Rivista Mat. Univ. Parma 5, 125-136 (1954)

LUIGI TANZI CATTABIANCHI (*)

Perturbazione media-ereditaria e limiti delle successioni.

Introduzione. – In un recente lavoro, comparso su questa Rivista [4] (¹), abbiamo esteso alle successioni oscillanti alcuni noti teoremi di J. MERCER [3] (²) e T. VIJAYARAGHAVAN [5] relativi alle successioni convergenti.

In questa Nota riprendiamo l'argomento e ci limitiamo al caso classico delle successioni convergenti, per dimostrare alcune eleganti proposizioni che T. VIJAYARAGHAVAN [5] ha soltanto enunciate: prendiamo l'occasione per dar loro una forma più generale.

Accanto ad una successione $\{x_n\}$ di numeri reali e a quella delle sue medie aritmetiche $\{X_n\}$, $X_n = (x_0 + x_1 + ... + x_n)/(n+1)$, consideriamo la successione

$$v_n = x_n + \beta_n X_n \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

ottenuta dalla successione « pura » $\{x_n\}$ quando essa venga sottoposta alla « perturbazione » $\{\beta_n X_n\}$ che si può ritenere media-ereditaria, con il « coefficiente di intensità della perturbazione » $\beta_n > 0$ dipendente in generale da n.

Poniamo la questione: *Nell'ipotesi che la successione perturbata $\{v_n\}$ sia infinitesima per $n \to +\infty$, sotto quali condizioni sufficienti, da imporre al coefficiente β_n, si può garantire che tenda a zero anche la successione pura $\{x_n\}$?*

A questa interessante questione, che generalizza il classico teorema di MERCER [3] (corrispondente a β_n costante), rispondono tre teoremi, soltanto

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(¹) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia posta al termine del presente lavoro.

(²) Vedasi anche [2], p. 104.

enunciati da T. VIJAYARAGHAVAN [5], i quali, « grosso modo », possono provvisoriamente enunciarsi nella maniera seguente:

a) *Se il coefficiente β_n cresce abbastanza rapidamente, lo svanire della successione perturbata implica lo svanire della successione pura (e quindi anche lo svanire della perturbazione).*

b) *Se il coefficiente β_n cresce abbastanza regolarmente, anche se lentamente, lo svanire della successione perturbata implica lo svanire della successione pura (e quindi anche lo svanire della perturbazione).*

c) *Se $\varepsilon_n \to 0$, esistono successioni instabili le cui successioni perturbate, con il coefficiente $\beta_n > n\varepsilon_n$ scelto opportunamente, svaniscono al crescere indefinitamente di n.*

Nel presente lavoro dimostreremo quattro teoremi, di cui i primi tre comprendono come casi particolari a) e b), mentre il quarto è, con osservazioni complementari, il teorema accennato in c).

1. – Siano $\{x_n\}$ e $\{\beta_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ due successioni di numeri reali e sia $\beta_n > 0$. Poniamo

$$X_n = \frac{x_0 + x_1 + \dots + x_n}{n+1},$$

$$v_n = x_n + \beta_n X_n \qquad (\beta_n > 0),$$

$$B_n = \frac{\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_n}{n+1}.$$

Allora sussistono i quattro teoremi seguenti.

2. – Teorema I. *Se $\{X_n\}$ è definitivamente monotona, allora*

1°) *da $v_n \to 0$ (3) segue $B_n X_n \to 0$,*
2°) *da β_n / B_n limitato e $v_n \to 0$ segue $\beta_n X_n \to 0$ e $x_n \to 0$.*

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che, essendo $\beta_n > 0$, per un semplice teorema di T. VIJAYARAGHAVAN (4) risulta $X_n \to 0$.

