \psi$, il determinante (16) si scrive, moltiplicata l'ultima riga per μ/ε_0,

$$\begin{vmatrix}
-\dfrac{k_0^2}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varepsilon_1\varphi^2 \mathrm{d}\sigma - \dfrac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varepsilon_1 |\operatorname{grad}\varphi|^2 \mathrm{d}\sigma + \beta_1^2, & \dfrac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma\\
\dfrac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\displaystyle\int_\sigma \varphi \operatorname{grad}\varepsilon_1 \wedge \operatorname{grad}\psi \times \boldsymbol{k}\, \mathrm{d}\sigma , & -\dfrac{\mu^2\omega^2}{\varepsilon_0 k_0^2}\displaystyle\int_\sigma \varepsilon_1 |\operatorname{grad}\psi|^2 \mathrm{d}\sigma + \beta_1^2
\end{vmatrix} = 0 .$$

Si hanno così *due modi di diversa velocità, in generale ibridi* (*e non lievemente ibridi*), *cioè tali che C e D sono dello stesso ordine di grandezza.*

Come riprova dei risultati ottenuti esaminiamo il caso già studiato dalla GIOVANARDI in cui si considera una guida a sezione rettangolare di lati a e b rispettivamente e con costante dielettrica funzione della sola x. Ora è noto che se il dielettrico fosse omogeneo, per E_{z0} ed H_{z0} si avrebbe:

$$
(18)\qquad \left\{
\begin{aligned}
E_{z0} &= C_1 \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = C\varphi\,,\\
H_{z0} &= D_1 2\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{ab\mu}} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = D\psi\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Le costanti moltiplicative $2/\sqrt{ab}$, $2\sqrt{\varepsilon_0/(ab\mu)}$ sono state conglobate in φ e ψ in modo che risulti $\int_\sigma \varphi^2 d\sigma = 1$, $\int_\sigma \psi^2 d\sigma = \varepsilon_0/\mu$. I due modi rappresentati da (18) sono rispettivamente TM e TE e, come è noto, si propagano con la stessa velocità.

Sostituendo in (16) le (18), posto

$$
p = \int_0^a \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\frac{d\varepsilon_1}{dx}\,dx, \quad q = \int_0^a \operatorname{sen}^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\varepsilon_1\,dx, \quad r = \int_0^a \cos^2\left(\frac{m\pi}{a}x\right)\cdot\varepsilon_1\,dx,
$$

$$
\beta_1^2 = \beta^2 - \beta_0^2\,,
$$

e dividendo l'ultima riga per ε_0/μ, il determinante (16) si riduce al determinante scritto dalla GIOVANARDI.

6. – Supponiamo infine che nella guida si propaghino, in condizioni di omogeneità del dielettrico, due modi TM ed uno TE corrispondenti tutti ad uno stesso autovalore k_0^2.

Un caso particolare in cui tale condizione è verificata è data da due modi TM ed uno TE, propagantisi in una guida circolare di raggio a (ove sia fissato ancora un sistema di riferimento cilindrico ϱ, ϑ, z, con l'asse z coincidente con l'asse della guida) e con componenti longitudinali rappresentati rispettivamente da

$$
E'_{z0} = C_1\varphi_1 = C_1\lambda J_1(k_0\varrho)\cos\vartheta\,, \qquad E''_{z0} = C_2\varphi_2 = C_2\lambda J_1(k_0\varrho)\operatorname{sen}\vartheta\,,
$$

$$
H_{z0} = D\psi = D\tau J_0(k_0\varrho)\,,
$$

dove la costante λ è stata scelta in modo che φ_1 e φ_2 oltre che ortogonali fra loro, risultino normalizzate e τ in modo che $\int_\sigma \psi^2 d\sigma = \varepsilon_0/\mu$.

Evidentemente i tre modi considerati corrispondono ad uno stesso autovalore k_0^2, inoltre φ_1, φ_2, ψ sono soluzioni dell'equazione $\Delta\varphi + k_0^2\varphi = 0$, mentre per le condizioni al contorno si ha, al solito, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $\partial\psi/\partial n = 0$.

Supposto ora il dielettrico lievemente eterogeneo, $\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(\varrho, \vartheta)$, notiamo che le componenti longitudinali del campo $E_{z0} = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ e $H_{z0} = D\psi$ risultano, rispettivamente, corrette dai termini $E_{z1} = \overline{\varphi}$, $H_{z1} = \overline{\psi}$ da considerarsi molto piccoli insieme ad $\varepsilon_1(\varrho, \vartheta)$, mentre β_0^2 varierà di β_1^2. Le equazioni di propagazione saranno allora:

$$\left\{\begin{aligned} &\Delta\overline{\varphi} - \frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \times (C_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 + C_2\,\mathrm{grad}\,\varphi_2) - \\ &\qquad - \frac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}(\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge D\,\mathrm{grad}\,\psi \times \boldsymbol{k}) + k_0^2\overline{\varphi} + (\varepsilon_1\mu\omega^2 - \beta_1^2)(C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2) = 0 \\ &\Delta\overline{\psi} + \frac{\beta_0\omega}{k_0^2}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge (C_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 + C_2\,\mathrm{grad}\,\varphi_2) \times \boldsymbol{k} - \\ &\qquad - \frac{\mu\omega^2}{k_0^2}\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge D\,\mathrm{grad}\,\psi + k_0^2\overline{\psi} + (\varepsilon_1\mu\omega^2 - \beta_1^2)D\psi = 0\,, \end{aligned}\right.$$

con le condizioni al contorno: $\varphi_1 = \varphi_2 = \overline{\varphi} = 0$, $\partial\psi/\partial n = \partial\overline{\psi}/\partial n = 0$.

