Rivista Mat. Univ. Parma 4, 387-402 (1953)

LETTERIO TOSCANO (*)

Polinomi associati a polinomi classici.

Introduzione. In una Memoria di DARBOUX (1) è stata — forse per la prima volta — richiamata l'attenzione su dei polinomi che si presentano nella formula di legame tra polinomi di JACOBI e funzioni di JACOBI di seconda specie.

Tale legame è stato approfondito per i polinomi di LEGENDRE con la formula di CHRISTOFFEL, e ancora dopo per i polinomi ultrasferici con altra formula che può trovarsi in un'opera di NIELSEN (2), e che è stata successivamente ritrovata da WATSON (3).

Nella stessa opera di NIELSEN sono studiati con ampiezza i polinomi associati agli ultrasferici.

Altri contributi si trovano in lavori di P. HUMBERT (4).

Per i polinomi associati a quelli di HERMITE si ha una Memoria dello stesso NIELSEN (5), e per gli associati a quelli di LAGUERRE dei lavori di NIJLAND e PALAMÀ (6).

(*) Indirizzo: Via Placida 85, Messina (Italia).

(1) G. DARBOUX, *Mémoire sur l'approximation des fonctions de très-grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série*, J. Math. Pures Appl. (3) **4**, 5-56 e 377-416 (1878).

(2) N. NIELSEN, *Théorie des fonctions métasphériques*, Gauthier-Villars, Paris 1911, (pp. 141-142).

(3) G. N. WATSON, *A note on Gegenbauer polynomials*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **9**, 128-140 (1938).

(4) P. HUMBERT, *A reduction-formula for the functions of the second kind connected with the polynomials of applied mathematics*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **38**, 61-69 (1917-18); *Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre*, Bull. Soc. Math. France **46**, 120-151 (1918).

(5) N. NIELSEN, *Recherches sur les polynomes d'Hermite*, Det. Kgl. Danske Videnskabernes Selskab-Math./fys. Meddelelser I_6 (1918).

(6) A. A. NIJLAND, *Over een bejzondere soort van geheele functiën*, J. Van Boekhoven, Utrecht 1896. G. PALAMÀ, *Sul wronskiano delle funzioni di Laguerre di 1ª e 2ª specie e su dei polinomi ad esse associati*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **8**, 185-193 (1953); *Relazioni integrali tra le funzioni d'Hermite e di Laguerre di prima e seconda specie, e su dei polinomi ad esse associati*, Rivista Mat. Univ. Parma **4**, 105-122 (1953).

I più recenti risultati sono delle mie formule limiti ([7]).

In questa ricerca si dà un contributo allo studio dei polinomi associati, con particolare riguardo a quelli relativi ai polinomi di HERMITE.

Nella prima parte, prendendo le mosse dalle loro relazioni ricorrenti, si richiama l'attenzione sui determinanti che li rappresentano. E poichè questi rientrano in tipi noti, vengono stabiliti dei risultati per diretta discendenza. Successivamente si stabilisce — fra l'altro — la formula completa di riduzione per funzioni e polinomi di HERMITE, applicando una mia formula limite, e poi ancora per via diversa che consente di fissare altri risultati. E avendo così una formula che esprime i polinomi associati quale combinazione di polinomi classici da cui derivano, si possono stabilire nuove relazioni per i polinomi associati. A margine di alcune relazioni vengono pure dedotte formule per la funzione ipergeometrica ${}_3F_2$ ad argomento unitario.

Alcuni risultati dati solo per gli associati ai polinomi di HERMITE si potrebbero estendere a quelli relativi ai polinomi di LAGUERRE.

1. – Introduciamo i polinomi ultrasferici, di LAGUERRE e di HERMITE,

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(2\alpha, n)}{n!}\, {}_2F_1\left(-n,\ 2\alpha+n;\ \alpha+\frac{1}{2};\ \frac{1-x}{2}\right),$$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1, n)}{n!}\, {}_1F_1(-n;\ \alpha+1;\ x)\,,$$

$$H_{2n}(x) = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^n n!}\, {}_1F_1\left(-n;\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$H_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^n n!}\, x\, {}_1F_1\left(-n;\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

e le rispettive funzioni di seconda specie

$$Q_n^{(\alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\alpha+n)(x-1)^{-2\alpha-n}}{2^{n+1}(\alpha, n+1)}\, {}_2F_1\left(2\alpha+n,\ \alpha+n+\frac{1}{2};\ 2\alpha+2n+1;\ \frac{2}{1-x}\right),$$

$$l_n^{(\alpha)}(x) = -\Gamma(\alpha)x^{-\alpha}\, {}_1F_1(-\alpha-n; 1-\alpha;\ x)\,,$$

$$h_{2n}(x) = (-2)^n n!\, x\, {}_1F_1\left(-n+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{x^2}{2}\right),$$

$$h_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}2^n\, {}_1F_1\left(-n-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ \frac{x^2}{2}\right).$$

([7]) L. TOSCANO, *Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) 9, 29-38 (1954).

