Rivista Mat. Univ. Parma 5, 83-98 (1954)

GAETANO VILLARI (*)

Sul comportamento asintotico degli integrali di una classe di equazioni differenziali non lineari. (**)

1. – Scopo della presente ricerca è lo studio dell'esistenza di soluzioni dell'equazione

$$(\alpha) \qquad x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t) f_i[x^{(n-i)}(t)]$$

con prescritto comportamento asintotico, avendo posto al solito $x^{(k)}(t) \equiv \dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k} x(t)$ $(k = 1, 2, ..., n)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$, ed essendo le $A_i(t)$, $f_i(z)$ funzioni note continue dei loro argomenti.

Nella classe delle equazioni (α) rientrano quelle di tipo lineare

$$(\beta) \qquad x^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t) x^{(n-i)}(t) \ ;$$

in tal caso, come è noto (¹), se i coefficienti $A_i(t)$ al divergere di t divengono infinitesimi di ordine non inferiore a $\tau(t)/t^{i+n-1}$, essendo $\tau(t)$ una funzione tale che $\tau(t)/t$ risulti integrabile in (t_0, ∞), allora per valori sufficientemente grandi della variabile indipendente l'integrale generale della (β) assume la forma

$$(\gamma) \qquad x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i t^{n-i} + \eta \ ,$$

(*) Indirizzo: Istituto Matematico U. DINI, via Alfani 81, Firenze, Italia.
(**) Ricevuto il 28-VII-1954.
(¹) U. DINI, *Lezioni di Analisi infinitesimale*, Vol. II, Parte II, Pisa 1915, cfr. p. 780.

dove le c_i sono costanti ed η è un infinitesimo di ordine non inferiore a

$$\int_t^\infty \frac{\tau(t)}{t}\, dt .$$

In particolare, per $n = 2$ gli integrali dell'equazione

$$x''(t) = A_1(t)x'(t) + A_2(t)x(t)$$

si riducono alla forma

$$x(t) = c_1 t + c_2 + \eta ,$$

essendo c_1 e c_2 costanti arbitrarie ed η un infinitesimo, se le funzioni $A_1(t)$ e $A_2(t)$ si mantengono per $t \to \infty$ infinitesime di ordine non inferiore a $1/t^{2+\lambda_1}$, $1/t^{3+\lambda_2}$, dove λ_1 e λ_2 sono quantità reali e positive (²).

Tali risultati saranno qui estesi al caso delle equazioni non lineari, per la parte che si riferisce all'esistenza e alla unicità di soluzioni del tipo (γ) (³).

Precisamente, seguendo un procedimento dimostrativo che si ispira ad un metodo esistenziale dovuto a L. TONELLI, e da noi in una precedente ricerca (⁴) adattato al caso di intervalli infiniti, sarà provato il

Teorema I. *Se le funzioni $A_i(t)$, $f_i(z)$ che figurano nella equazione (α) soddisfano alle seguenti condizioni:*

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \textit{le } f_i(z) \textit{ sono continue per } z \geq z_0, \\ |f_i(z)| \leq h|z|^{p_i} \qquad (i = 2, 3, \ldots, n); \\ \textit{le } A_i(t) \textit{ sono continue per } t \geq t_0, \\ |A_i(t)| \leq h/t^{n+p_i\cdot(i-1)+\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ \textit{essendo } h,\ p_i,\ \lambda_i \textit{ costanti reali positive}; \end{cases}$$

allora, scelta la costante $c_1 > q + \max(0, z_0)$, con $q > 0$ (⁵), e del tutto arbitrariamente le costanti $c_2, c_3, \ldots, c_n$, esiste in corrispondenza almeno un integrale

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\, u_i(t)$$

(²) Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte II, Bologna 1949, p. 44, dove il risultato relativo alle equazioni del secondo ordine è ritrovato direttamente col metodo di LIOUVILLE-NEUMANN.

(³) Nei risultati relativi al caso lineare è altresì contenuta la proprietà che *tutte* le soluzioni della (β) godono del medesimo comportamento asintotico, ciò che in generale non si conserva quando dal caso lineare si passa a quello non lineare.

(⁴) Cfr. G. VILLARI, *Un teorema di esistenza e di unicità per una classe di soluzioni dell'equazione $z''(t)+A(t)f(z)=0$*, Rivista Mat. Univ. Parma 4, 319-326 (1953).

(⁵) Nel caso che le funzioni $f_i(z)$ siano definite e continue in $(-\infty, \infty)$, anche il valore della costante c_1 può scegliersi in modo del tutto arbitrario.

dell'equazione differenziale (α), *definito per valori di* t *sufficientemente grandi e tale che*

$$\lim_{t\to\infty} u_i(t) = c_i .$$

Quando in particolare si scelga $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, le condizioni (δ) possono modificarsi e si ha il

Teorema II. *Se nella equazione differenziale* (α)

$$(\varepsilon)\quad \left\{\begin{array}{l} \textit{le } f_i(z) \textit{ sono continue per } z \geqslant z_0, \quad z_0 \leqslant -q \quad (q > 0); \\ \textit{le } A_i(t) \textit{ sono continue per } t \geqslant t_0, \\ |A_i(t)| \leqslant h/t^{n+\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ \textit{essendo } q,\ h,\ \lambda_i \textit{ costanti reali positive;} \end{array}\right.$$

allora, comunque si scelga la costante $c \geqslant z_0 + q$, *esiste almeno un integrale* $x(t)$ *di* (α) *che verifica la condizione*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c .$$

Si osservi che la condizione alla quale nelle (ε) devono soddisfare le funzioni $f_i(z)$, di essere definite e continue per valori anche negativi dei loro argomenti, non è migliorabile; nel senso che in generale il Teorema II non sussiste quando le $f_i(z)$ si suppongono definite e continue per valori *solo non negativi* degli argomenti. Naturalmente a ciò può ovviarsi aggiungendo alle (ε) ulteriori condizioni.