Applicando il procedimento di calcolo già usato varie volte, otteniamo il sistema:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} &C_1\left\{\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 \times \mathrm{grad}\,\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1^2\,d\sigma + \beta_1^2\right\} + \\ &\qquad + C_2\left\{\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \times \mathrm{grad}\,\varphi_2\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2\,d\sigma\right\} + \\ &\qquad\qquad + D\left\{\frac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_1\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge \mathrm{grad}\,\psi \times \boldsymbol{k}\,d\sigma\right\} = 0 \\ &C_1\left\{\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_2\,\mathrm{grad}\,\varphi_1 \times \mathrm{grad}\,\varepsilon_1\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_1\varphi_2\,d\sigma\right\} + \\ &\qquad + C_2\left\{\frac{\beta_0^2}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \times \mathrm{grad}\,\varphi_2\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\varphi_2^2\,d\sigma + \beta_1^2\right\} + \\ &\qquad\qquad + D\left\{\frac{\beta_0\mu\omega}{k_0^2\varepsilon_0}\int_\sigma \varphi_2\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge \mathrm{grad}\,\psi \times \boldsymbol{k}\,d\sigma\right\} = 0 \\ &C_1\left\{-\frac{\beta_0\omega}{k_0^2}\int_\sigma \psi\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge \mathrm{grad}\,\varphi_1 \times \boldsymbol{k}\,d\sigma\right\} + C_2\left\{-\frac{\beta_0\omega}{k_0^2}\int_\sigma \psi\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \wedge \mathrm{grad}\,\varphi_2 \times \boldsymbol{k}\,d\sigma\right\} + \\ &\qquad + D\left\{\frac{\mu\omega^2}{k_0^2}\int_\sigma \psi\,\mathrm{grad}\,\varepsilon_1 \times \mathrm{grad}\,\psi\,d\sigma - \mu\omega^2\int_\sigma \varepsilon_1\psi^2\,d\sigma + \beta_1^2\int_\sigma \psi^2\,d\sigma\right\} = 0\,. \end{aligned}\right.$$

Tale sistema, omogeneo nelle C_1, C_2, D, non tutte nulle, dovrà avere uguale a zero il determinante dei coefficienti. Divisa l'ultima riga per ε_0/μ, ricordando la (9), la (17) e la (5), il determinante uguagliato a zero fornisce, come è facile vedere, un'equazione secolare di 3° grado in β_1^2, e quindi con soluzioni reali per β_1^2. In generale si avranno tre modi ibridi che si propagano con diversa velocità.

Esaminiamo il caso particolare, già accennato, supponendo che la costante dielettrica sia data da (b, c, d sono costanti)

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + b\varrho^2 \cos 2\vartheta + \varrho(c \cos\vartheta + d \operatorname{sen}\vartheta)\,. \tag{20}$$

La detta equazione secolare di 3° grado in β_1^2, essendo $\Delta\varepsilon_1 = 0$, si ottiene allora eguagliando a zero il determinante

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{\mu\omega^2\pi b\lambda^2}{2}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^3\,d\varrho + \beta_1^2\,, & 0 & -\dfrac{\beta_0\mu\omega\lambda\tau c\pi}{k_0\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^2\,d\varrho \\ 0 & \dfrac{\mu\omega^2 b\lambda^2\pi}{2}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^3\,d\varrho + \beta_1^2 & -\dfrac{\beta_0\mu\omega\lambda\tau d\pi}{k_0\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^2\,d\varrho \\ -\dfrac{\beta_0\mu\omega\lambda\tau c\pi}{k_0\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^2\,d\varrho & -\dfrac{\beta_0^2\mu\omega\,\lambda\tau d\pi}{k_0\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho\,d\varrho & \beta_1^2 \end{vmatrix}$$

e tale equazione fornisce appunto tre valori distinti di β_1^2.

Per studiare questo determinante esaminiamo dapprima il caso particolare $c = 0$. I valori di β_1^2 si riducono a $\beta_1^2 = (\mu\omega^2\pi b\lambda^2/2)\int_0^a J_1^2(k_0\varrho)\varrho^3\,d\varrho$ e ad altri due valori che si ricavano risolvendo l'equazione di 2° grado ottenuta uguagliando a zero il determinante del secondo ordine che si ha sopprimendo nel precedente determinante la prima riga e la prima colonna.

In corrispondenza al primo valore di β_1^2 si ha $C_1 \neq 0$, $C_2 = D = 0$, si ricade cioè in uno dei modi considerati al n. **4**. In corrispondenza agli altri due valori di β_1^2 si hanno invece due modi in cui $C_1 = 0$, ma C_2 e D sono in generale dello stesso ordine di grandezza; cioè *si hanno due modi totalmente ibridi che si propagano con velocità diversa fra loro e diversa da quella del modo* TM *già considerato*, e possono riguardarsi una combinazione del modo TE simmetrico e del secondo modo considerato al n. **3**.

Analoghe considerazioni, salvo lo scambio di C_2 con C_1, si hanno se $d = 0$.

Si comprende perciò che *se, nel caso generale, è* $c \neq 0$, $d \neq 0$, *si hanno tre modi ibridi che si propagano con diversa velocità.*

Si potrebbe trattare in modo analogo il caso della guida a sezione quadrata con dielettrico lievemente eterogeneo a connessione semplice.

Si troverebbe che i modi TE e TM, che nel dielettrico omogeneo si propagano con la stessa velocità, si spezzano in generale in quattro modi ibridi di diversa velocità. Non insisteremo però su questi risultati facilmente prevedibili in base alle considerazioni esposte in questo numero e nel precedente.