Rivista Mat. Univ. Parma 4, 327-335 (1953)

BIANCA MANFREDI (*)

Osservazioni su di un problema di distribuzione della temperatura in un mezzo che si muove. (**)

1. – Introduzione.

Il problema della determinazione dello stato termico in un fluido che si muove, quando siano assegnate le caratteristiche fisiche del fluido (densità, calore specifico, conduttività, diffusività) e le condizioni iniziali e al contorno, è suggerito da molte questioni interessanti in modo speciale la geofisica. Come è ben noto ([3], pag. 591) (1), la temperatura $U = U(P, t)$ del mezzo, in un dato punto $P(x, y, z)$ e in un dato istante t, deve soddisfare all'equazione

$$K\Delta_2 U - \boldsymbol{v} \times \operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial t},$$

con K diffusività termica e $\boldsymbol{v}$ velocità del mezzo, oltre alle imposte condizioni iniziali e al contorno.

Mediante la trasformata di LAPLACE, il Sig. BENFIELD [1] ha risolto uno di questi problemi nell'ipotesi particolare che il fluido isotropo e omogeneo riempia un semispazio, assunto come quello delle $x \geqslant 0$, e si muova con velocità costante $-v\boldsymbol{i}$, essendo $\boldsymbol{i}$ il versore dell'asse delle x. Quanto alle condizioni iniziali e al contorno il sig. BENFIELD suppone che per $t = 0$ sia costante ed uguale ad $A > 0$ il gradiente della temperatura, e che il piano $x = 0$ sia tenuto in ogni istante ad una temperatura $-\lambda t$ con λ costante positiva.

Con ciò il problema si riduce ad uno unidimensionale, risultando la temperatura del mezzo funzione del posto solo tramite l'ascissa x di P.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma (Italia).
(**) Ricevuto il 10-XII-1953.
(1) I numeri in parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia al termine del lavoro.

La classica trasformazione

$$U = e^{-(1/2)\int_0^x v(\xi)\,d\xi}\,T(x, t)$$

— di cui nel suo lavoro, e in un caso particolare, dà cenno il Sig. BENFIELD — quando non si voglia applicare la trasformata di LAPLACE, fornisce subito la soluzione richiesta come somma di quelle relative a due ben noti e risolti problemi per un mezzo in quiete. Tale trasformazione offre in più la possibilità di trattare casi più generali nei quali la velocità, pur rimanendo costante in direzione e verso, può pensarsi variabile col posto tramite l'ascissa x di P.

Ciò costituisce l'oggetto di questa Nota, insieme all'esame di due interessanti casi particolari: in uno di questi rientra lo studio del Sig. BENFIELD.

Si può anche osservare che l'equazione differenziale del problema unidimensionale, nel caso di velocità in modulo funzione di x, si identifica con quella a cui deve soddisfare la temperatura in un mezzo in quiete non omogeneo ([5], pag. 93).

2. – Impostazione del problema; esistenza ed unicità della sua soluzione.

Sia S un semispazio avente per origine un piano π, che assumiamo come piano $x = 0$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale. In S si muova un mezzo materiale continuo, omogeneo e isotropo parallelamente all'asse x ed in verso opposto con una velocità

$$\boldsymbol{v} = -Kv(x)\boldsymbol{i},$$

essendo $v(x)$ una funzione limitata, positiva, derivabile per $x \geqslant 0$ e K la diffusivitá del mezzo. La temperatura $U = U(x, t)$ del mezzo, deve soddisfare in S, per $t > 0$, all'equazione

$$U_{xx} + v(x)U_x = \frac{1}{K}U_t,$$

avendo posto

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \qquad U_t = \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Siano poi $\varphi(x)$ e $\psi(t)$, funzioni continue delle loro variabili, rispettivamente la temperatura iniziale e la temperatura per $x = 0$ del mezzo.

In ogni punto di S ed in ogni istante t deve quindi aversi

$$U_{xx} + v(x)U_x = \frac{1}{K} U_t\,, \qquad (x>0,\ t>0), \tag{1}$$

$$U(x, 0) = \varphi(x)\,, \qquad (x>0,\ t=0), \tag{2}$$

$$U(0, t) = \psi(t)\,, \qquad (x=0,\ t>0). \tag{3}$$

Il problema tradotto dal sistema [(1)...(3)] [2], essendo $v(x)$ limitata e derivabile, e continue le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(t)$, ammette soluzione unica, rientrando nel generale problema avibratorio di CAUCHY-DIRICHLET esteso a campi illimitati, per il quale sono noti i teoremi di esistenza e unicità [3], ai quali senz'altro ci riferiamo.