Caso 1°. Essendo $\{X_n\}$ definitivamente monotona, possiamo supporre, senza alterare la generalità, che sia $X_n \to 0+$, $X_n \geqq 0$ e $\{X_n\}$ non crescente per $n \geqq \nu$ conveniente; sommando per $h = 0, 1, \dots, n$ l'espressione di v_n, otte-

(3) Nelle relazioni di limite è ovviamente sottinteso $n \to +\infty$.
(4) Cfr. [5], Theor. 1; oppure [4], n. 2, Teor. 1.

niamo

$$\sum_{h=0}^{n} v_h = \sum_{h=0}^{n} x_h + \sum_{h=0}^{n} \beta_h X_h = (n+1)X_n + \sum_{h=0}^{\nu} \beta_h X_h + \sum_{h=\nu+1}^{n} \beta_h X_h\,,$$

$$\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq (n+1)X_n + C + X_n \sum_{h=\nu+1}^{n} \beta_h \qquad (C \gtreqless 0,\ \text{indipendente da } n)\,,$$

$$\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq (n+1)(1+B_n)X_n - (\nu+1)B_\nu X_n + C\,,$$

e, dividendo per $n+1$,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{h=0}^{n} v_h \geqq (1+B_n)X_n - \frac{(\nu+1)B_\nu X_n - C}{n+1}\,.$$

Poichè il primo membro tende a zero per $n \to +\infty$ e lo stesso accade per l'ultimo termine del secondo membro, mentre $(1+B_n)X_n \geqq 0$, ne segue $(1+B_n)X_n \to 0$; giacchè $X_n \to 0$ è anche $B_n X_n \to 0$. È evidente che questa affermazione è significativa quando B_n non è limitato, poichè altrimenti essa rientra in quella più immediata e già nota $X_n \to 0$.

Caso 2°. Da $v_n \to 0$ segue, per il Caso 1°, $B_n X_n \to 0$, e poichè β_n/B_n si mantiene limitato risulta anche $\beta_n X_n \to 0$ e $x_n = v_n - \beta_n X_n \to 0$.

3. – Teorema II. *Se $\{X_n\}$ non è definitivamente monotona, si distinguano gli indici n nei due tipi r e s col seguente criterio:*

$$x_r X_r \geqq 0\,, \qquad x_s X_s < 0\,.$$

Allora esistono infiniti indici r e, denotando con $R = R(s)$ il massimo r che non supera un indice s,

1°) *da $\beta_r > \gamma r$ ($\gamma > 0$, indipendente da r) e $v_n \to 0$ segue $nX_n \to 0$, $x_n \to 0$;*

2°) *da $\dfrac{\beta_s}{s}\Big/\dfrac{\beta_{R(s)}}{R(s)}$ limitato e $v_n \to 0$ segue $\beta_n X_n \to 0$, $x_n \to 0$.*

Dimostrazione. In accordo con quanto è detto nell'enunciato del Teorema, distinguiamo gli indici n nei due tipi r e s secondochè x_n e X_n siano concordi oppure discordi, più precisamente con la legge:

$$x_{r'} \leqq 0\,,\quad X_{r'} \leqq 0\,; \qquad x_{r''} \geqq 0\,,\quad X_{r''} \geqq 0\,;$$

$$x_{s'} > 0\,,\quad X_{s'} < 0\,; \qquad x_{s''} < 0\,,\quad X_{s''} > 0\,.$$

Alcune delle classi r', r'', s', s'' possono essere finite o vuote. Osserviamo che un s' e un s'' non possono essere consecutivi; anzi fra un s' e un $s'' > s'$ deve esistere almeno un r'': infatti, se fosse $s'' = s' + 1$ avremmo $X_{s'} < 0$, $x_{s'+1} < 0$, $X_{s'+1} > 0$ e questo è assurdo poichè $(s' + 2)X_{s'+1} = (s' + 1)X_{s'} + x_{s'+1}$; d'altronde, detto ν il minimo indice u tale che $s' \leqq u \leqq s''$, $X_u \geqq 0$, è evidente che $\nu > s'$, $\nu < s''$ (giacchè, essendo $x_{s''} < X_{s''}$, si ha $X_{s''-1} > X_{s''} > 0$), per cui $s' \leqq \nu - 1 < \nu \leqq s'' - 1$, quindi $X_{\nu-1} < 0 \leqq X_\nu$ e ciò significa che $x_\nu > 0$, ossia che ν è un r''. Analogamente si prova che fra un s'' e un $s' > s''$ deve esistere almeno un r'.