Ad esempio, se $A_1(t) = A_2(t) = \ldots = A_{n-1}(t) = 0$, si ha il

Teorema III. *L'equazione*

$$x^{(n)}(t) = A(t) f[x(t)] ,$$

con le condizioni

$$\left\{\begin{array}{l} f(z) \textit{ continua per } z \geqslant z_0, \\ A(t) \textit{ continua per } t \geqslant t_0, \\ |A(t)| \leqslant h/t^{n+\lambda}, \\ \textit{essendo } h,\ \lambda \textit{ costanti reali positive,} \end{array}\right.$$

ammette almeno un integrale, definito per valori sufficientemente grandi della variabile, che per $t \to \infty$ *tende a* c, *comunque si scelga la costante* $c \geqslant z_0 + q$ $(q > 0)$.

Infine, nel n. **7**, sono indicate delle condizioni che assicurano l'unicità degli integrali considerati nei precedenti teoremi. Precisamente si ha il

Teorema IV. *Nelle ipotesi*

$$(\eta)\qquad \left\{\begin{array}{l} \textit{le } A_i(t) \textit{ sono continue per } t \geqslant t_0, \\ |A_i(t)| \leqslant h/t^{n+p_i(i-1)+\lambda_i} \qquad (i=1,2,\dots,n); \\ f_1(z) \textit{ è lipschitziana (del primo ordine) in ogni intervallo finito per } z \geqslant z_0, \\ |f_i(z)-f_i(\bar z)| \leqslant R_i|z^{r_i}-\bar z^{r_i}|, \quad 0<r_i\leqslant p_i, \quad z \text{ e } \bar z \geqslant z_0, \quad (i=1,2,\dots,n); \\ \textit{essendo } h,\ p_i,\ \lambda_i,\ R_i,\ r_i \textit{ costanti reali positive;} \end{array}\right.$$

non possono esistere due soluzioni distinte dell'equazione (α),

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}u_i(t)\,,\qquad \bar x(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\bar u_i(t)\,,$$

verificanti le relazioni

$$\lim_{t\to\infty}u_i(t)=\lim_{t\to\infty}\bar u_i(t)=c_i\,,$$

dove le costanti c_i $(i=1,2,\dots,n)$ *soddisfano alle condizioni del Teorema* I.

Quando per le costanti c_i ci si riferisce al caso dei Teoremi II e III, bisogna supporre *tutte le* $f_i(z)$ *lipschitziane (del primo ordine) e* $|A_i(t)|\leqslant h/t^{n+(i-1)+\lambda_i}$ $(i=1,2,\dots,n)$.

2. – Sia data l'equazione differenziale

$$x^{(n)}(t)=\sum_{i=1}^{n}A_i(t)f_i[x^{(n-i)}(t)]\,, \tag{1}$$

dove al solito si è posto $x^{(k)}(t)=\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}x(t)$ $(k=1,2,\dots,n)$, $x^{(0)}(t)=x(t)$, e le funzioni $A_i(t)$, $f_i(z)$ soddisfano alle condizioni seguenti:

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \textit{le } f_i(z) \textit{ sono continue per } z \geqslant z_0, \\ |f_i(z)| \leqslant h|z|^{p_i} \qquad (i=2,3,\dots,n); \\ \textit{le } A_i(t) \textit{ sono continue per } t \geqslant t_0, \\ |A_i(t)| \leqslant h/t^{n+p_i(i-1)+\lambda_i} \qquad (i=1,2,\dots,n); \\ \textit{essendo } h,\ p_i,\ \lambda_i \textit{ costanti reali positive.} \end{array}\right.$$

Ponendo

$$x^{(n-i)}(t)=\sum_{k=1}^{i}\frac{t^{i-k}}{(i-k)!}u_k(t)\qquad (i=1,2,\dots,n), \tag{3}$$

confrontando ciascuna delle prime $n-1$ di queste uguaglianze ($i=1, 2, \dots, n-1$) con la derivata della successiva, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{i} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!} u_k'(t) = 0 \qquad (i = 2, 3, \dots, n),$$

e da queste, avendosi (per $i = 2, 3$) $u_2'(t) = -tu_1'(t)$, $u_3'(t) = \frac{t^2}{2} u_1'(t)$, per induzione si ricava

$$u_i'(t) = (-1)^{i-1} \frac{t^{i-1}}{(i-1)!} u_1'(t) \qquad (i = 2, 3, \dots, n). \tag{4}$$

Derivando allora la prima delle (3) ($i=1$), tenendo conto dell'equazione (1) e delle altre (3), si ottiene

$$u_1'(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i(t) f_i \left[\sum_{k=1}^{i} \frac{t^{i-k}}{(i-k)!} u_k(t) \right],$$

ed infine, sostituendo nelle (4), si ricava il sistema differenziale

$$u_k'(t) = (-1)^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n} A_i(t) f_i \left[\frac{t^{i-1}}{(i-1)!} u_1 + \frac{t^{i-2}}{(i-2)!} u_2 + \dots + u_i \right] \tag{5}$$

al quale devono soddisfare le funzioni $u_k(t)$ ($k=1, 2, \dots, n$) definite dalle (3).