3. – Trasformazione del problema in altri relativi a mezzi in quiete.

Con la posizione

$$U = e^{-(1/2)\int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\,T(x, t) \tag{4}$$

le (1), (2), (3) si trasformano ordinatamente in

$$T_{xx} + f(x)T = \frac{1}{K} T_t\,, \qquad (x>0,\ t>0), \tag{1'}$$

$$T(x, 0) = \varphi^*(x)\,, \qquad (x>0,\ t=0), \tag{2'}$$

$$T(0, t) = \psi(t)\,, \qquad (x=0,\ t>0), \tag{3'}$$

dove è

$$f(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}v^2\right), \tag{5}$$

$$\varphi^*(x) = e^{(1/2)\int_0^x v(\xi)\,\mathrm{d}\xi}\varphi(x)\,. \tag{6}$$

Il sistema [(1')...(3')], com'è noto ([2], pag. 111), traduce ad esempio il problema della determinazione dello stato termico, con assegnate condizioni

(2) Con la notazione [(1) ... (3)] indico brevemente il sistema delle (1), (2), (3).
(3) Cfr. i teoremi V e VII di [4], pag. 713.

iniziali e al contorno, in un filo a semiretta di sezione variabile con l'ascissa. Qualora la $f(x)$ assuma particolari forme, col metodo delle soluzioni elementari si può giungere all'espressione della ricercata soluzione mediante sviluppi in serie. Giova però osservare che, con riferimento al primitivo nostro problema, l'avere $f(x)$ una particolare espressione importa il dover scegliere il modulo $v(x)$ della velocità del fluido in una particolare categoria di funzioni, quelle che soddisfano all'equazione di RICCATI (5). Ora è ben noto ([6], pag. 85) che una tale equazione è risolubile in termini finiti per particolari espressioni della $f(x)$, come ad esempio per

$$f(x) = ax^n\,, \qquad \text{con} \qquad n = -\frac{4m}{2m \pm 1}\,, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, +\infty, \ (a \text{ costante}),$$

in cui rientrano i casi $f(x) = 0$, $f(x) = -c^2$, $f(x) = ax^{-2}$: in questi casi si può esprimere assai semplicemente la soluzione del problema in esame. Per brevità, ed anche per la facile interpretazione, riporteremo nei due paragrafi successivi solo i casi di $f(x) = 0$ e $f(x) = -c^2$.

4. – Caso $f(x) = 0$.

Ci troveremo sicuramente in questo caso quando sia

$$v(x) = \frac{2}{\alpha + x}\,, \tag{7}$$

con α costante arbitraria, in quanto la (7) esprime l'integrale generale di (5) se è $f(x) = 0$. Naturalmente, nel nostro caso, dovendo essere $v(x) > 0$, per qualunque $x \geqslant 0$, e il moto regolare, dovremo supporre la costante α positiva.

Quando il mezzo si muova con una velocità il cui modulo è espresso dalla (7), il nostro problema si identifica con quello della determinazione della temperatura, in un certo istante, in un punto di una corrente in quiete all'infinito, che investe la parete $x=0$ con una velocità il cui modulo è massimo per $x=0$.

Tale problema, tramite la (4), si riconduce manifestamente, essendo in $[(1')\ldots(3')]$ $f(x) = 0$, al classico problema della determinazione dello stato termico in un mezzo isotropo, omogeneo, in quiete, occupante un semispazio con assegnate condizioni iniziali e al contorno ([2], pag. 40 e seguenti).

Se, inoltre, facciamo

$$\varphi(x) = Ax\,, \qquad \psi(t) = -\lambda t\,,$$

il sistema [(1')...(3')] diventa

$$\begin{cases} T_{xx} = \dfrac{1}{K}\, T_t\,, & (x > 0,\ t > 0), \\ T(x, 0) = Ax\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\, x\right), & (x \geqslant 0,\ t = 0), \\ T(0, t) = -\lambda t\,, & (x = 0,\ t \geqslant 0); \end{cases}$$

e ponendo $T = u + w$, la soluzione del nostro problema, tramite la (4), è ricondotta a quella dei due sistemi seguenti:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{K}\, u_t\,, & (x > 0,\ t > 0), \\ u(x, 0) = Ax\left(1 + \dfrac{1}{\alpha}\, x\right), & (x \geqslant 0,\ t = 0), \\ u(0, t) = 0\,, & (x = 0,\ t \geqslant 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx} = \dfrac{1}{K}\, w_t\,, & (x > 0,\ t > 0), \\ w(x, 0) = 0\,, & (x \geqslant 0,\ t = 0), \\ w(0, t) = -\lambda t\,, & (x = 0,\ t \geqslant 0). \end{cases}$$