Se gli n sono definitivamente degli s, allora, non potendo esistere infiniti r, per l'osservazione precedente gli n sono definitivamente s' $(x_{s'} > 0,\ X_{s'} < 0)$, oppure sono definitivamente degli s'' $(x_{s''} < 0,\ X_{s''} > 0)$. È evidente che nel primo caso $\{X_n\}$ è definitivamente crescente, mentre nel secondo caso è definitivamente decrescente. Per la legge dei contrari, essendo per ipotesi $\{X_n\}$ non definitivamente monotona, esistono infiniti indici di tipo r.

1°) Si riconosce subito che da $v_n \to 0$ segue $x_r \to 0$, $rX_r \to 0$: infatti

$$v_{r'} = x_{r'} + \beta_{r'} X_{r'} \leqq \left\{ \begin{matrix} x_{r'} \\ \beta_{r'} X_{r'} \end{matrix} \right\} \leqq 0 , \qquad v_{r'} \to 0- ,$$

$$v_{r''} = x_{r''} + \beta_{r''} X_{r''} \geqq \left\{ \begin{matrix} x_{r''} \\ \beta_{r''} X_{r''} \end{matrix} \right\} \geqq 0 , \qquad v_{r''} \to 0+ ;$$

da ciò e dall'ipotesi $\beta_r > \gamma r$ segue l'asserto.

Dimostriamo che se esistono infiniti indici s si ha $sX_s \to 0$, $x_s \to 0$. Risulta intanto, essendo $R = R(s')$ il massimo r che non supera s',

$$(3.1) \qquad 0 > X_{s'} = \frac{x_0 + \dots + x_R + \dots + x_{s'}}{s' + 1} \qquad (x_{R+1} > 0, \dots, x_{s'} > 0),$$

$$> \frac{x_0 + \dots + x_R}{s' + 1} = X_R \frac{R + 1}{s' + 1},$$

e quindi

$$0 > s'X_{s'} > RX_R \frac{R+1}{R} \, \frac{s'}{s'+1} > 2RX_R \to 0-$$

e pertanto $s'X_{s'} \to 0-$. Analogamente si vede che $s''X_{s''} \to 0+$ e quindi $sX_s \to 0$.

Per dimostrare che è anche $x_s \to 0$ cominciamo con l'esaminare il caso in cui s segue immediatamente un r, cioè il caso in cui sia $s' = r' + 1$ oppure

$s'' = r'' + 1$. Risulta

$$0 < x_{s'} = (s'+1)X_{s'} - s'X_{s'-1} = (s'+1)X_{s'} - (r'+1)X_{r'}$$

e, siccome $(s'+1)X_{s'} \to 0$, $(r'+1)X_{r'} \to 0$, è anche $x_{s'} \to 0$. Analogamente si dimostra che $x_{s''} \to 0$.

Nel caso in cui s non sia consecutivo ad un r, da $x_s = (s+1)X_s - sX_{s-1}$ risulta $x_s \to 0$ poichè $sX_s \to 0$, $(s-1)X_{s-1} \to 0$.

Avendo stabilito che $rX_r \to 0$, $sX_s \to 0$, $x_r \to 0$, $x_s \to 0$, si conclude che è $nX_n \to 0$, $x_n \to 0$.

2°) Nel Caso 1° precedente si è già trovato essere $\beta_r X_r \to 0$, $x_r \to 0$; rimane da dimostrare che è $\beta_s X_s \to 0$, dopodichè avremo anche $x_s = v_s - \beta_s X_s \to 0$ e l'asserto sarà dimostrato. Riprendiamo la (3.1):

$$0 > X_{s'} > X_R \frac{R+1}{s'+1},$$

e ricaviamo

$$0 > \beta_{s'} X_{s'} > \beta_R X_R \frac{\beta_{s'}}{s'+1} \Big/ \frac{\beta_R}{R+1} > K\beta_R X_R$$

per l'ipotesi fatta sul rapporto $\dfrac{\beta_s}{s} \Big/ \dfrac{\beta_{R(s)}}{R(s)}$. Pertanto da $\beta_R X_R \to 0$ segue $\beta_{s'} X_{s'} \to 0$. Analogamente si ha $\beta_{s''} X_{s''} \to 0$, e quindi $\beta_s X_s \to 0$.