Dimostreremo che, sotto le condizioni (2), scelta la costante $c_1 > q + \max(0, z_0)$, con q numero positivo arbitrario, e scelte del tutto arbitrariamente le costanti $c_2, c_3, \dots, c_n$, esiste in corrispondenza una n-pla di funzioni $u_k(t)$, definite per valori sufficientemente grandi della variabile t, soddisfacenti al sistema (5) ed alle relazioni

$$\lim_{t \to \infty} u_k(t) = c_k \qquad (k = 1, 2, \dots n). \tag{6}$$

3. – Le (5), tenendo conto delle (6), si trasformano nel sistema di equazioni integrali

$$u_k(t) = c_k + (-1)^k \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \int_t^\infty \xi^{k-1} A_i(\xi) f_i \left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!} u_1 + \frac{\xi^{i-2}}{(i-2)!} u_2 + \dots + u_i \right] d\xi . \tag{7}$$

Definiamo in (T, ∞), $T \geqslant t_0$, le successioni $\{u_{k,s}(t)\}$ ($k=1, 2, \dots, n$; $s=1, 2, \dots$)

con la seguente legge:

$$
(8)\qquad \begin{cases} u_{k,s}(t) = c_k & \text{per}\quad t \geqslant T + s\,, \\[2mm] u_{k,s}(t) = c_k + (-1)^k \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} A_i(\xi) f_i\left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}\, u_{1,s} + \right. \\[2mm] \qquad\qquad \left. + \dfrac{\xi^{i-2}}{(i-2)!}\, u_{2,s} + \ldots + u_{i,s}\right] d\xi & \text{per}\quad T \leqslant t \leqslant T + s\,; \end{cases}
$$

inoltre, essendo q la costante che interviene nella scelta di c_1, poniamo

$$
(9)\qquad L_i > \left[\sum_{j=1}^{i} \frac{|c_j|}{(i-j)!} + iq\right]^{p_i},
$$

ed indichi M il massimo della funzione $|f_1(z)|$ per valori positivi di z non superiori a $c_1 + q$.

Nell'intervallo $T + s - (1/s) \leqslant t \leqslant T + s$ si avrà:

$$
(10)\qquad |u_{k,s}(t)| \leqslant |c_k| + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} |A_i(\xi)| \left| f_i\left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}\, c_1 + \frac{\xi^{i-2}}{(i-2)!}\, c_2 + \ldots + c_i\right]\right| d\xi\,.
$$

Potendosi supporre $T > 1$ e tenendo conto delle ipotesi fatte, per $i = 2, 3, \ldots, n$, otteniamo:

$$
\int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} |A_i(\xi)| \left| f_i\left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}\, c_1 + \ldots + c_i\right]\right| d\xi \leqslant h^2 \int_{t+(1/s)}^{\infty} \left[\left\{\frac{c_1}{(i-1)!} + \right.\right.
$$

$$
\left.\left. + \frac{c_2}{(i-2)!}\, \frac{1}{\xi} + \ldots + c_i\, \frac{1}{\xi^{i-1}}\right\}^{p_i} \Big/ \xi^{n-k+1+\lambda_i}\right] d\xi < h^2 L_i \int_{t+(1/s)}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda_i}} < \frac{h^2 L_i}{n-k+\lambda_i}\, \frac{1}{t^{n-k+\lambda_i}}\,,
$$

e, per $i = 1$,

$$
\int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} |A_1(\xi)|\, |f_1(c_1)|\, d\xi \leqslant hM \int_{t+(1/s)}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda_1}} < \frac{hM}{n-k+\lambda_1}\, \frac{1}{t^{n-k+\lambda_1}}\,.
$$

Pertanto dalla (10) segue:

$$
|u_{k,s}(t)| < |c_k| + \frac{1}{(k-1)!}\, \frac{hM}{n-k+\lambda_1}\, \frac{1}{t^{n-k+\lambda_1}} + \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=2}^{n} \frac{h^2 L_i}{n-k+\lambda_i}\, \frac{1}{t^{n-k+\lambda_i}}
$$

$$
(k = 1, 2, \ldots, n),
$$

ed anche

$$u_{1,s}(t) > c_1 - \frac{hM}{n-1+\lambda_1}\frac{1}{t^{n-1+\lambda_1}} - \sum_{i=2}^{n}\frac{h^2L_i}{n-1+\lambda_i}\frac{1}{t^{n-1+\lambda_i}}\,.$$