Valgono le formule di riduzione

$$\begin{aligned}
Q_n^{(\alpha)}(x) &= P_n^{(\alpha)}(x)Q_0^{(\alpha)}(x) - \Gamma(2\alpha)(x^2-1)^{-\alpha+\frac{1}{2}}R_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,,\\
l_n^{(\alpha)}(x) &= L_n^{(\alpha)}(x)l_0^{(\alpha)}(x) \quad + \Gamma(\alpha+1)x^{-\alpha}e^{x}F_{n-1}^{(\alpha)}(x)\,,\\
h_n(x) &= H_n(x)h_0(x) \qquad - e^{x^2/2}G_{n-1}(x)\,,
\end{aligned}$$

dove $R_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, $F_{n-1}^{(\alpha)}(x)$, $G_{n-1}(x)$ sono i cosiddetti polinomi associati alle funzioni e ai polinomi classici dai quali hanno origine. Il loro grado è dato dall'indice; per l'indice zero si identificano con l'unità, e per indice negativo sono da ritenersi nulli. Essi soddisfano alle relazioni ricorrenti:

$$\begin{aligned}
&(n+1)R_n^{(\alpha)}(x) - 2(\alpha+n)xR_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (2\alpha+n-1)R_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0\,,\\
&(n+1)F_n^{(\alpha)}(x) + (x-\alpha-2n-1)F_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha+n)F_{n-2}^{(\alpha)}(x) = 0\,,\\
&G_n(x) - xG_{n-1}(x) + nG_{n-2}(x) = 0\,,
\end{aligned}$$

e da queste si perviene facilmente alle rappresentazioni con determinanti:

$$(n+1)!\,R_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix}
2(\alpha+n)x & 2\alpha+n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
n & 2(\alpha+n-1)x & 2\alpha+n-2 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & n-1 & 2(\alpha+n-2)x & \dots & 0 & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & 2(\alpha+3)x & 2\alpha+2 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2(\alpha+2)x & 2\alpha+1\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 2(\alpha+1)x
\end{vmatrix},$$

$$(-1)^n(n+1)!\,F_n^{(\alpha)}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix}
x-2n-\alpha-1 & \alpha+n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
n & x-2n-\alpha+1 & \alpha+n-1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & n-1 & x-2n-\alpha+3 & \dots & 0 & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & x-\alpha-7 & \alpha+3 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 3 & x-\alpha-5 & \alpha+2\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & x-\alpha-3
\end{vmatrix},$$

$$G_n(x) = \begin{vmatrix}
x & n & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\
1 & x & n-1 & \dots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 & 0\\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\
0 & 0 & 0 & \dots & x & 3 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x & 2\\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & x
\end{vmatrix}.$$

I precedenti determinanti sono del tipo

$$D_r = \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n_1 & a_2 & m_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{r-1} & m_{r-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n_{r-1} & a_r \end{vmatrix},$$

e per questi è noto che vale la relazione (⁸)

$$N_r D_{-1} - D_r N_{r-1} = m_1 m_2 \dots m_{r-1} n_1 n_2 \dots n_{r-1},$$

con N_r complemento algebrico di a_1 in D_r.

Specializzando ai casi nostri si ritrovano le formule:

$$P_{n-1}^{(\alpha)}(x) R_{n-1}^{(\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x) R_{n-2}^{(\alpha)}(x) = \frac{(2\alpha, n-1)}{n!}, \tag{1}$$

$$L_{n-1}^{(\alpha)}(x) F_{n-1}^{(\alpha)}(x) - L_n^{(\alpha)}(x) F_{n-2}^{(\alpha)}(x) = \frac{(\alpha+1, n-1)}{n!}, \tag{2}$$

$$H_{n-1}(x) G_{n-1}(x) - H_n(x) G_{n-2}(x) = (n-1)!, \tag{3}$$

dedotte da altri per via diversa, mentre qui seguono direttamente da un risultato più generale.