Il Teorema II risulta così dimostrato.

4. – Teorema III. *Se* $\{\varphi(n)/n\}$ *è monotona non crescente e se*

$$A\varphi(n) < \beta_n < B\varphi(n) \qquad (0 < A < B),$$

allora $v_n \to 0$ *implica* $\beta_n X_n \to 0$ *e* $x_n \to 0$.

Dimostrazione. a) Sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona: basterà dimostrare che, nelle ipotesi del Teorema III, è soddisfatta la seconda parte del Teorema I, cioè che β_n / B_n è limitato. Si ha infatti

$$B_n = \frac{1}{n+1} \sum_{h=0}^{n} \beta_h > \frac{A}{n+1} \sum_{h=0}^{n} h \, \frac{\varphi(h)}{h} \geqq \frac{A}{n+1} \, \frac{\varphi(n)}{n} \sum_{h=0}^{n} h = \frac{1}{2} A\varphi(n),$$

e quindi

$$\beta_n/B_n < B\varphi(n)\Big/\left\{\frac{1}{2}A\varphi(n)\right\} = 2\frac{B}{A}.$$

b) Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona: basterà dimostrare che, nelle ipotesi del Teorema III, è soddisfatta la seconda parte del Teorema II, cioè che $\dfrac{\beta_s}{s}\Big/\dfrac{\beta_{R(s)}}{R(s)}$ è limitato. Si ha infatti

$$\frac{\beta_s}{s}\Big/\frac{\beta_{R(s)}}{R(s)} < \frac{B\varphi(s)}{s}\Big/\frac{A\varphi(R(s))}{R(s)} \leqq \frac{B}{A}.$$

5. – Osservazione I. Come corollario dei due Teoremi I e II otteniamo il seguente Teorema enunciato da T. VIJAYARAGHAVAN ([5]) [già accennato nella Introduzione, in a)]:

Se $\beta_n > \gamma n$ ($\gamma > 0$, indipendente da n), allora $v_n \to 0$ implica $x_n \to 0$, $nX_n \to 0$.

Infatti, sia $\{X_n\}$ definitivamente monotona; allora risulta

$$B_n > \gamma(1 + 2 + \ldots + n)/(n + 1) = \gamma n/2$$

e quindi da $B_nX_n \to 0$ segue

$$nX_n \to 0 \quad \text{e} \quad x_n = (n + 1)X_n - nX_{n-1} \to 0\,.$$

Sia $\{X_n\}$ non definitivamente monotona; allora da $\beta_n > \gamma n$ si ha in particolare (lungo la successione degli r) $\beta_r > \gamma r$ e dal Teorema II, 1°) segue l'asserto.

Osservazione II. Se $\{\varphi(n)\}$ si mantiene limitata, il risultato del Teorema III è contenuto nel Theor. 2 di T. VIJAYARAGHAVAN [5]; pertanto la parte significativa del Teorema III sta nel caso in cui $\{\varphi(n)\}$ non è limitata.

Osservazione III. Le ipotesi del Teorema III sono verificate quando si assuma, per esempio, $\varphi(n) = \log\log n$, poichè $\{(\log\log n)/n\}$ è monotona decrescente. Si ottiene così il seguente teorema enunciato da T. VIJAYARAGHAVAN ([6]) [già accennato nella Introduzione, in b)]:

Se $0 < A < B$ e se

$$A\log\log n < \beta_n < B\log\log n\,, \qquad (n \geqq 3),$$

allora $v_n \to 0$ implica $x_n \to 0$, $\beta_nX_n \to 0$.

([5]) Cfr. [5], Theor. 3 e Theor. 5; vedasi anche [1], pag. 259, dove questo teorema è stato dimostrato, in maniera semplice, come corollario di un teorema più generale, da E. T. COPSON e W. L. FERRAR; vedasi infine [4], dove di questo teorema (elencato come Teorema D) abbiamo dato una dimostrazione diretta come applicazione dei concetti ivi introdotti: la seconda parte di tale dimostrazione può essere notevolmente semplificata mediante l'introduzione dei due tipi di indici r e s, come si è già visto nel presente lavoro per la dimostrazione del Teorema II (n. 3).