Le soluzioni di tali sistemi sono ben note ([2], pag. 60 e pag. 45):

$$u = \frac{A}{\alpha}\left\{(2Kt + x^2)\,\mathrm{erf}\,\frac{x}{2\sqrt{Kt}} + 2x\left(\frac{Kt}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/(4Kt)} + \alpha x\right\},$$

$$w = -4\lambda t i^2\,\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{Kt}} \quad (^4).$$

(4) Ricordiamo che si ha

$$i^n\,\mathrm{erfc}\,\frac{x}{2\sqrt{Kt}} = \int_x^{+\infty} i^{n-1}\,\mathrm{erfc}\,\zeta\, d\zeta\,, \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

con

$$i^0\,\mathrm{erfc}\,x = \mathrm{erfc}\,x\,.$$

Si ottiene così, per la (4),

$$U = \frac{\alpha}{\alpha + x} \left\{ \frac{A}{\alpha} \left[(2Kt + x^2) \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{Kt}} + 2x \left(\frac{Kt}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x^2/(4Kt)} + \alpha x \right] - \right.$$

$$\left. - 4\lambda t i^2 \operatorname{erfc} \frac{x}{2\sqrt{Kt}} \right\}.$$

5. – Caso $f(x) = -c^2$.

Questo caso è verificato per una corrente la cui velocità ha il modulo espresso da

$$v(x) = 2c \frac{\alpha e^{2cx} - 1}{\alpha e^{2cx} + 1}, \tag{8}$$

con α e c costanti arbitrarie, in quanto la (8) è l'integrale generale della (5) quando si faccia $f(x) = - c^2$, con c costante arbitraria. Ancor qui, dovendo risultare $v(x) > 0$, per qualunque $x \geqslant 0$, e il moto regolare, dovranno essere verificate alcune limitazioni per le costanti α e c e precisamente dovrà aversi:

$$|\alpha| < 1 \quad \text{per} \quad c < 0\,, \qquad \alpha > 1 \quad \text{per} \quad c > 0\,.$$

La (8), ove si faccia $\alpha = 0$, dà $v(x) = - 2c$, con $c < 0$, che è il caso trattato dal Sig. BENFIELD.

Il sistema $[(1')...(3')]$ è senz'altro quello relativo alla determinazione dello stato termico in un filo rettilineo indefinito omogeneo di sezione costante. Pertanto, tramite la (4), a questo si riconduce il nostro primitivo problema.

Dall'esame dell'equazione (8) discende che per $-1 < \alpha < 0$ $(c < 0)$, oppure $\alpha < 1$ $(c > 0)$, la corrente fluida che investe il piano $x = 0$, e di cui vogliamo determinare lo stato termico, è una corrente traslatoria di velocità in modulo funzione decrescente di x; per $0 < \alpha \leqslant 1$ $(c < 0)$, oppure $\alpha \geqslant 1$ $(c > 0)$, la corrente traslatoria ha invece una velocità in modulo crescente con x; in ogni caso essa ha una velocità asintotica al valore $v = 2|c|$.

Se ora nel sistema $[(1')...(3')]$, con $f(x) = - c^2$, poniamo

$$T = e^{-c^2 Kt} T^*(x, t) \tag{9}$$

si ottiene:

$$(1'') \qquad T^*_{xx} = \frac{1}{K} T^*_t \,, \qquad (x > 0,\ t > 0),$$

$$(2'') \qquad T^*(x, 0) = \varphi^*(x) \,, \qquad (x > 0,\ t = 0),$$

$$(3'') \qquad T^*(0, t) = \psi^*(t) \,, \qquad (x = 0,\ t > 0),$$

dove

$$\varphi^*(x) = e^{-cx}\frac{\alpha e^{2cx} + 1}{\alpha + 1}\varphi(x) \,, \qquad \psi^*(t) = e^{c^2Kt}\psi(t) \,.$$

Il sistema ottenuto [(1")...(3")] è del tutto analogo a quello direttamente ottenuto da [(1')...(3')] facendovi $f(x) = 0$, esaminato nel n. precedente.