Così, dalla relazione su determinanti (⁹)

$$\begin{vmatrix} a_1 & -b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & -b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & -b_3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & a_3 & -b_4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cdots + \cfrac{b_n}{a_n}}},$$

(⁸) TH. MUIR, *The theory of determinants*, Vol. II, Mac-Millan, London 1911, (p. 429).
(⁹) E. PASCAL, *I determinanti*, Hoepli, Milano 1923, (p. 229).

segue per i polinomi $G_n(x)$:

$$\frac{G_n(x)}{G_{n-1}(x)} = x - \cfrac{n}{x - \cfrac{n-1}{x - \ddots - \cfrac{2}{x}}}, \qquad (n \geqslant 2)\,. \tag{4}$$

I determinanti che esprimono i polinomi $R_n^{(\alpha)}(x)$, $F_n^{(\alpha)}(x)$, $G_n(x)$ si possono ancora presentare sotto altra forma utile.

Nel primo determinante dividiamo glie lementi delle righe rispettivamente per

$$\alpha + n, \quad \alpha + n - 1, \quad \ldots, \quad \alpha + 2, \quad \alpha + 1\,.$$

Moltiplichiamo poi gli elementi della prima parallela al disopra della diagonale principale per

$$\sqrt{\frac{n(\alpha+n)}{(\alpha+n-1)(2\alpha+n-1)}}, \quad \sqrt{\frac{(n-1)(\alpha+n-1)}{(\alpha+n-2)(2\alpha+n-2)}}, \quad \ldots, \quad \sqrt{\frac{2(\alpha+2)}{(\alpha+1)(2\alpha+1)}},$$

e dividiamo quelli della prima parallela al disotto per le stesse quantità. Così facendo si ottiene un determinante simmetrico, e per un teorema di CAUCHY-SYLVESTER si conclude che l'equazione $R_n^{(\alpha)}(x) = 0$ ha tutte le sue radici reali $(\alpha > -1/2)$.

Analogamente segue che le equazioni

$$F_n^{(\alpha)}(x) = 0\,, \qquad G_n(x) = 0$$

hanno pure tutte le radici reali $(\alpha > -2)$.

Per la più grande radice di $G_n(x) = 0$ si può aggiungere la limitazione

$$|x|_{\max} < \sqrt{n-1} + \sqrt{n}\,. \tag{5}$$

In una mia precedente Nota ([10]), sempre operando sui determinanti, ho stabilito le formule notevoli:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} R_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{2^{n/2}}{(n+1)!}\, G_n(x\sqrt{2})\,, \tag{6}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} F_n^{(\alpha)}(\alpha - x\sqrt{\alpha}) = \frac{1}{(n+1)!}\, G_n(x)\,. \tag{7}$$

([10]) Cfr. ([7]).

Ed ancora qui troviamo:

$$G_{2n}(x) = \frac{1}{x} H_{2n+1}(x) + (-2)^{n-1} n!\, F_{n-1}^{(\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{2}\right), \tag{8}$$

$$G_{2n+1}(x) = (-2)^n (n+1)!\, x F_n^{(-\frac{1}{2})}\left(\frac{x^2}{2}\right). \tag{9}$$

Infatti il polinomio $G_n(x)$ è un continuante di ordine n del tipo [11]

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \theta & b_1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & \varphi & b_2 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & \theta & b_3 & \dots \\ 0 & 0 & -1 & \varphi & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

e questo secondochè n è pari o dispari si può trasformare in

$$\begin{vmatrix} \theta\varphi+b_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & \theta\varphi+b_2+b_3 & b_3 & \dots & 0 \\ 0 & b_4 & \theta\varphi+b_4+b_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta\varphi+b_{2n-2}+b_{2n-1} \end{vmatrix}$$

o in

$$\theta \begin{vmatrix} \theta\varphi+b_1+b_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & \theta\varphi+b_3+b_4 & b_4 & \dots & 0 \\ 0 & b_5 & \theta\varphi+b_5+b_6 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \theta\varphi+b_{2n-1}+b_{2n} \end{vmatrix}.$$

Allora per $\theta=\varphi=x$, $b_1=-2$, $b_2=-3$, ..., $b_{n-1}=-n$ si ha $G_n(x)=\Delta_n(x)$, e

$$G_{2n}(x) = \begin{vmatrix} x^2-2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & x^2-7 & 4 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & x^2-11 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^2-(4n-5) & 2n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-1 & x^2-(4n-1) \end{vmatrix},$$

$$G_{2n+1}(x) = x \begin{vmatrix} x^2-5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & x^2-9 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & x^2-13 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^2-(4n-3) & 2n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n & x^2-(4n+1) \end{vmatrix}.$$

---

[11] TH. MUIR, *Continuants whose main diagonal is univarial*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, **25**, 507-512 (1904).