Ponendo allora $L = \max L_i$, $\lambda = \min \lambda_i$, $H = n \max(h^2L, hM)$, si ottiene:

$$|u_{k,s}(t)| < |c_k| + \frac{H}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)}\frac{1}{t^{n-k+\lambda}}\,,$$

$$u_{1,s}(t) > c_1 - \frac{H}{n-1+\lambda}\frac{1}{t^{n-1+\lambda}}\,,$$

e scegliendo infine T, come è certamente lecito, in modo che soddisfi alla disuguaglianza

$$T > \max_{k=1,2,\dots,n}\left[\frac{H}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)q}\right]^{1/(n-k+\lambda)}, \tag{11}$$

risulta, per $t \geqslant T + s - (1/s)$,

$$\begin{cases} |u_{k,s}(t)| < |c_k| + q & (k = 1, 2, \dots, n), \\ u_{1,s}(t) > c_1 - q > \max(0, z_0)\,. \end{cases} \tag{12}$$

Ripetendo il procedimento anche per gli intervalli $(T+s-(2/s),\ T+s-(1/s))$, ..., $(T,\ T+(1/s))$ e tenendo conto delle (12) e delle (9), si ottiene, per $t \geqslant T$ e *qualunque sia l'indice s*,

$$\begin{cases} |u_{k,s}(t)| < |c_k| + \dfrac{H}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)}\dfrac{1}{t^{n-k+\lambda}} < |c_k| + q & (k = 1, 2, \dots, n), \\[2ex] u_{1,s}(t) > c_1 - \dfrac{H}{n-1+\lambda}\dfrac{1}{t^{n-1+\lambda}} > c_1 - q > \max(0, z_0)\,. \end{cases} \tag{13}$$

Per la validità del procedimento usato rimane da verificare che nella seconda delle (8) l'argomento delle $f_i(z)$ per $t \geqslant T$ si mantiene $\geqslant z_0$.

Osserviamo per ciò che le (13) rimangono valide comunque si scelga $T > \max(1, t_0)$ soddisfacente alla (11); avendosi allora $u_{1,s}(t) > c_1 - q > 0$ ed essendo le $u_{k,s}(t)$ $(k = 2, 3, \dots, n)$ limitate in valore assoluto, può determinarsi T in modo che per $t \geqslant T$ gli argomenti delle funzioni $f_i(z)$ nella seconda delle (8) risultino, per $i = 2, 3, \dots, n$, maggiori di z_0; e quanto alla funzione $f_1(z)$, essendo $z = u_{1,s}(t)$, per la seconda delle (13) non perde mai significato per $t \geqslant T$.

Ciò garantisce la legittimità del procedimento, e per la prima delle (13) le funzioni che compongono le successioni $\{u_{k,s}(t)\}$ risultano equilimitate per $t \geqslant T$.

Indichiamo adesso con t' e t'' due valori arbitrari dell'intervallo (T, ∞), $T \leqslant t' < t'' < \infty$; per la seconda delle (8) ed i risultati precedenti si ha:

$$|u_{k,s}(t'') - u_{k,s}(t')| \leqslant \frac{1}{(k-1)!} \sum_{i=1}^{n} \int_{t'+(1/s)}^{t''+(1/s)} \xi^{k-1} |A_i(\xi)| \left| f_i \left\{ \frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!} u_{1,s} + \ldots + u_{i,s} \right\} \right| d\xi <$$

$$< \frac{H}{(k-1)!} \int_{t'+(1/s)}^{t''+(1/s)} \frac{d\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda}} = \frac{H}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)} \frac{[t''+(1/s)]^{n-k+\lambda} - [t'+(1/s)]^{n-k+\lambda}}{[t''+(1/s)]^{n-k+\lambda}[t'+(1/s)]^{n-k+\lambda}} =$$

$$= \frac{H}{(k-1)!} (t''-t') \frac{[t'+(1/s)+\theta\cdot(t''-t')]^{n-k+\lambda-1}}{[t''+(1/s)]^{n-k+\lambda}} \frac{1}{[t'+(1/s)]^{n-k+\lambda}}$$

$$(0 < \theta < 1;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

e poichè, avendo supposto $t'' > T > 1$,

$$\frac{[t'+(1/s)+\theta\cdot(t''-t')]^{n-k+\lambda-1}}{[t''+(1/s)]^{n-k+\lambda}} < \frac{1}{t''+(1/s)} < 1,$$

si ricava

$$|u_{k,s}(t'') - u_{k,s}(t')| < \frac{H}{(k-1)!} \frac{1}{T^{n-k+\lambda}} (t''-t') \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

e segue da ciò l'equicontinuità delle funzioni che compongono le successioni $\{u_{k,s}(t)\}$.

È allora possibile, con un noto procedimento, estrarre da ciascuna delle successioni date una sottosuccessione, che continueremo ad indicare con $\{u_{k,s}(t)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, convergente per ogni valore di $t \geqslant T$ ed avente la proprietà di convergere uniformemente in ogni intervallo finito interno a (T, ∞).