Ancor qui se facciamo $\varphi(x) = Ax$ e $\psi(t) = -\lambda t$ la soluzione del nostro problema è ricondotta, mediante la (4) e la (9), alla soluzione del sistema

$$\begin{cases} T^*_{xx} = \dfrac{1}{K} T^*_t \,, & (x > 0,\ t = 0), \\ T^*(x, 0) = \varrho x(\alpha e^{cx} + e^{-cx}) \,, & (x \geqslant 0,\ t > 0), \\ T^*(0, t) = -\lambda t e^{c^2Kt} \,, & (x = 0,\ t \geqslant 0), \end{cases}$$

avendo posto

$$\varrho = \frac{A}{\alpha + 1} > 0 \,.$$

Va osservato che, comunque siano le costanti α e c, la condizione iniziale che qui figura rientra nei casi in cui è valida la soluzione di LAPLACE ([2], pag. 37) [5].

Posto $T^* = u + w$ la soluzione del sistema precedente può ancora espri-

---

[5] Si ha infatti

$$T^*(x, 0) = \varrho x(\alpha e^{cx} + e^{-cx}) < \mu e^{\nu x} \,,$$

con μ costante e ν intero determinato.

mersi come somma delle soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} u_{xx} = \dfrac{1}{K} u_t\,, & (x > 0,\ t > 0), \\ u(x, 0) = \varrho x(\alpha e^{cx} + e^{-cx})\,, & (x \geqslant 0,\ t = 0), \\ u(0, t) = 0\,, & (x = 0,\ t \geqslant 0); \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{xx} = \dfrac{1}{K} w_t\,, & (x > 0,\ t > 0), \\ w(x, 0) = 0\,, & (x \geqslant 0,\ t = 0), \\ w(0, t) = -\lambda t e^{c^2Kt}\,, & (x = 0,\ t \geqslant 0). \end{cases}$$

Ma è ([2], pag. 40)

$$u = \frac{\varrho}{2\sqrt{K\pi t}} \int_0^{+\infty} x'(\alpha e^{cx'} + e^{-cx'})(e^{-(x-x')^2/(4Kt)} - e^{-(x+x')^2/(4Kt)})\,\mathrm{d}x',$$

da cui, eseguendo i calcoli,

$$(10) \qquad u = \varrho e^{Ktc^2} \left\{ \alpha e^{cx} \left[x + 2Ktc - \frac{x + 2Ktc}{2} \operatorname{erfc} \frac{x + 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} + \right.\right.$$
$$\left. + e^{-2cx}(x - 2Ktc) \operatorname{erfc} \frac{x - 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} \right] + e^{-cx} \left[x - 2Ktc - \frac{x - 2Ktc}{2} \operatorname{erfc} \frac{x - 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} + \right.$$
$$\left.\left. + e^{2cx}(x + 2Ktc) \operatorname{erfc} \frac{x + 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} \right] \right\}.$$

Per la w si ha ([2], pag. 44):

$$w = \frac{-2\lambda}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2\sqrt{Kt})}^{+\infty} \left(t - \frac{x^2}{4K\mu^2} \right) e^{c^2K[t - \{x^2/(4K\mu^2)\}]} e^{-\mu^2} \mathrm{d}\mu,$$

da cui

$$(11) \quad w = \frac{\lambda}{2cK} e^{c^2Kt - cx} \left\{ (x - 2Kct) \operatorname{erfc} \frac{x - 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} - (x + 2Ktc) e^{2cx} \operatorname{erfc} \frac{x + 2Ktc}{2\sqrt{Kt}} \right\}.$$

Infine, tenuto conto di (4) e (9), la soluzione del problema [(1)...(3)], con

$v(x)$ data dalla (8), ha la forma

$$U = e^{-c^2Kt+cx} \frac{\alpha + 1}{\alpha e^{2cx} + 1} (u + w) , \tag{12}$$

dove le funzioni u e w sono date rispettivamente da (10) e (11).

Se in particolare nella (12) si pone $\alpha = 0$ e $2c = -v/k$, si ritrova, com'è naturale, la soluzione data dal Sig. BENFIELD.

Bibliografia.

[1] A. E. BENFIELD, *A problem of the temperature distribution in a moving medium*, Q. Appl. Math. 6, 439-443 (1948).

[2] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of in solids*, Clarendon Press, Oxford 1948.

[3] PH. FRANK und R. VON MISES, *Die Differential und Integralgleichungen der Mechanik und Physik*, Band II, 2 Auf., Vieveg & Sohn, Braunschweig 1935.

[4] M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, Rondinella, Napoli 1940.

[5] F. E. RELTON, *Applied Bessel functions*, Blackie, London 1946.

[6] G. N. WATSON, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Univ. Press, Cambridge 1952.