Il primo elemento del determinante di $G_{2n}(x)$ si può scrivere nella forma binomiale $1+(x^2-3)$, per cui

$$G_{2n}(x)=\frac{1}{x}H_{2n+1}(x)+$$

$$+\begin{vmatrix} x^2-7 & 4 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 5 & x^2-11 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 7 & x^2-15 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x^2-(4n-5) & 2n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n-1 & x^2-(4n-1) \end{vmatrix}.$$

Quest'ultimo determinante rappresenta $(-2)^{n-1}n!\,F^{(\frac{1}{2})}_{n-1}(x^2/2)$, e quindi vale la (8).

Il determinante che figura in $G_{2n+1}(x)$ rappresenta $(-2)^n(n+1)!\,F^{(-\frac{1}{2})}_n(x^2/2)$, e quindi vale pure la (9).

2. – La formula limite (6) applicata alle relazioni [12]

$$(-1)^n\frac{(\frac{3}{2},n)}{(\alpha+\frac{1}{2},n)}R^{(\alpha)}_{2n}(x)=1-x\sum_{0}^{n-1}{}_s\frac{(-1)^s(\alpha+2s+2)(\frac{3}{2},s)}{(\alpha+\frac{1}{2},s+1)}R^{(\alpha)}_{2s+1}(x),$$

$$(-1)^n\frac{n!}{(\alpha,n)}R^{(\alpha)}_{2n-1}(x)=-x\sum_{0}^{n-1}{}_s\frac{(-1)^s s!\,(\alpha+2s+1)}{(\alpha,s+1)}R^{(\alpha)}_{2s}(x),$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\alpha+n+1}{2}\right)}\,\frac{R^{(\alpha)}_n(x)-R^{(\alpha)}_n(0)}{x}=\sum_{0}^{\leq(n-1)/2}{}_s\frac{(-1)^s(\alpha+n-2s)\Gamma\left(\frac{n-2s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\alpha+n-2s+1}{2}\right)}R^{(\alpha)}_{n-2s-1}(x),$$

ci dà facilmente le nuove altre relazioni sui polinomi G:

$$(10)\qquad \frac{(-1)^n}{2^n n!}G_{2n}(x)=1-x\sum_{0}^{n-1}{}_s\frac{(-1)^s}{2^{s+1}(s+1)!}G_{2s+1}(x),$$

$$(11)\qquad \frac{(-2)^n n!}{(2n)!}G_{2n-1}(x)=-x\sum_{0}^{n-1}{}_s\frac{(-2)^s s!}{(2s+1)!}G_{2s}(x),$$

$$(12)\qquad \frac{\Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{(n+1)!}\,\frac{G_n(x)-G_n(0)}{x}=\sum_{0}^{\leq(n-1)/2}{}_s\frac{(-1)^s\Gamma\left(\frac{n-2s+1}{2}\right)}{2^{s+1}(n-2s)!}G_{n-2s-1}(x).$$

---

[12] Cfr. [2].

Lo stesso si può fare a partire dalla

$$R_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^{\leqslant n/2}{}_s \frac{(\alpha,\, n-s+1)(2\alpha,\, s)(n+1-\alpha-2s)}{(1-\alpha,\, n-s+1)(\alpha+s)(n-s+1)s!} P_{n-2s}^{(1-\alpha)}(x) .$$

Ma qui occorre aggiungere l'altra formula limite — che può dimostrarsi come la prima —

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^{-n/2} P_n^{(1-\alpha)}\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{2^{n/2}}{n!}\, i^n H_n(ix\sqrt{2}) , \qquad (i^2 = -1). \tag{13}$$

E si ottiene

$$G_n(x) = (-i)^n \sum_0^{\leqslant n/2}{}_s \frac{(n+1)!}{s!\,(n-s+1)(n-2s)!} H_{n-2s}(ix) . \tag{14}$$

Questa relazione — che sarà ritrovata qui appresso per altra via — è da ritenersi fondamentale in quanto permette di stabilire molte relazioni sui polinomi G a partire da quelle sui polinomi di HERMITE. Intanto osserviamo che per essa si può presentare la formula di riduzione per le funzioni di HERMITE di seconda specie nella forma completa

$$h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{x^2/2}(-i)^{n-1} \sum_0^{\leqslant (n-1)/2}{}_s \frac{n!}{s!\,(n-s)(n-2s-1)!} H_{n-2s-1}(ix) , \tag{15}$$

del tipo di quella di CHRISTOFFEL per i polinomi di LEGENDRE.