Siano $u_k(t)$ le funzioni verso cui convergono in (T, ∞) le sottosuccessioni sopraddette, e dimostriamo che si ha:

$$(15) \qquad \lim_{s\to\infty} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} A_i(\xi) f_i \left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!} u_{1,s} + \ldots + u_{i,s} \right] d\xi =$$

$$= \int_{t}^{\infty} \xi^{k-1} A_i(\xi) f_i \left[\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!} u_1 + \ldots + u_i \right] d\xi \qquad (k,\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Infatti, per ogni $t \geqslant T$, assunto arbitrariamente t' con $t + (1/s) < t' < \infty$, possiamo porre:

$$\left|\int_t^\infty \xi^{k-1}A_i(\xi)f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i\right\}\mathrm{d}\xi-\int_{t+(1/s)}^\infty \xi^{k-1}A_i(\xi)f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_{1,s}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+u_{i,s}\right\}\mathrm{d}\xi\right|\leqslant\int_t^{t+(1/s)}\xi^{k-1}|A_i(\xi)|\left|f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i\right\}\right|\mathrm{d}\xi+$$

$$+\int_{t+(1/s)}^{t'}\xi^{k-1}|A_i(\xi)|\left|f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i\right\}-f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_{1,s}+\ldots+u_{i,s}\right\}\right|\mathrm{d}\xi+$$

$$+\int_{t'}^\infty \xi^{k-1}|A_i(\xi)|\left[\left|f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i\right\}\right|+\left|f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_{1,s}+\ldots+u_{i,s}\right\}\right|\right]\mathrm{d}\xi.$$

In virtù delle (2) e della prima delle (13), alle quali soddisfano le $u_{k,s}(t)$ e di conseguenza le funzioni $u_k(t)$, il primo ed il terzo integrale che figurano al secondo membro della disuguaglianza per $i=2,3,\ldots,n$ risultano rispettivamente minori di

$$h^2L\int_t^{t+(1/s)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda}}\,,\qquad 2h^2L\int_{t'}^\infty\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda}}=\frac{2h^2L}{n-k+\lambda}\,\frac{1}{t'^{n-k+\lambda}}\,,$$

e per $i=1$ minori o uguali di

$$hM\int_t^{t+(1/s)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{n-k+1+\lambda}}\,,\qquad \frac{2hM}{n-k+\lambda}\,\frac{1}{t'^{n-k+\lambda}}\,;$$

pertanto, se s e t' sono sufficientemente grandi, detti integrali possono rendersi più piccoli di qualsiasi numero positivo prefissato.

Quanto al secondo integrale, poichè per $s\to\infty$ le $u_{k,s}(t)$ convergono uniformemente in (T,t') verso le $u_k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$, anche le quantità $\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_{1,s}+\ldots+u_{i,s}$ nello stesso intervallo convergeranno uniformemente per $s\to\infty$ verso $\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i$. Per l'uniforme continuità delle $f_i(z)$ è allora possibile determinare l'indice s in modo che la quantità

$$\left|f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_1+\ldots+u_i\right\}-f_i\left\{\frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}u_{1,s}+\ldots+u_{i,s}\right\}\right|$$

risulti arbitrariamente piccola in ogni punto dell'intervallo (T, t'), e si ha di qui che anche l'integrale considerato per s sufficientemente grande può rendersi minore di qualunque numero positivo prefissato.

Le (15) restano dunque dimostrate.

Passando allora al limite per $s \to \infty$ nella seconda delle (8), le funzioni $u_k(t)$ sopra definite soddisfano per $t \geqslant T$ al sistema di equazioni integrali (7).

Si osservi che se le funzioni $f_i(z)$ *sono definite in* $(-\infty, \infty)$ *ed ivi continue* $(z_0 = -\infty)$, *anche la costante* c_1 *può scegliersi in modo del tutto arbitrario.*

Dalle cose dette segue il Teorema I.

4. – Se in particolare si pone $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0$, le condizioni (2) possono essere sostituite dalle altre seguenti:

$$(2')\qquad \left\{\begin{array}{l} \textit{le } f_i(z) \textit{ sono continue per } z \geqslant z_0 \qquad (z_0 \leqslant -q,\ q > 0), \\ \textit{le } A_i(t) \textit{ sono continue per } t \geqslant t_0, \\ |A_i(t)| \leqslant h/t^{n+\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \textit{essendo } q,\ h,\ \lambda_i \textit{ costanti reali positive,} \end{array}\right.$$

ed il teorema resta valido comunque si scelga la costante $c_n = c \geqslant z_0 + q$.

Infatti, ferme restando le approssimazioni definite dalle (8), indichiamo con M_i il massimo di $|f_i(z)|$ per valori di $|z|$ non superiori a q $(i=1, 2, \ldots, n-1)$, e con M_n il massimo di $|f_n(z)|$ per valori di $|z|$ non superiori a $|c| + q$.