([6]) Cfr. [5], Theor. 6.

Osservazione IV. È classico il teorema (di T. VIJAYARAGHAVAN (7)) seguente:

Se

$$\underline{\lim}\, \beta_n > -1\,, \qquad \beta_n = O(1)\,, \qquad v_n \to 0\,,$$

allora $x_n \to 0$, $\beta_n X_n \to 0$.

Questa proposizione cessa di valere se si tralascia l'ipotesi $\underline{\lim}\, \beta_n > -1$ e anche se si sostituisce soltanto con quella più lata $\underline{\lim}\, \beta_n \geqq -1$, come mostra il seguente esempio.

Sia

$$x_n = \log\log(n+4)\,, \qquad \beta_n = -1\,, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

risulta

$$X_n = \frac{1}{n+1}\sum_{u=0}^{n} \log\log(u+4)$$

e, valendo la limitazione (evidente per l'andamento di $\log\log x$)

$$\int_3^{n+4} \log\log u\, du < \sum_{u=0}^{n} \log\log(u+4) < \int_4^{n+5} \log\log u\, du\,,$$

possiamo porre

$$\sum_{u=0}^{n} \log\log(u+4) = \int_{3+\vartheta}^{n+4+\vartheta} \log\log u\, du \qquad [0 < \vartheta = \vartheta(n) < 1].$$

Risulta quindi

$$X_n = \frac{1}{n+1}\int_{3+\vartheta}^{n+4+\vartheta} \log\log u\, du =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{(n+4+\vartheta)\log\log(n+4+\vartheta) - (3+\vartheta)\log\log(3+\vartheta) - \right.$$

$$\left. - \frac{n+4+\vartheta}{\log(n+4+\vartheta)} + \frac{3+\vartheta}{\log(3+\vartheta)} - \int_{3+\vartheta}^{n+4+\vartheta} \frac{du}{\log^2 u}\right\} =$$

$$= \left(1 + \frac{3+\vartheta}{n+1}\right)\log\log(n+4+\vartheta) + O\left(\frac{1}{\log n}\right);$$

osserviamo che si può scrivere

$$\log(n+4+\vartheta) = \log\left\{(n+4)\left(1 + \frac{\vartheta}{n+4}\right)\right\} = \log(n+4) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

(7) Cfr. [5], Theor. 2.

onde

$$X_n = \left(1 + \frac{3+\vartheta}{n+1}\right) \log \left\{ \log(n+4) + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\} + O\left(\frac{1}{\log n}\right) = \log\log(n+4) + O\left(\frac{1}{\log n}\right).$$

Abbiamo pertanto

$$v_n = x_n - X_n = O\left(\frac{1}{\log n}\right) \to 0 .$$

In base a ciò è evidente che $v_n \to 0$ non implica $x_n \to 0$, $\beta_n X_n \to 0$, poichè in questo esempio è $x_n \to +\infty$, $\beta_n X_n \to -\infty$.

6. – Come già venne osservato da T. Vijayaraghavan [5] (e accennato nella nostra Introduzione) si può mostrare che l'ipotesi $\beta_n > \gamma n$, che figura nel Teorema II (vedasi n. **3**) e in uno dei teoremi di T. Vijayaraghavan (vedasi n. **5**, Osservazione I), ha un aspetto di « migliore ipotesi », come mostra il seguente

Teorema IV. *Se* $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, *si possono determinare due successioni* $\{x_n\}$ *e* $\{\beta_n\}$ *tali che*

$$\beta_n > n\varepsilon_n , \qquad v_n \to 0 , \qquad \overline{\lim} \, |x_n| = +\infty .$$

Osservazione. Questo Teorema si trova enunciato in T. Vijayaraghavan [5] (vedasi Theor. 4) nel modo seguente:

Se $\Phi(n) = o(n)$ *si possono trovare* $\{x_n\}$ *e* $\{\beta_n\}$ *tali che* $\beta_n > \Phi(n)$, $v_n \to 0$, $x_n \neq O(1)$.