3. – Per la ricerca della funzione generatrice dei polinomi G prendiamo le mosse dalla formula di riduzione

$$h_n(x) = H_n(x)h_0(x) - e^{x^2/2} G_{n-1}(x) .$$

Lo sviluppo generatore dei polinomi di HERMITE è

$$\sum_0^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} H_n(x) = e^{tx-(t^2/2)} .$$

E da questo — volendo operare sugli stessi elementi — si può dedurre quello relativo alle funzioni di HERMITE di seconda specie, tenendo presente la formula integrale [13]

$$h_n(x) = \int_0^{\pi/2} e^{(x^2 \mathrm{sen}^2\theta)/2} \cos^n\theta \cdot H_{n+1}(x\cos\theta)\, d\theta .$$

[13] E. TOSCANO, *Relazioni integrali sulla funzione ipergeometrica di Kummer*, Matematiche 8, 51-58 (1953).

Si ha

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) = \int_0^{\pi/2} e^{(x^2 \operatorname{sen}^2\theta)/2} \left[\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n \cos^n \theta}{n!} H_{n+1}(x \cos \theta)\right] d\theta .$$

Ma

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$$

e quindi

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(t \cos \theta)^n}{n!} H_{n+}(x \cos \theta) =$$

$$= x \cos \theta \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(t \cos \theta)^n}{n!} H_n(x \cos \theta) - \sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{(t \cos \theta)^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x \cos \theta) =$$

$$= (x - t)\cos \theta \cdot \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{(t \cos \theta)^n}{n!} H_n(x \cos \theta) =$$

$$= (x - t) \cos \theta \cdot e^{(tx - t^2/2)\cos^2 \theta} .$$

Risalendo

$$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) = (x - t)e^{x^2/2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot e^{-(1/2)(x-t)^2\cos^2\theta} d\theta.$$

D'altra parte

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta \cdot e^{-(1/2)(x-t)^2\cos^2\theta}\, d\theta = \sum_{0}^{\infty}{}_s \frac{(-1)^s (x-t)^{2s}}{2^s s!} \int_0^{\pi/2} \cos^{2s+1}\theta\, d\theta =$$

$$= \sum_{0}^{\infty}{}_s \frac{(-1)^s}{2^s(\frac{3}{2}, s)} (x - t)^{2s} = {}_1F_1 \left[1;\ \frac{3}{2};\ -\frac{(x-t)^2}{2}\right] =$$

$$= e^{-(x-t)^2/2} {}_1F_1 \left[\frac{1}{2};\ \frac{3}{2};\ \frac{(x-t)^2}{2}\right] = e^{-(x-t)^2/2} \frac{h_0(x-t)}{x-t} .$$

E quindi vale lo sviluppo generatore per le funzioni di HERMITE

(16) $$\sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) = e^{tx-(t^2/2)} h_0 (x - t) .$$

Ciò premesso, dalla formula di riduzione si ha

$$\sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} h_n(x) = h_0(x) \sum_0^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} H_n(x) - e^{x^2/2} \sum_1^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} G_{n-1}(x) ,$$

e successivamente

$$e^{tx-(t^2/2)} h_0(x-t) = h_0(x)\, e^{tx-(t^2/2)} - e^{x^2/2} \sum_1^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} G_{n-1}(x) .$$

Da cui segue lo sviluppo generatore dei polinomi G:

$$(17) \qquad \sum_1^\infty {}_n \frac{t^n}{n!} G_{n-1}(x) = e^{-(x-t)^2/2}[h_0(x) - h_0(x-t)] .$$

Dallo sviluppo per gli $h_n(x)$ si ha poi

$$h_n(x) = \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{tx-(t^2/2)} h_0(x-t)\right]_{t=0} = e^{x^2/2} \left[\frac{d^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-(x-t)^2/2} h_0(x-t)\right]_{t=0} =$$

$$= e^{x^2/2} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(t-x)^n} e^{-(x-t)^2/2} h_0(x-t)\right]_{t=0} = (-1)^n e^{x^2/2} \left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}(x-t)^n} e^{-(x-t)^2/2} h_0(x-t)\right]_{t=0}$$

e quindi la formula

$$(18) \qquad h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} [e^{-x^2/2} h_0(x)] ,$$

già trovata diversamente da P. HUMBERT.

Analogamente, dallo sviluppo per i $G_n(x)$ segue

$$(19) \qquad G_n(x) = (-1)^n \left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} h_0(x) - h_0(x) \frac{d^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right] e^{-x^2/2} .$$

A partire da questa, applicando l'ordinaria formula sulla derivata n-esima di un prodotto, si perviene alla relazione

$$(20) \qquad G_n(x) = \sum_0^n {}_s \binom{n+1}{s+1} i^s H_s(ix) H_{n-s-1}(x) .$$

Applicando invece l'altra formula

$$\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f\right)\varphi - \left(f \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\right)\varphi = \sum_1^n {}_s (-1)^{s-1} \binom{n}{s} \frac{\mathrm{d}^{n-s}}{\mathrm{d}x^{n-s}} \left(\varphi \frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s} f\right),$$

con $f = h_0(x)$ e $\varphi = e^{-x^2/2}$, si ritrova la relazione fondamentale del n. 2.