Nell'intervallo $(T + s - (1/s),\ T + s)$ si ha:

$$\left\{\begin{array}{l} |u_{k,s}(t)| \leqslant \dfrac{1}{(k-1)!} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} |A_i(\xi)|\, |f_i(0)|\, d\xi + \dfrac{1}{(k-1)!} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} |A_n(\xi)|\, |f_n(c)|\, d\xi \\ \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\ |u_{n,s}(t)| \leqslant |c| + \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{n-1} |A_i(\xi)|\, |f_i(0)|\, d\xi + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{n-1} |A_n(\xi)|\, |f_n(c)|\, d\xi, \end{array}\right.$$

da cui

$$\left\{\begin{array}{l} |u_{k,s}(t)| \leqslant \dfrac{1}{(k-1)!} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} hM_i \int_{t+(1/s)}^{\infty} \dfrac{d\xi}{\xi^{n-k+\lambda_i+1}} + \dfrac{hM_n}{(k-1)!} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \dfrac{d\xi}{\xi^{n-k+\lambda_n+1}} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1), \\ |u_{n,s}(t)| \leqslant |c| + \dfrac{1}{(n-1)!} \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} hM_i \int_{t+(1/s)}^{\infty} \dfrac{d\xi}{\xi^{\lambda_i+1}} + \dfrac{hM_n}{(n-1)!} \int_{t+(1/s)}^{\infty} \dfrac{d\xi}{\xi^{\lambda_n+1}}\,; \end{array}\right.$$

e ponendo al solito $\lambda = \min \lambda_i$, $H = nh \max M_i$, si ha, per $t \geqslant T + s - (1/s)$,

$$(16) \qquad \begin{cases} |u_{k,s}(t)| < \dfrac{H}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)} \dfrac{1}{t^{n-k+\lambda}} & (k = 1, 2, ..., n-1), \\ |u_{n,s}(t)| < |c| + \dfrac{H}{(n-1)!\,\lambda} \dfrac{1}{t^{\lambda}}, \end{cases}$$

ed anche

$$(16_1) \qquad u_{n,s}(t) > c - \frac{H}{(n-1)!\,\lambda} \frac{1}{t^{\lambda}}.$$

Passando adesso all'intervallo $(T + s - (2/s),\ T + s - (1/s))$ e maggiorando con le (16) gli argomenti delle funzioni $f_i(z)$ che figurano nella seconda delle (8) sotto il segno d'integrale, si ottiene:

$$\begin{cases} \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{\xi^{i-k}}{(i-k)!} u_{k,s}(\xi) \right| < \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \frac{H}{(i-k)!\,(k-1)!\,(n-k+\lambda)} \frac{1}{\xi^{n-i+\lambda}} < \frac{iH}{n-i+\lambda} \frac{1}{\xi^{n-i+\lambda}} \\ \qquad (i = 1, 2, ..., n-1), \\ \left| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!} u_{k,s}(\xi) \right| < |c| + \frac{nH}{\lambda} \frac{1}{\xi^{\lambda}}, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!} u_{k,s}(\xi) > c - \frac{nH}{\lambda} \frac{1}{\xi^{\lambda}}; \end{cases}$$

e basta assumere $T > \max\limits_{i=1,2,...,n} \left[\dfrac{iH}{(n-i+\lambda)q} \right]^{1/(n-i+\lambda)}$ perchè nelle $f_i(z)$ $(i=1, 2, ..., n-1)$ risulti $|z| < q$, $z > z_0$, e nella $f_n(z)$ risulti $|z| < |c| + q$, $z > c - q > z_0$.

Le funzioni $f_i(z)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ non perdono dunque significato per $t \geqslant T + s - (1/s)$ ed il procedimento può ripetersi anche per gli intervalli $(T + s - (3/s),\ T + s - (2/s)), ..., (T,\ T + (1/s))$.

Le (16) risultano da qui verificate per $t \geqslant T$ e qualunque sia l'indice s; ne segue l'equilimitatezza per $t \geqslant T$ delle funzioni $u_{k,s}(t)$, e basta seguire con le opportune modifiche lo schema del Teorema I per completare la dimostrazione del caso in esame.

Se indichiamo adesso con

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} u_i(t)$$

un integrale della (1) che verifichi le condizioni

$$\lim_{t\to\infty} u_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, ..., n-1), \qquad \lim_{t\to\infty} u_n(t) = c \quad (c \geqslant z_0 + q,\ q > 0),$$

tenendo conto delle (16), (16_1), alle quali soddisfano anche le funzioni $u_k(t)$ verso cui tendono in (T, ∞) le successioni $\{u_{k,s}(t)\}$, si ha:

$$c - \sum_{i=1}^{n} \frac{H}{(i-1)!\,(n-i+\lambda)}\,\frac{1}{t^{\lambda}} \leqslant x(t) \leqslant c + \sum_{i=1}^{n} \frac{H}{(i-1)!\,(n-i+\lambda)}\,\frac{1}{t^{\lambda}},$$

e pertanto

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c.$$

Da quanto precede segue il

Teorema II. *Sotto le condizioni* (2′), *comunque si scelga la costante* $c \geqslant z_0 + q$ $(q > 0)$, *esiste almeno un integrale della* (1) *che tende a* c *per* $t \to \infty$.

5. – Osserviamo che la limitazione imposta nelle (2′) al campo di esistenza delle funzioni $f_i(z)$ non può ulteriormente migliorarsi, nel senso che il Teorema II non è più valido in generale se le funzioni $f_i(z)$ si suppongono definite per valori soltanto *non negativi* dei loro argomenti ed ivi continue.