La condizione $\Phi(n) = o(n)$, quando non si faccia alcuna ipotesi sul segno di $\Phi(n)$, deve interpretarsi nella maniera seguente:

$$-n\delta_n \leqq \Phi(n) \leqq n\delta_n \qquad (\delta_n > 0, \qquad \delta_n \to 0+) ;$$

si avrebbe allora $-n\delta_n \leqq \Phi(n) < \beta_n$. D'altronde, perchè valga $v_n \to 0$, $x_n \neq O(1)$, β_n (in forza del teorema ricordato nell'Osservazione IV, n. **5**) deve non soddisfare ad una almeno delle condizioni $\underline{\lim}\, \beta_n > -1$, $\beta_n = O(1)$. L'esempio riportato alla fine del n. **5** ci mostra che la parte più espressiva del Theor. 4 di T. Vijayaraghavan è quella in cui si suppone $\Phi(n) > 0$ e quindi $\beta_n > 0$ e $\overline{\lim}\, \beta_n = +\infty$. Con questa ulteriore restrizione esso prende la forma del nostro Teorema IV che implica quello di T. Vijayaraghavan.

Dimostrazione. Si tratta di scegliere opportunamente i vari elementi e lo faremo in stadi successivi.

1°) Si può supporre $n\varepsilon_n \to +\infty$ perchè, in caso contrario, si potrebbe assumere

$$n\varepsilon_n' = \text{Max}\,(\varepsilon_1, 2\varepsilon_2, \ldots, n\varepsilon_n, \sqrt{n}),$$

e risultando $\varepsilon_n' \geqq \varepsilon_n$ si potrebbe sostituire $\{\varepsilon_n'\}$ a $\{\varepsilon_n\}$; la classe di successioni o l'esempio costruito per $\{\varepsilon_n'\}$ vale a maggior ragione per $\{\varepsilon_n\}$; con questa scelta in particolare è $\sum \varepsilon_n'$ divergente a $+\infty$.

2°) Si può supporre, senza alterare le generalità, che sia $\{\varepsilon_n\}$ monotona non crescente: in caso contrario si potrebbe assumere

$$\varepsilon_n'' = \text{Max}\,(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \ldots)$$

e sostituire $\{\varepsilon_n''\}$ a $\{\varepsilon_n\}$; la classe di successioni o l'esempio costruito per $\{\varepsilon_n''\}$ vale a maggior ragione per $\{\varepsilon_n\}$.

E così, in definitiva, si può supporre $\varepsilon_n \to 0+$ monotona, $n\varepsilon_n \to +\infty$, $\sum \varepsilon_n$ divergente a $+\infty$.

3°) Si costruiscano due successioni $\{\Omega_n\}$ e $\{\omega_n\}$ di numeri positivi al modo seguente:

$\{\Omega_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ monotona crescente, $\Omega_n \to +\infty$, $\Omega_n \varepsilon_n \to 0+$;

$\{\omega_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ monotona decrescente, $\omega_n \to 0+$, $\sum\limits_1^\infty \omega_n = +\infty$;

$\omega_1 < \Omega_1$ e cioè $0+ \leftarrow \ldots < \omega_2 < \omega_1 < \Omega_1 < \Omega_2 < \ldots \to +\infty$.

4°) Consideriamo una successione n_h $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ crescente di indici interi e poniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \omega_k = A_n, \qquad \sum_{k=1}^{h} \omega_{n_k} = a_h, \qquad \sum_{k=1}^{h} \Omega_k = C_h.$$

Veniamo a costruire la successione $\{n_h\}$ di indici interi con la legge seguente.

Assumiamo come n_1 il minimo intero tale che $-A_{n_1-1} + \Omega_1$ risulti negativo e quindi

$$-A_{n_1-1} + \Omega_1 < 0 \leqq -A_{n_1-2} + \Omega_1$$

(questo è possibile perchè $A_1 = \omega_1 < \Omega_1$ e $A_n \to +\infty$); potremo allora scrivere (essendo $a_1 = \omega_{n_1}$)

$$-\omega_{n_1-1} \leqq -A_{n_1} + a_1 + \Omega_1 < 0 \leqq -A_{n_1} + a_1 + \Omega_1 + \omega_{n_1-1} < \omega_{n_1-1}.$$