4. – Il procedimento seguito per giungere alla (20) si può applicare per esprimere i polinomi associati F con quelli di LAGUERRE.

Si sa che

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}]$$

e che

$$l_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{\alpha+n}e^{-x}l_0^{(\alpha)}(x)]\,,$$

la quale ultima si può far discendere dalla più generale

$${}_1F_1(-\alpha-n;\,\gamma;\,x) = \frac{x^{-\alpha-\gamma+1}e^x}{(\alpha+\gamma,\,n)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[x^{\alpha+\gamma+n-1}e^{-x}{}_1F_1(-\alpha;\,\gamma;\,x)]\,.$$

Quindi

$$\Gamma(\alpha+1)(n+1)!\,F_n^{(\alpha)}(x) = \left[\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\,l_0^{(\alpha)}(x) - l_0^{(\alpha)}(x)\,\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right](x^{\alpha+n}e^{-x})\,.$$

Segue

$$(n+1)!\,F_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n{}_s\binom{n+1}{s+1}\frac{\mathrm{d}^{n-s}}{\mathrm{d}x^{n-s}}x^{\alpha+n}e^{-x}\cdot\frac{\mathrm{d}^s}{\mathrm{d}x^s}x^{-\alpha-1}e^x\,,$$

da cui si ottiene [14]

(21) $$F_n^{(\alpha)}(x) = \sum_0^n{}_s\frac{1}{s+1}L_{n-s}^{(\alpha+s+1)}(x)L_s^{(-\alpha-s-1)}(-x)\,.$$

5. – Dalla formula di riduzione si ha ancora per derivazione

$$(n+1)h_n(x) = (n+1)H_n(x)h_0(x) + e^{x^2/2}H_{n+1}(x) - e^{x^2/2}xG_n(x) - e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_n(x)\,,$$

$$e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_n(x) = (n+1)[H_n(x)h_0(x) - h_n(x)] + e^{x^2/2}H_{n+1}(x) - e^{x^2/2}xG_n(x)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G_n(x) = H_{n+1}(x) - xG_n(x) + (n+1)G_{n-1}(x)\,,$$

---

[14] Cfr. [6], PALAMÀ (I^a Nota).

e in definitiva

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_n(x) = H_{n+1}(x) - G_{n+1}(x)\,. \tag{22}$$

Successivamente è facile provare che

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} G_n(x) + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_n(x) + (n+2)G_n(x) = 2(n+1)H_n(x)\,. \tag{23}$$

6. – Si è già affermato che la formula di legame tra i polinomi G ed H potrebbe utilizzarsi per dedurre relazioni sui polinomi G a partire da altre su gli H. Ed ecco un saggio di trattazione.

a) Si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_n^2\left(\frac{x}{i}\right) \mathrm{d}x = (-1)^n \sum_{0}^{\leqslant n/2}{}_r \sum_{0}^{\leqslant n/2}{}_s \frac{[(n+1)!]^2}{r!\,s!\,(n-r+1)(n-s+1)(n-2r)!\,(n-2s)!} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_{n-2r}(x) H_{n-2s}(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

e a calcoli eseguiti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_n^2\left(\frac{x}{i}\right) \mathrm{d}x = (-1)^n\sqrt{2\pi} \sum_{0}^{\leqslant n/2}{}_s \binom{n+1}{s}^2 \frac{[(n-s)!]^2}{(n-2s)!}\,. \tag{24}$$

Si ha pure

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_m\left(\frac{x}{i}\right) G_n\left(\frac{x}{i}\right) \mathrm{d}x = 0\,, \tag{25}$$

con $m \neq n$ e di parità diversa. E si potrebbe considerare il caso $m \neq n$ con m ed n della stessa parità.