Si consideri infatti l'equazione

$$x'''(t) = A_1(t) f_1(x'') + A_2(t) f_2(x') + A_3(t) f_3(x) \tag{17}$$

nella quale si suppone [6]:

$$\left|\begin{array}{l} le\ f_i(z)\ definite\ per\ z \geqslant 0,\ ivi\ continue\ e\ non\ identicamente\ nulle,\quad (i = 1, 2, 3), \\ f_1(0) = f_2(0) = 0, \\ A_i(t) \neq 0 \quad per \quad t \geqslant t_0 \quad e \quad i = 1, 2, 3; \end{array}\right.$$

e dimostriamo che non può esistere in (T, ∞), $T \geqslant t_0$, alcun integrale $x(t)$ della (17) che verifichi la condizione

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c, \qquad \text{qualunque sia } c > 0.$$

Se ciò fosse, per le ipotesi fatte, $x(t)$, $x'(t)$, $x''(t)$ dovrebbero risultare non negative in (T, ∞); $x'(t)$ sarebbe allora monotona non decrescente, e, poichè $x(t) \to c$ quando $t \to \infty$, si avrebbe

$$\lim_{t\to\infty} x'(t) = 0. \tag{18}$$

Non potrebbe poi essere $x'(t) = 0$ in tutto l'intervallo (T, ∞), perchè dalla (17) seguirebbe

$$A_3(t) f_3(x) = 0 \qquad \text{in } (T, \infty),$$

---

(6) Rientra in tali condizioni il semplice caso di $f_i[x^{(3-i)}] = [x^{(3-i)}]^{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, con α_i esponenti reali positivi.

contrariamente all'ipotesi che tale prodotto non si annulli identicamente per $t \geqslant t_0$.

Esisterebbero dunque dei tratti in cui è $x'(t) > 0$, e, per la (18), dei tratti in cui $x'(t)$ risulterebbe decrescente. Ma ciò è assurdo perchè allora $x''(t)$ non potrebbe mantenersi sempre non negativa in (T, ∞).

6. – Un caso, che qui vogliamo segnalare, in cui non sussiste la limitazione del Teorema II per il campo di esistenza delle funzioni $f_i(z)$, si ha quando

$$A_1(t) = A_2(t) = \ldots = A_{n-1}(t) = 0 \, .$$

Vale infatti il

Teorema III. *L'equazione*

$$x^{(n)}(t) = A(t) f[x(t)] \, , \tag{1'}$$

con le condizioni

$$\begin{cases} f(z) \text{ continua per } z \geqslant z_0 ; \\ A(t) \text{ continua per } t \geqslant t_0 \, , \\ |A(t)| \leqslant h/t^{n+\lambda} ; \\ \text{essendo } h, \lambda \text{ costanti reali positive;} \end{cases} \tag{2'}$$

ammette sempre almeno un integrale, definito in (T, ∞), con $T \geqslant t_0$ sufficientemente grande, che per $t \to \infty$ tende a c, comunque si scelga la costante $c \geqslant z_0 + q$ $(q > 0)$.

Le approssimazioni delle funzioni $u_{k,s}(t)$ in tal caso diventano:

$$\begin{cases} u_{k,s}(t) = c_k \qquad \text{per} \qquad t \geqslant T + s \, , \\ u_{k,s}(t) = c_k + \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!} \displaystyle\int_{t+(1/s)}^{\infty} \xi^{k-1} A(\xi) f \left[\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} u_{1,s} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{\xi^{n-2}}{(n-2)!} u_{2,s} + \ldots + u_{n,s} \right] d\xi \quad \text{per} \quad T \leqslant t \leqslant T + s \, , \end{cases} \tag{8'}$$

dove $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ e $c_n = c$.

Indicando con M il massimo di $|f(z)|$ per $z_0 < z < |c| + q$, analogamente a quanto si è fatto nel n. **4**, otteniamo, per $t \geqslant T + s - (1/s)$,

$$\begin{cases} |u_{k,s}(t)| < \dfrac{hM}{(k-1)!\,(n-k+\lambda)} \dfrac{1}{t^{n-k+\lambda}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \, , \\ |u_{n,s}(t)| < |c| + \dfrac{hM}{(n-1)!\,\lambda} \dfrac{1}{t^{\lambda}} \, , \end{cases} \tag{16'}$$

$$(16_1') \qquad u_{n,s}(t) > c - \frac{hM}{(n-1)!\,\lambda}\frac{1}{t^\lambda},$$

pertanto dalle (16′)

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!}u_{k,s}(\xi)\right| < |c| + \frac{nhM}{\lambda}\frac{1}{\xi^\lambda},$$

ed anche

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi^{n-k}}{(n-k)!}u_{k,s}(\xi) > c - \frac{nhM}{\lambda}\frac{1}{\xi^\lambda}.$$

Assumendo $T > \left[\frac{nhM}{\lambda q}\right]^{1/\lambda}$, per l'argomento della funzione $f(z)$ che figura nella seconda delle (8′) risulta, in $(T+s-(1/s), \infty)$, $z_0 < z < |c| + q$; le (16′) e $(16_1')$ possono allora estendersi a tutto l'intervallo (T, ∞) e col solito procedimento si perviene alla dimostrazione del teorema.

Si ritrova così generalizzato un risultato già da noi stabilito per le equazioni del secondo ordine ([7]).

7. – Terminiamo indicando delle condizioni atte a garantire l'unicità degli integrali di cui i teoremi precedenti assicurano l'esistenza.