Procediamo poi per induzione: immaginiamo di avere fissato n_h $(h \geqq 1)$ in guisa da avere

$$(6.1) \qquad -\omega_{n_h-1} \leqq -A_{n_h} + a_h + C_h < 0 \leqq -A_{n_h} + a_h + C_h + \omega_{n_h-1} < \omega_{n_h-1}$$

e di andare a scegliere n_{h+1} in guisa che sussista l'analoga relazione

$$-\omega_{n_{h+1}-1} \leqq -A_{n_{h+1}} + a_{h+1} + C_{h+1} < 0 \leqq -A_{n_{h+1}} + a_{h+1} + C_{h+1} + \omega_{n_{h+1}-1} < \omega_{n_{h+1}-1}.$$

Basterà assumere per n_{h+1} il minimo intero tale che $-A_{n_{h+1}-1} + a_h + C_{h+1}$ risulti negativo e quindi

$$-A_{n_{h+1}-1} + a_h + C_{h+1} < 0 \leqq -A_{n_{h+1}-2} + a_h + C_{h+1}.$$

La scelta di n_{h+1} è possibile poichè, fissato h, risultano fissati n_h, a_h e $C_{h+1} = C_h + \Omega_{h+1}$, mentre è

$$A_{n_{h+1}} = A_{n_h} + \sum_{k=n_h+1}^{n_{h+1}} \omega_k$$

e la serie $\sum_{k=n_h+1}^{\infty} \omega_k$ è divergente: si tenga anche presente che $\omega_n \rightarrow 0$.

5°) Per la scelta della successione $\{x_n\}$ poniamo $x_0 = 0$ e

$$x_n = -\omega_n \quad \text{per} \quad 0 < n < n_1 \quad \text{e per} \quad n_h < n < n_{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$x_{n_h} = \Omega_h \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

è evidente che $0 = \underline{\lim}\, x_n < \overline{\lim}\, x_n = +\infty$.

Per la successione $\{X_n\}$ evidentemente risulta $X_0 = 0$ e

$$X_n = \frac{-A_n}{n+1} \qquad \text{per} \quad 0 < n < n_1,$$

$$X_{n_h} = \frac{-A_{n_h} + a_h + C_h}{n_h + 1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$X_n = \frac{-A_n + a_h + C_h}{n+1} \qquad \text{per} \quad n_h < n < n_{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots);$$

per la successione $\{v_n\}$ si ha infine $v_0 = 0$ e

$$v_n = -\omega_n - \beta_n \frac{A_n}{n+1} \qquad \text{per} \quad 0 < n < n_1,$$

$$v_{n_h} = \Omega_h + \beta_{n_h} \frac{-A_{n_h} + a_h + C_h}{n_h + 1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$v_n = -\omega_n + \beta_n \frac{-A_n + a_h + C_h}{n+1} \qquad \text{per} \quad n_h < n < n_{h+1} \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots).$$

6°) Per la scelta della successione $\{\beta_n\}$ è evidente che inizialmente essa può essere assunta arbitrariamente: scelto h_0 tale che per $h \geqq h_0$ sia $\varepsilon_{n_h} \leqq 1$, poniamo

$$\beta_n = (n+1)\varepsilon_n \qquad \text{per} \qquad 0 \leqq n < n_{h_0};$$

si tratta di definire β_n per $n \geqq n_{h_0}$. Assumendo

$$\beta_{n_h} = \frac{(n_h+1)\Omega_h}{A_{n_h} - a_h - C_h} \qquad (h = h_0,\ h_0+1,\ h_0+2, \dots),$$

risulta $v_{n_h} = 0$ e anche, in forza della (6.1), per $h \geqq h_0$,

$$\beta_{n_h} \geqq (n_h+1)\Omega_h/\omega_{n_h-1} > n_h + 1 > n_h \geqq n_h \varepsilon_{n_h}. \tag{6.2}$$