b) Si ha poi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{2n}(tx)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \sum_{0}^{n}{}_s \frac{(2n+1)!}{s!\,(2n-s+1)(2n-2s)!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_{2n-2s}(itx)\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^n \sum_{0}^{n}{}_s \frac{(2n+1)!}{s!\,(2n-s+1)(2n-2s)!} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{n-s-\frac{1}{2}}} \frac{(2n-2s)!}{(n-s)!} (i^2t^2-1)^{n-s} =$$

$$= (-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)!}{n!} \sum_{0}^{n}{}_s (-1)^s \binom{n}{s} \frac{1}{n+s+1} \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^s =$$

$$= (-1)^n \sqrt{2\pi} \frac{(2n+1)!}{s!} \sum_{0}^{n}{}_s \frac{(-n,\, s)}{n!} \frac{1}{n+1} \frac{(n+1,\, s)}{(n+2,\, s)} \left(\frac{t^2+1}{2}\right)^s,$$

e in conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{2n}(tx)\,\mathrm{d}x = (-1)^n \sqrt{2\pi}\,\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}\,{}_2F_1\left(-n,\ n+1;\ n+2;\ \frac{t^2+1}{2}\right). \tag{26}$$

Per $t=1$ si ha, in particolare,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} G_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = (-1)^n n!\,\sqrt{2\pi}\,. \tag{26'}$$

c) Si ha ancora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) G_n(tx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,G_n(tx)\,\mathrm{d}x\,,$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} H_n(x) G_n(tx)\,\mathrm{d}x = n!\,\sqrt{2\pi}\,t^n\,. \tag{27}$$

d) Dalla relazione di ADAMOFF

$$H_{2n}(x) = (-1)^n\,\frac{2^{2n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{x^2/2}\int_0^\infty e^{-2u} u^{n-\frac{1}{2}} \cos(2x\sqrt{u})\,\mathrm{d}u$$

segue

$$G_{2n}\left(\frac{x}{i}\right) =$$

$$= (-1)^n \sum_0^n{}_s \frac{(2n+1)!}{s!\,(2n-s+1)(2n-2s)!}\,(-1)^{n-s}\,\frac{2^{2n-2s+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{x^2/2}\int_0^\infty e^{-2u} u^{n-s-\frac{1}{2}} \cos(2x\sqrt{u})\,\mathrm{d}u =$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(2n+1)!\,e^{x^2/2}\int_0^\infty e^{-2u} u^{-\frac{1}{2}} \cos(2x\sqrt{u}) \cdot \left[\sum_0^n{}_s \frac{(-1)^s 2^{2s}}{(n-s)!\,(n+s+1)(2s)!}\,u^s\right] \mathrm{d}u =$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(2n+1)!}{(n+1)!}\,e^{x^2/2}\int_0^\infty e^{-2u} u^{-\frac{1}{2}} \cos(2x\sqrt{u}) \cdot \left[\sum_0^n{}_s \frac{(-n,\,s)(n+1,\,s)}{(n+2,\,s)(\frac{1}{2},\,s)s!}\,u^s\right] \mathrm{d}u\,,$$

e in definitiva

$$(28) \qquad G_{2n}\left(\frac{x}{i}\right) =$$

$$= (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(2n+1)!}{(n+1)!} e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-2u} u^{-\frac{1}{2}} \cos(2x\sqrt{u}) \cdot {}_2F_2\left(-n, n+1; n+2, \frac{1}{2}; u\right) du .$$

Analogamente, dall'altra relazione di ADAMOFF

$$H_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{2^{2n+\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-2u} u^n \operatorname{sen}(2x\sqrt{u})\, du$$

segue

$$(29) \qquad G_{2n+1}\left(\frac{x}{i}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{i} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2(n+1) \frac{(2n+2)!}{(n+2)!} e^{x^2/2} \int_0^\infty e^{-2u} \operatorname{sen}(2x\sqrt{u}) \cdot {}_2F_2\left(-n, n+2; n+3, \frac{3}{2}; u\right) du .$$

7. – In questo ultimo paragrafo del nostro lavoro, e quale appendice, stabiliamo delle formule sulla funzione ipergeometrica ${}_3F_2$ ad argomento unitario.

I polinomi e le funzioni di LAGUERRE (α non intero) sono integrali indipendenti dell'equazione differenziale

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - x + 1) \frac{dy}{dx} + ny = 0 .$$

Il loro determinante funzionale $W_{\alpha,n}(x)$ si trova calcolato in una citata Nota ([15]) per via ricorrente. Ma si può ottenere direttamente con la formula di LIOUVILLE osservando che il determinante funzionale $\overline{W}_{\alpha,n}(x)$ delle funzioni $x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x)$, $x^{(\alpha+1)/2} l_n^{(\alpha)}(x)$ è legato al precedente dalla relazione $\overline{W}_{\alpha,n}(x) = x^{\alpha+1} W_{\alpha,n}(x)$.