Supponiamo che, nella equazione (1),

$$(19) \quad \left\{\begin{array}{l} \textit{le } A_i(t) \textit{ siano continue per } t \geqslant t_0, \\ |A_i(t)| \leqslant h/t^{n+p_i(i-1)+\lambda_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \\ f_1(z) \textit{ sia lipschitziana (del primo ordine) in ogni intervallo finito in cui} \\ \qquad \textit{è definita,} \\ |f_i(z) - f_i(\bar z)| \leqslant R_i |z^{r_i} - \bar z^{r_i}| \qquad (0 < r_i \leqslant p_i;\ i = 2, 3, \ldots, n); \\ \textit{essendo } h,\ p_i,\ \lambda_i,\ R_i,\ r_i \textit{ costanti reali positive;} \end{array}\right.$$

e dimostriamo che *non possono esistere in* (T, ∞), *con* T *sufficientemente grande due soluzioni distinte, della* (1),

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}u_i(t), \qquad \bar x(t) = \sum_{i=1}^{n}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!}\bar u_i(t)$$

verificanti le relazioni

$$\lim_{t\to\infty} u_i(t) = \lim_{t\to\infty} \bar u_i(t) = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove le costanti c_i *soddisfano alle condizioni del Teorema* I.

([7]) Cfr. loc. cit. in ([4]).

Si ha infatti, per le (7) e le (19),

$$|u_k(t) - \overline{u}_k(t)| \leqslant \frac{hR_1}{(k-1)!} \int_t^\infty \frac{1}{\xi^{n-k+1+\lambda_1}} |u_1 - \overline{u}_1| \, d\xi +$$

$$+ \sum_{i=2}^n \frac{hRi}{(k-1)!} \int_t^\infty \frac{1}{\xi^{n-k+1+(p_i-r_i)(i-1)+\lambda_i}} \left| \left\{ \frac{u_1}{(i-1)!} + \frac{u_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + u_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i} - \right.$$

$$\left. - \left\{ \frac{\overline{u}_1}{(i-1)!} + \frac{\overline{u}_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + \overline{u}_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i} \right| d\xi .$$

Poichè, per $k = 1, 2, \ldots, i$ ed $i = 1, 2, \ldots, n$ abbiamo

$$\left\{ \frac{u_1}{(i-1)!} + \frac{u_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + \frac{\overline{u}_k}{(i-k)!} \frac{1}{\xi^{k-1}} + \ldots + u_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i} -$$

$$- \left\{ \frac{u_1}{(i-1)!} + \frac{u_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + \frac{u_k}{(i-k)!} \frac{1}{\xi^{k-1}} + \ldots + u_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i} =$$

$$= \frac{\overline{u}_k - u_k}{(i-k)!} \frac{r_i}{\xi^{k-1}} \left\{ \frac{u_1}{(i-1)!} + \frac{u_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + \frac{u_k + \theta(\overline{u}_k - u_k)}{(i-k)!} \frac{1}{\xi^{k-1}} + \ldots + u_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i - 1}$$

$(0 < \theta < 1)$, ed al secondo membro il coefficiente di $\overline{u}_k - u_k$ si mantiene limitato in (T, ∞), essendo T un valore della variabile tale che per $t \geqslant T$ le $u_k(t)$ e $\overline{u}_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ siano contemporaneamente definite, le funzioni $\left\{ \frac{u_1}{(i-1)!} + \frac{u_2}{(i-2)!} \frac{1}{\xi} + \ldots + u_i \frac{1}{\xi^{i-1}} \right\}^{r_i}$ risultano lipschitziane in (T, ∞) rispetto alle u_k; indicando allora con S_i le costanti di LIPSCHITZ ed osservando che le espressioni $n - k + (p_i - r_i)(i-1)$ sono per le (19) non negative, si ha:

$$|u_k(t) - \overline{u}_k(t)| < \sum_{i=1}^n \frac{hR_i S_i}{(k-1)!} \int_t^\infty \frac{1}{\xi^{1+\lambda}} \{ |u_1 - \overline{u}_1| + \ldots + |u_i - \overline{u}_i| \} \, d\xi ,$$

avendo posto $\lambda = \min \lambda_i$ e $S_1 = 1$.

Se adesso si pone

$$F(t) = \sum_{k=1}^n |u_k(t) - \overline{u}_k(t)|$$

ed N indica una costante opportuna, si ottiene

$$F(t) < N \int_t^{\infty} \frac{F(\xi)}{\xi^{\lambda+1}} \mathrm{d}\xi ,$$

e se il massimo di $F(t)$ in (T, ∞) è assunto per $t = t_0$, avremo

$$1 \leqslant \frac{N}{\lambda} \frac{1}{t_0^{\lambda}} .$$

Ciò è manifestamente assurdo, potendosi assumere $t_0 \geqslant T > [N/\lambda]^{1/\lambda}$, a meno che non si abbia $F(t) \equiv 0$ in (T, ∞).

Le (19), come si è detto, si riferiscono al caso in cui le costanti c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ soddisfano alle condizioni del Teorema I. Quando ci si riferisca al caso dei Teoremi II e III, per la validità del procedimento adottato, bisognerà supporre che *tutte le $f_i(z)$ siano lipschitziane (del primo ordine) e sia* $|A_i(t)| \leqslant h/t^{n+(i-1)+\lambda_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.