Veniamo infine a scegliere β_n per $n_h < n < n_{h+1}$ $(h=h_0,\ h_0+1,\ h_0+2, \dots)$. Osserviamo che per $n_h < n < n_{h+1}$ risulta $-A_{n-1}+a_h+C_{h+1} \geqq 0$ (altrimenti per definizione avremmo $n_{h+1} \leqq n$, contro l'ipotesi), ossia

$$-A_n + a_h + C_h + \omega_n + \Omega_{h+1} \geqq 0,$$

da cui

$$-(\Omega_{h+1}+\omega_n) \leqq -A_n + a_h + C_h = -A_{n_h} + a_h + C_h - (A_n - A_{n_h}) < 0$$

e quindi, per la definizione di v_n,

$$-\omega_n - \beta_n \frac{\Omega_{h+1}+\omega_n}{n+1} \leqq v_n < 0.$$

Essendo $\omega_n \to 0+$, per ottenere $v_n \to 0-$ basta assumere β_n in guisa da aversi

$$\beta_n \Omega_{h+1}/(n+1) \to 0$$

A questo fine è sufficiente, in accordo con l'ipotesi $\beta_n > n\varepsilon_n$, assumere (come già si è fatto per $0 \leqq n < n_{h_0}$) $\beta_n = (n+1)\varepsilon_n$ per $n_h < n < n_{h+1}$ $(h = h_0,\ h_0+1,\ h_0+2, \dots)$, poichè allora (essendo $n > h+1$) si ha proprio

$$0 < \beta_n \Omega_{h+1}/(n+1) = \varepsilon_n\, \Omega_{h+1} < \varepsilon_n\, \Omega_n \to 0.$$

Il Teorema IV è così dimostrato.

Nota I. L'esempio da noi costruito si vale sostanzialmente delle due successioni $\{\omega_n\}$ e $\{\Omega_n\}$ per la scelta dei posti $\{n_h\}$: si ha $\omega_n \to 0+$, mentre $\sum \omega_n$ è divergente e $\Omega_n \to +\infty$. I coefficienti β_{n_h} di intensità della perturbazione sono molto grandi in confronto ai β_n a loro prossimi. Non è difficile presentare la scelta degli $\{n_h\}$ come effettuata da un meccanismo a bilancia nel quale vengano a cadere da una parte una grande massa $x_{n_h} = \Omega_h$ e dall'altra parte, successivamente, tante piccole masse $-x_{n_h+1} = = \omega_{n_h+1}$, $-x_{n_h+2} = \omega_{n_h+2}$, ..., finchè queste non fanno prevalere la loro parte: a questo punto il meccanismo scatta e il posto successivo è n_{h+1}, con l'effetto di esaltare (il valore di x_n e) il coefficiente β_n di intensità e di far cadere la grande massa Ω_{h+1}, ecc..

Nota II. Il Dr. VLADETA VUČKOVIĆ di Belgrado mi segnala gentilmente che il Teorema A del mio precedente lavoro [4] si può dedurre da un teorema di limite riguardante le successioni oscillanti con un procedimento molto semplice e analogo a quello seguito da J. KARAMATA nella Nota « *Sur quelques inversions d'une proposition de Cauchy et leurs généralisations*, Tôhoku Math. J. **36**, 22-28 (1932) » per dedurre il teorema di MERCER e note estensioni di tale teorema da una proposizione di CAUCHY generalizzata. In relazione a ciò desidero ora marcare che nella mia precedente Nota [4] si raggiungono i risultati con procedimenti che fanno appello solo a proposizioni classiche elementari e si preoccupano di essere aderenti all'intuizione, come del resto è dichiarato nella Introduzione della Nota stessa.

Bibliografia.

[1] E. T. COPSON and W. L. FERRAR, *Notes on the structure of sequences* (I), J. London Math. Soc. **4**, 258-264 (1929).

[2] G. H. HARDY, *Divergent series*, Oxford 1949.

[3] J. MERCER, *On the limits of real variants*, Proc. London Math. Soc. (2) **5**, 206-224 (1907).

[4] L. TANZI CATTABIANCHI, *Sui teoremi di Mercer e Vijayaraghavan precisati per le successioni oscillanti*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 337-361 (1953).

[5] T. VIJAYARAGHAVAN, *A generalization of a theorem of Mercer*, J. London Math. Soc. **3**, 130-134 (1928).