Posto $z = x^{(\alpha+1)/2} y$, ne viene che le funzioni $x^{(\alpha+1)/2} L_n^{(\alpha)}(x)$ e $x^{(\alpha+1)/2} l_n^{(\alpha)}(x)$ sodisfano l'equazione differenziale

$$x^2 \frac{d^2z}{dx^2} - x^2 \frac{dz}{dx} + \left(\frac{1-\alpha^2}{4} + \frac{2n+\alpha+1}{2} x\right) z = 0 .$$

([15]) Cfr. ([6]), PALAMÀ (1ª Nota).

Per la formula di LIOUVILLE si ha

$$\overline{W}_{\alpha,n}(x) = \overline{W}_{\alpha,n}(0)\, e^{\int_0^x dx} = \overline{W}_{\alpha,n}(0)e^{x},$$

e rimane da calcolare $\overline{W}_{\alpha,n}(0)$. Ma $\overline{W}_{\alpha,n}(0) = \dfrac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$ e quindi

$$W_{\alpha,n}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\,\frac{e^x}{x^{\alpha+1}}.$$

Supposto ora noto il valore di $W_{\alpha,n}(x)$ si deduce l'identità

$$\alpha\, {}_1F_1(-n;\alpha+1;x)\, {}_1F_1(n;-\alpha;-x) -$$
$$-\frac{nx}{\alpha+1}\, {}_1F_1(n+1;1-\alpha;-x)\, {}_1F_1(-n+1;\alpha+2;x) = \alpha.$$

D'altra parte si sa che

$${}_1F_1(a;c;x)\, {}_1F_1(a';c';-x) =$$
$$= \sum_0^\infty {}_m \frac{x^m}{m!}\frac{(a,m)}{(c,m)}\, {}_3F_2(-m, 1-c-m, a'; 1-a-m, c'; 1).$$

Facendo prima

$$a = -n, \qquad c = \alpha+1, \qquad a' = n, \qquad c' = -\alpha,$$

e poi

$$a = -n+1, \qquad c = \alpha+2, \qquad a' = n+1, \qquad c' = 1-\alpha,$$

e risalendo successivamente nella relazione dedotta dal determinante funzionale, segue

$$(30) \qquad {}_3F_2(-m, -\alpha-m, n; 1+n-m, -\alpha; 1) =$$
$$= -\frac{m}{\alpha}\, {}_3F_2(-m+1, -\alpha-m, n+1; n-m+1, 1-\alpha; 1).$$

Prendendo le mosse dalle relazioni

$$G_{2n-1}(x) = e^{-x^2/2}h_0(x)H_{2n}(x) - e^{-x^2/2}h_{2n}(x),$$
$$G_{2n}(x) = e^{-x^2/2}h_0(x)H_{2n+1}(x) - e^{-x^2/2}h_{2n+1}(x),$$

ed eseguiti i prodotti $h_0(x)H_{2n}(x)$, $h_0(x)H_{2n+1}(x)$, col precedente sviluppo in cui interviene la ${}_3F_2$, si ottiene

$$G_{2n-1}(x) = (-1)^n \sum_0^\infty{}_m \frac{x^{2m+1}}{2^m m!\,(\frac{3}{2}, m)} \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(2n)!}{2^n n!}\left(\frac{1}{2}, m\right){}_3F_2\left(-m, -m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; -m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1\right) + (-1)^{m+1}2^n(m+n)!\right],$$

$$G_{2n}(x) = (-1)^n \sum_0^\infty{}_m \frac{x^{2m}}{2^{m-1}(m-1)!} \cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(2n+1)!}{2^n n!\,(2m-1)}\,{}_3F_2\left(-m+1, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; -m+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1\right) + (-1)^m \frac{2^n(m+n)!}{2m(\frac{1}{2}, m)}\right].$$

E poichè $G_{2n-1}(x)$ e $G_{2n}(x)$ sono di grado $2n-1$ e $2n$, si conclude

$$(31)\quad {}_3F_2\left(-m, -m-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}; -m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1\right) = (-1)^m \frac{(m+n)!}{(\frac{1}{2}, m)(\frac{1}{2}, n)}, \qquad (m \geqslant n),$$

$$(32)\quad {}_3F_2\left(-m+1, -m+\frac{1}{2}, n+\frac{3}{2}; -m+\frac{3}{2}, \frac{3}{2}; 1\right) = (-1)^{m-1} \frac{(m+n)!}{m\,(\frac{1}{2}, m-1)(\frac{3}{2}, n)},$$

$$(m > n \geqslant 2).$$

Le formule (30), (31), (32) rientrano nel gruppo delle poche che dànno il valore della funzione ipergeometrica ${}_3F_2$ ad argomento unitario.